NOTA DE AULA

Sobre semigrupos regulares à esquerda e à direita

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Diz-se que o semigrupo S é *regular à esquerda*, se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

(1) $$x\,a\,a = a\,.$$

Diz-se que S é *regular à direita*, se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

(2) $$a\,a\,y = a\,.$$

Na revista *The American Mathematical Monthly*, vol 72 (1965), p. 1021, foi proposto por MICHAEL GEMIGNANI o seguinte exercício:

Seja S um semigrupo regular à esquerda e à direita. Mostre que:

(i) Todo elemento $a \in S$ tem pelo menos uma identidade local, i. e., para todo $a \in S$ existe algum elemento $e_a \in S$ tal que

$$e_a\,a = a\,e_a = a\,;$$

(ii) Para todo elemento $a \in S$ existe pelo menos um elemento inverso, i. e., para todo $a \in S$ existe algum $b_a \in S$ tal que

$$b_a\,a = a\,b_a = e_a\,,$$

onde e_a designa alguma identidade local de a.

Na mesma revista, vol. 74 (1967), p. 325, é publicada a seguinte solução de D. DAWSON:

(i) Fazendo

$$e_a = x\,a = x\,a\,a\,y = a\,y\,,$$

vem

$$e_a\,a = x\,a\,a = a = a\,a\,y = a\,e_a\,.$$

(ii) Fazendo

$$b_a = x\,x\,a = x\,a\,y = a\,y\,y\,,$$

vem

$$b_a\,a = x\,x\,a\,a = x\,a = e_a = a\,y = a\,a\,y\,y = a\,b_a\,.$$

Nesta nota daremos condições necessárias e suficientes para que um semigrupo regular à esquerda e à direita seja um grupo.

2. Observações

1) É interessante notar que *as condições* (i) e (ii) *são suficientes para que um semigrupo* S *seja regular à esquerda e à direita.*

Na verdade, se S satisfaz às condições (i) e (ii), tem-se

$$b_a\,a\,a = e_a\,a = a = a\,e_a = a\,a\,b_a\,,$$

o que prova (1) e (2) com $x = y = b_a$.

2) Num semigrupo regular à esquerda e à direita S, *pode acontecer que não exista inverso do elemento* a *com respeito a uma dada identidade local* e_a *de* a.

Seja, por exemplo, $S = \{0, 2, 4\}$ e seja a operação definida em S o produto de inteiros módulo 6. Como se tem

$$aaa = a \text{ para todo } a \in S,$$

o semigrupo S é regular à esquerda e à direita. Verifica-se que 4 é identidade local de 0 e, no entanto, não existe inverso de 0 com respeito a 4.

3) Num semigrupo regular à esquerda e à direita, *pode acontecer que uma identidade local não seja idempotente.*

Assim, no exemplo anterior, o elemento 2 é uma identidade local de 0 e não é idempotente.

A este respeito podemos estabelecer o seguinte

TEOREMA 1: *Se* S *é um semigrupo regular à esquerda e à direita e se o elemento* $e \in S$ *é uma identidade local, então* e *é idempotente se e só se existem em* S *elementos* a *e* x *tais que*

$$(3) \qquad ea = ae = a, \quad e = xa.$$

DEM. Com efeito, se e é idempotente, então as condições (3) são satisfeitas, pondo $a = x = e$. Inversamente, se as condições (3) são satisfeitas, então tem-se

$$ee = xae = xa = e,$$

como se pretendia mostrar.

Em particular, se x e y são tais que $xaa = a = aay$, então a identidade local de a dada por $e_a = xa = ay$ é idempotente.

3. Grupos encarados como semigrupos regulares à esquerda e à direita

Há semigrupos regulares à esquerda e à direita que possuem elemento neutro e, no entanto, não são grupos. O semigrupo $S = \{0, 2, 4\}$ acima considerado é um exemplo de um tal semigrupo; o elemento neutro é 4. Este semigrupo tem dois elementos idempotentes, 0 e 4.

Do teorema anterior resulta imediatamente o seguinte

COROLÁRIO. *Um semigrupo regular à esquerda e à direita é um grupo, se e só se contém um único idempotente.*

Uma outra caracterização de um grupo como semigrupo regular à esquerda e à direita é dada pelo seguinte

TEOREMA 2. *É condição necessária e suficiente para que um semigrupo regular à esquerda e à direita* S *seja um grupo que*

(I) *Para cada* $a \in S$, *se* e_a *é uma identidade local de* a *e* i *é uma identidade local de* e_a, *então exista inverso de* e_a *relativo a* i;

(II) *Se* $a, b \in S$ *e* e_a *e* e_b *são identidades locais de* a *e* b, *respectivamente, então*

$$e_a e_b = e_a e_b.$$

DEM. As condições (I) e (II) são evidentemente necessárias. Vejamos que são também suficientes.

Seja, com efeito, a um elemento qualquer de S e sejam x e y elementos de S tais que

$$xaa = a = aay.$$

Então sabemos que o elemento $e_a = xa = ay$ é uma identidade local de a. Se i designa também uma identidade local de a, tem-se

$$ie_a = iay = ay = e_a = xa = xai = e_a i,$$

o que mostra que i é também uma identidade local de e_a.

Daqui resulta, pela condição (II), que existe algum elemento $z \in S$ tal que

$$(4) \qquad i = ze_a = zxa.$$

Pelo teorema 1, concluimos que i é um idempotente e, por consequência, tem-se, em virtude de (4),

$$i = ii = zxazxa = zayzay = \\ = ze_a ayze_a ay = iayiay = \\ = ayay = e_a e_a = e_a .$$

Isto significa que, para cada elemento, existe uma única identidade local, e tal identidade é idempotente.

Sejam agora e_a e e_b as identidades locais de a e b, respectivamente.

Então, em virtude da condição (II), tem-se, atendendo à idempotência de e_a e e_b,

$$e_a e_a e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_a e_a ,$$
$$e_a e_b e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_b e_a = e_b e_a e_b ,$$

quer dizer, e_a e e_b são identidades locais do elemento $e_a e_b$, sendo, por consequência,

$$e_a = e_b .$$

Concluimos assim que existe em S um elemento neutro $e = e_a = e_b$.

Ora, de (ii) resulta que, para cada a existe um elemento $a' = b_a$ tal que $aa' = a'a = e$, isto é, S é um grupo, como queríamos provar.

É fácil ver que as condições (I) e (II) são independentes em semigrupos regulares à esquerda e à direita.

Assim, seja $S = \{0, 2, 4\}$ o semigrupo acima considerado e seja T um semigrupo com mais de um elemento, em que a operação é definida por

$$xy = y \text{ quaisquer que sejam } x, y \in T .$$

Tanto S como T são semigrupos regulares à esquerda e à direita e, além disso, S verifica a condição (II) e não a condição (I), enquanto que T verifica a condição (I) e não a condição (II).

BIBLIOGRAFIA

[1] Michael Gemignani, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), p. 1021.

[2] D. F. Dawson, Amer. Math. Monthly, **74** (1967), p. 325

[3] José Morgado, *Note on the definition of a group,* Gazeta de Matemática, **101-102**, (1966), pp. 11-12.

Regularidade segundo Von Neumann e regularidade à esquerda e à direita em semigrupos

por *Maria Eulália Coutinho* (*)

1. Introdução

Seja S um semigrupo.

Diz-se que S é *regular* (no sentido de Von Neumann) se, para todo $a \in S$, existe algum $z \in S$ tal que

$$aza = a .$$

Diz-se que S é *regular à direita,* se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

$$aax = a .$$

Diz-se que S é *regular à esquerda* se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

$$yaa = a .$$

Em recente seminário realizado no Instituto de Matemática, o Prof. José Morgado pôs a

(*) Estudante do Mestrado no Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.