ANO XXVIII – N.os 105-108 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. – 1967

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Sôbre os ideais da soma directa de uma família finita de anéis

por M. Eulália Coutinho e José Morgado

Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Sabe-se que, se $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$ é a soma directa dos anéis $S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, cada um dos quais com elemento um, então os ideais direitos (esquerdos, bilaterais) de S são precisamente os ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais) da forma $J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_n$, onde J_i é um ideal direito (resp. esquerdo, bilateral) de S_i (ver, por exemplo, [1], p. 57, ex. 1).

No entanto, a condição de que cada S_i tenha elemento um não é necessária para que cada ideal J de S seja soma directa de ideais J_i de S_i.

Assim, por exemplo, seja $S = S_1 \oplus S_2$ e suponhamos que S_1 possui a seguinte propriedade: *para cada elemento* $a \in S_1$, *existe unidade direita local*, isto, é, existe um elemento $e_a \in S_1$ tal que $a e_a = a$. Seja J um ideal de S e seja $(a, b) \in J$. Como

$$a, 0) = (a, b) \cdot (e_a, 0)$$

$$\text{e} \quad (0, b) = (a, b) - (a, 0),$$

conclui-se que $(a, 0)$ e $(0, b)$ estão em J.

Se J_1 designa o conjunto dos elementos $a \in S_1$ tais que se tem $(a, b) \in J$ para algum $b \in S_2$ e J_2 designa o conjunto dos elementos $b \in S_2$ tais que $(a, b) \in J$ para algum $a \in S_1$, vê-se que J_1 e J_2 são ideais direitos de S_1 e S_2, respectivamente, e que, além disso, $J = J_1 \oplus J_2$.

Surge naturalmente o problema de formular uma condição necessária e suficiente sôbre os anéis S_i para que todo ideal direito (esquerdo, bilateral) de S seja soma directa de ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais) dos anéis S_i.

O objectivo desta nota é precisamente formular uma tal condição.

Limitamo-nos a considerar somas directas com dois somandos; a extensão dos resultados obtidos ao caso de n somandos é imediata.

1. Comecemos por estabelecer o seguinte

LEMA: *Se* J *é um ideal direito (esquerdo, bilateral) da soma directa* R ⊕ S *dos anéis* R *e* S, *então existem ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais)* J_1 *e* J_2 *de* R *e* S, *respectivamente, tais que*

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \oplus \mathrm{J}_2,$$

se e sòmente se J *possui a seguinte propriedade:*

(1) $(a, b) \in J$ *implica* $(a, 0) \in J$.

Dem.: A condição é necessária, porque, de $(a, b) \in J_1 \oplus J_2$, resulta $a \in J_1$ e, como $0 \in J_2$, tem-se $(a, 0) \in J_1 \oplus J_2 = J$.

Para mostrarmos que a condição é também suficiente, consideremos os epimorfismos

$$\theta_1 : R \oplus S \to R \quad \text{e} \quad \theta_2 : R \oplus S \to S,$$

definidos por

$$(x, y)\,\theta_1 = x \quad \text{e} \quad (x, y)\,\theta_2 = y$$

para todo $(x, y) \in R \oplus S$, e sejam J_1 e J_2 os ideais de R e S, respectivamente, definidos por

$$J_1 = (J \cap (R \oplus \{0\}))\,\theta_1$$
$$\text{e} \quad J_2 = (J \cap (\{0 \oplus S))\,\theta_2 .$$

Vejamos que

$$J = J_1 \oplus J_2 .$$

Com efeito, se $(a, b) \in J_1 \oplus J_2$, então $a \in J_1$ e da definição de J_1 resulta que $(a, 0) \in J$. De modo análogo se vê que $(0, b) \in J$ e, por consequência, $(a, b) \in J$, i. e., $J_1 \oplus J_2 \subseteq J$.

Inversamente, se $(a, b) \in J$, então $(a, 0) \in J$, em virtude da condição (1); como $(0, b) = (a, b) - (a, 0)$, tem-se também $(0, b) \in J$. Ora

$$a = (a, 0)\,\theta_1 \in (J \cap (R \oplus \{0\}))\,\theta_1 = J_1$$
$$b = (0, b)\,\theta_2 \in (J \cap (\{0\} \oplus S))\,\theta_2 = J_2 ,$$

donde $(a, b) \in J_1 \oplus J_2$, i. e., $J \subseteq J_1 \oplus J_2$, o que completa a demonstração.

2. Suponhamos agora que a condição (1) é válida para todo ideal direito de $R \oplus S$. Então, em particular, é válida para todo ideal *principal* direito de $R \oplus S$.

Inversamente, se a condição (1) é válida para todo ideal *principal* direito de $R \oplus S$, então é válida para todo ideal direito de $R \oplus S$.

Na verdade, se $(a, b) \in J$, então como $(a, b) \in ((a, b))$, onde por $((a, b))$ designamos o ideal principal direito gerado por (a, b), resulta que se tem $(a, 0) \in ((a, b)) \subseteq J$.

Conclusão análoga se obtém para ideais esquerdos e para ideais bilaterais.

Por consequência, os ideais direitos de $R \oplus S$ são somas directas de ideais direitos de R e S, respectivamente, se e sòmente se R e S são tais que, para todo $(a, b) \in R \oplus S$, se tem $(a, 0) \in ((a, b))$, quer dizer, se e sòmente se existem elementos $x \in R$ e $y \in S$ e um inteiro n tais que

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} a x + n a = a \\ b y + n b = 0 . \end{cases}$$

Vamos mostrar que o sistema (2) é solúvel em $x \in R$, $y \in S$ e n inteiro, se e sòmente se existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$\text{(3)} \qquad p a \in a R \quad \text{e} \quad q b \in b S .$$

Com efeito, se o sistema (2) é solúvel, então a condição (3) é satisfeita pondo $p = n - 1$ e $q = n$.

Recìprocamente, se existem inteiros p e q primos entre si tais que a condição (3) se verifica e se p' e q' são inteiros tais que

$$p' p + q' q = 1 ,$$

então, pondo $n = q' q$, vem

$$(n - 1)\,a = -p' p a \in a R$$
$$n b = q' q b \in b S .$$

Isto significa que existem $z \in R$ e $t \in S$ tais que

$$(n - 1)\,a = a z \quad \text{e} \quad n b = b t$$

e, portanto, o sistema (2) é solúvel.

Anàlogamente se vê que os ideais esquerdos de $R \oplus S$ são somas directas de ideais esquerdos de R e S, respectivamente, se e sòmente se, para todo $(a, b) \in R \oplus S$, existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$p a \in R a \quad \text{e} \quad q b \in S b .$$

Seja R um anel qualquer e seja a um elemento de R. Pode acontecer que exista algum inteiro não nulo m tal que $m a \in a R$ (resp. $m a \in R a$). Se um tal inteiro m existe, então existe pelo menos um inteiro positivo m' ($m' = m$ ou $m' = -m$) tal que $m' a \in a R$ (resp. $m' a \in R a$); ao menor inteiro positivo n_a tal que $n_a a \in a R$ (resp. $n_a a \in R a$), chamaremos *semiordem direita* (resp. *semiordem esquerda*) do elemento a. Se um tal inteiro não nulo m não existe, diremos que a semiordem direita n_a (resp. semiordem esquerda) do elemento a é zero.

É imediato que, *se* $m a \in a R$, *então* n_a *divide* m.

Na verdade, se $n_a = 0$, então $m = 0$ e o resultado é trivial.

Se $n_a \neq 0$, então de

$$m = n_a q + r \quad \text{com} \quad 0 \leqq r < n_a ,$$

resulta

$$m a - n_a q a = r a$$

e, portanto, $r a \in a R$

Daqui resulta, pela minimalidade de n_a, que $r = 0$, como pretendíamos.

Conclusão análoga para a semiordem esquerda.

É agora fácil estabelecer o seguinte

TEOREMA 1: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal direito de* $R \oplus S$ *seja soma directa de um ideal direito de* R *e um ideal direito de* S, *que todo elemento de* $R \oplus S$ *tenha componentes cujas semiordens direitas sejam primas entre si.*

DEM.: A condição é suficiente. Na verdade, se, para todo elemento $(a, b) \in R \oplus S$, as semiordens direitas n_a e n_b são inteiros primos entre si, então a condição (3) é satisfeita pondo $p = n_a$ e $q = n_b$, quer dizer, o sistema (2) é solúvel.

A condição é necessária. Na verdade, suponhamos que existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$p a \in a R \quad \text{e} \quad q b \in b S .$$

Então p e q não são ambos nulos e, segundo o que anteriormente demonstrámos, n_a divide p e n_b divide q, donde o máximo divisor comum de n_a e n_b divide o máximo divisor comum de p e q, quer dizer, as semiordens direitas n_a e n_b são inteiros primos entre si, como queríamos mostrar.

Deste teorema resulta imediatamente o seguinte

COROLÁRIO: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal direito de* $R \oplus R$ *seja soma direta de dois ideais direitos de* R, *que para cada elemento de* R, *exista alguma unidade direita local.*

DEM.: Suponhamos, com efeito, que todo ideal direito de $R \oplus R$ é soma directa de dois ideais direitos de R. Como, para todo $a \in R$, se tem $(a, a) \in R \oplus R$, do terema 1 resulta que todo elemento $a \in R$ tem semiordem direita $n_a = 1$, o que significa que, para todo elemento $a \in R$, existe alguma unidade di-direita local.

Inversamente, se para cada $a \in R$ existe alguma unidade direita local, então todo elemento de R tem semiordem direita igual a 1, quer dizer, todo elemento de $R \oplus R$ satisfaz à condição do teorema 1, donde resulta que todo ideal direito de $R \oplus R$ é soma directa de dois ideais direitos de R.

Conclusões análogas para ideais esquerdos.

3. O caso de ideais bilaterais de $R \oplus S$ pode ser tratado de modo semelhante ao caso dos ideais direitos.

Seja R um anel qualquer e seja a um elemento de R. Se existe um inteiro não nulo m tal que

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R,$$

(onde por $\Sigma R a R$ designamos uma soma de um número finito de elementos da forma $x a y$, com $x, y \in R$), chamaremos *semiordem* do elemento a ao menor inteiro positivo p_a tal que que

$$p_a a \in a R + R a + \Sigma R a R.$$

Se não existe um tal inteiro não nulo m, diremos que a semiordem de a é zero.

Mostra-se que, se

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R,$$

então a semiordem de a divide m.

De um modo inteiramente análogo ao visto anteriormente se estabelece o seguinte

TEOREMA 2: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal bilateral de* $\mathrm{R} \oplus \mathrm{S}$ *seja soma directa de um ideal bilateral de* R *e um ideal bilateral de* S, *que todo elemento de* $\mathrm{R} \oplus \mathrm{S}$ *tenha componentes cujas semiordens sejam primas entre si.*

BIBLIOGRAFIA

[1] NEAL McCOY, *The Theory of Rings*, MacMillan Mathematics Paperbacks, 1965.

Sobre espaços normados de dimensão finita

por *Manuel Arala Chaves* (1)

Temos essencialmente em vista com este artigo apresentar uma demonstração «elementar» do seguinte resultado clássico — *num espaço vectorial real de dimensão finita todas as normas são equivalentes* — e ainda indicar algumas consequências importantes deste resultado.

Normalmente, num curso ou tratado de Análise estes resultados surgem após desenvolvimentos que tornam possível uma demonstração mais curta do que a que apresentamos (cf., p. ex.º, [1 — 5. 9. 1]). No entanto, atendendo ao condicionalismo actual das nossas licenciaturas, pareceu-nos de interesse redigir uma demonstração do resultado indicado que se torne acessível a um leitor com preparação equivalente à dada na cadeira de Matemáticas Gerais. É neste sentido mais preciso que entendemos o qualificativo de «elementar» que acima demos à demonstração apresentada. Ainda com o objectivo de nada pressupormos do leitor, além do que é tratado na cadeira de Matemáticas Gerais, começamos por indicar algumas definições e propriedades de que necessitamos.

§ 1. Espaços normados, convergência, continuidade, normas equivalentes

(1) Uma norma sobre um espaço vectorial real (2) E é uma função real de domínio E, $x \to \|x\|$ com as seguintes propriedades:

(1) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

(2) É possível definir, mais geralmente, *norma* em espaços vectoriais sobre outros corpos.