Pelo teorema 1, concluimos que i é um idempotente e, por consequência, tem-se, em virtude de (4),

$$i = ii = zxazxa = zayzay = \\ = ze_a ayze_a ay = iayiay = \\ = ayay = e_a e_a = e_a .$$

Isto significa que, para cada elemento, existe uma única identidade local, e tal identidade é idempotente.

Sejam agora e_a e e_b as identidades locais de a e b, respectivamente.

Então, em virtude da condição (II), tem-se, atendendo à idempotência de e_a e e_b,

$$e_a e_a e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_a e_a ,$$
$$e_a e_b e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_b e_a = e_b e_a e_b ,$$

quer dizer, e_a e e_b são identidades locais do elemento $e_a e_b$, sendo, por consequência,

$$e_a = e_b .$$

Concluimos assim que existe em S um elemento neutro $e = e_a = e_b$.

Ora, de (ii) resulta que, para cada a existe um elemento $a' = b_a$ tal que $aa' = a'a = e$, isto é, S é um grupo, como queríamos provar.

É fácil ver que as condições (I) e (II) são independentes em semigrupos regulares à esquerda e à direita.

Assim, seja $S = \{0, 2, 4\}$ o semigrupo acima considerado e seja T um semigrupo com mais de um elemento, em que a operação é definida por

$$xy = y \text{ quaisquer que sejam } x, y \in T .$$

Tanto S como T são semigrupos regulares à esquerda e à direita e, além disso, S verifica a condição (II) e não a condição (I), enquanto que T verifica a condição (I) e não a condição (II).

BIBLIOGRAFIA

[1] Michael Gemignani, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), p. 1021.

[2] D. F. Dawson, Amer. Math. Monthly, **74** (1967), p. 325

[3] José Morgado, *Note on the definition of a group*, Gazeta de Matemática, **101-102**, (1966), pp. 11--12.

Regularidade segundo Von Neumann e regularidade à esquerda e à direita em semigrupos

por *Maria Eulália Coutinho* (*)

1. Introdução

Seja S um semigrupo.

Diz-se que S é *regular* (no sentido de Von Neumann) se, para todo $a \in S$, existe algum $z \in S$ tal que

$$aza = a .$$

Diz-se que S é *regular à direita*, se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

$$aax = a .$$

Diz-se que S é *regular à esquerda* se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

$$yaa = a .$$

Em recente seminário realizado no Instituto de Matemática, o Prof. José Morgado pôs a

(*) Estudante do Mestrado no Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

questão de relacionar a regularidade segundo VON NEUMANN com a regularidade à esquerda e à direita em semigrupos. O objectivo desta nota é precisamente estudar tais relações.

2. Seja S um semigrupo regular.

Então para todo $a \in S$ existe $y \in S$ tal que

$$(1) \qquad a y a = a \quad \text{e} \quad y a y = y .$$

Realmente, supondo $axa = a$, seja $y = xax$; teremos

$$a y a = a x a x a = a x a = a$$

$$y a y = x a x a x a x = x a x a x = x a x = y .$$

Um elemento $y \in S$ diz-se um *inverso relativo de* a se verifica (1). Para cada $a \in S$, se X é o conjunto de todos os elementos $x \in S$ tais que $a x a = a$, então o conjunto Y de todos os inversos relativos de a é

$$Y = X a X .$$

De facto, se $y \in Y$, de $a y a = a$ resulta que $y \in X$ e de $y a y = y$ resulta que $y \in XaX$, donde $Y \subseteq XaX$.

Por outro lado, seja $y \in XaX$, isto é,

$$y = x a x', \quad \text{com} \quad a x a = a = a x' a .$$

Tem-se então

$$a y a = a x a x' a = a x' a = a$$

$$y a y = x a x' a x a x' = x a x a x' = y ,$$

ou seja, $y \in Y$, donde resulta, como pretendíamos, $XaX \subseteq Y$.

TEOREMA 1. *Seja* S *um semigrupo regular à esquerda e à direita. Então,*

(i) *Para todo elemento* $a \in S$ *existe um e um só inverso relativo* a' *de* a *que comuta com* a.

(ii) *Se* D *é o conjunto de todos os elementos* $x \in S$ *tais que* $a a x = a$ *e se* E *é o conjunto de todos os elementos* $y \in S$ *tais que* $y a a = a$, *então o conjunto* I *de todos os inversos relativos de* a *é precisamente*

$$I = D a E .$$

DEM.:

(*i*) Como S é regular à esquerda e à direita, para todo $a \in S$ existem $x, y \in S$ tais que

$$a a x = a = y a a .$$

Logo,

$$y a = y a a x = a x ,$$

donde

$$(2) \qquad a x a = y a a = a = a a x = a y a .$$

Pondo $a' = y a x$, tem-se, utilizando (2),

$$a a' a = a y a x a = a x a = a$$

$$a' a a' = y a x a y a x = y a y a x = y a x = a'$$

e ainda, novamente utilizando (2),

$$a a' = a y a x = y a a x = y a x a = a' a .$$

Suponhamos agora que a'' é um inverso relativo de a que comuta com a, isto é, tem-se

$$a a'' a = a \quad \text{e} \quad a'' a a'' = a''$$

$$a a'' = a'' a .$$

Teremos

$$a'' a = a'' a a' a = a'' a a a' = a a'' a a' = a a',$$

e, portanto,

$$a a'' = a'' a = a a' = a' a ,$$

donde finalmente

$$a'' = a'' a a'' = a' a a'' = a' a a' = a' .$$

Observemos que a' é qualquer elemento de EaD, e, por isso, ficou demonstrado que, para cada $a \in S$, o conjunto EaD tem um único elemento e que este elemento é precisamente o único inverso relativo de a comutável com $a : EaD = \{a'\}$.

(*ii*) Seja agora um elemento $z \in DaE$, isto é,

$$z = xay, \quad \text{com} \quad aax = a = yaa.$$

Então, utilizando (2), virá

$$aza = axaya = aya = a$$

$$zaz = xayaxay = xaxay = xay = z,$$

logo, $z \in I$, o que prova que $DaE \subseteq I$.

Para mostrar a inclusão inversa, seja t um elemento qualquer de I, isto é,

$$ata = a \quad \text{e} \quad tat = t;$$

e consideremos os elementos

$$x = taa' \quad \text{e} \quad y = a'at.$$

Teremos então

$$aax = aataa' = aaa' = aa'a = a =$$
$$= a'aa = a'ataa = yaa,$$

donde $x \in D$ e $y \in E$. Mas

$$t = tat = taa'at = taa'aa'at = xay,$$

o que prova que $t \in DaE$, como pretendíamos.

3. Diz-se que um semigrupo regular S *tem a propriedade do inverso* se todo elemento a de S tem um e um só inverso relativo a'.

Um semigrupo regular à esquerda e à direita não tem necessàriamente a propriedade do inverso, em virtude de, em geral, haver conjuntos da forma DaE com mais de um elemento.

Por exemplo, seja S um semigrupo com mais de um elemento em que o produto é definido por

$$xy = x \qquad \forall\, x, y \in S.$$

S é evidentemente regular à esquerda e à direita, em virtude de ser $xxx = x \ \forall\, x, y \in S$ e, no entanto, para cada $a \in S$ tem-se $axa = a$ e $xax = x$ *para todo* $x \in S$, e, portanto, S não tem a propriedade do inverso.

Por outro lado, *um semigrupo com a propriedade do inverso não é necessàriamente regular à esquerda e à direita.*

Por exemplo, consideremos as seguintes aplicações do conjunto $\{0, 1, 2\}$ em si mesmo:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 0$$
$$\alpha(0) = \alpha(1) = 0, \qquad \alpha(2) = 1$$
$$\beta(0) = \beta(1) = 0, \qquad \beta(2) = 2$$
$$\gamma(0) = \gamma(2) = 0, \qquad \gamma(1) = 1$$
$$\delta(0) = \delta(2) = 0, \qquad \delta(1) = 2$$

e seja S o semigrupo formado pelo conjunto $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ munido da operação de composição de aplicações.

Verifica-se fàcilmente que este semigrupo tem a propriedade do inverso; representando por ξ' o inverso relativo do elemento $\xi \in S$, tem-se

$$\varepsilon' = \varepsilon, \ \beta' = \beta, \ \gamma' = \gamma, \ \alpha' = \delta, \ \delta' = \alpha.$$

No entanto, S não é regular à esquerda nem à direita, pois

$$\alpha \neq \alpha\alpha\xi = \varepsilon\xi = \varepsilon = \xi\varepsilon = \xi\alpha\alpha \neq \alpha,$$

para todo $\xi \in S$.

Do teorema 1, resulta que, se um semigrupo S com a propriedade do inverso é regular à esquerda e à direita, então todo $a \in S$ comuta com o seu inverso relativo a'. Por outro lado, se S tem a propriedade do inverso e se todo elemento de S comuta com o seu inverso relativo, então S é evidentemente regular à esquerda e à direita, pois

$$a\,a\,a' = a\,a'\,a = a \quad \text{e} \quad a'\,a\,a = a\,a'\,a = a\,.$$

Podemos resumir as considerações feitas enunciando o seguinte

TEOREMA 2. *Um semigrupo regular à esquerda e à direita tem a propriedade do inverso se e sòmente se o conjunto* D a E *contém um único elemento.*

Um semigrupo S *com a propriedade do inverso é regular à esquerda e à direita se e sòmente se cada elemento de* S *comuta com seu inverso relativo.*

4. É claro que todo semigrupo regular à esquerda e à direita é regular (ver (2)), mas a recíproca não é válida. Assim, o semigrupo de aplicações acima considerado é regular e não é regular à esquerda nem é regular à direita. Também o semigrupo multiplicativo das matrizes 2×2 com elementos num corpo é regular mas não é regular à esquerda nem regular à direita (visto que tem elementos nilpotentes não nulos).

Vamos estabelecer o seguinte

TEOREMA 3. *Um semigrupo regular* S *é regular à esquerda e à direita, se e sòmente se, para cada* $a \in S$, *algum dos* $z \in S$ *para os quais se tem* $a\,z\,a = a$ *é tal que*

$$a\,z = z^2\,a^2\,.$$

DEM. A condição é suficiente, pois se

$$a\,z\,a = a \quad \text{e} \quad a\,z = z^2\,a^2\,,$$

teremos, pondo $y = z^2\,a$,

$$y\,a\,a = z^2\,a^3 = z^2\,a^2\,a = a\,z\,a = a\,,$$

e teremos também

$$a\,a\,z = a\,z^2\,a^2 = a\,z \cdot z\,a^2 = z^2\,a^2 \cdot z\,a^2 =$$
$$= z^2\,a \cdot a\,z \cdot a^2 = z^2\,a \cdot z^2\,a^2 \cdot a^2 =$$
$$= z^2\,a \cdot z^2\,a^3 \cdot a = z^2\,a \cdot a \cdot a = z^2\,a^3 = a\,,$$

o que prova ser S regular à esquerda e à direita.

A condição é necessária, pois, se S é regular à esquerda e à direita, então, de acordo com o teorema 1, para cada $a \in S$ existe um $z \in S$ que comute com a e para o qual se tem

$$a = a\,z\,a = z\,a\,a\,.$$

Logo

$$a\,z = z\,a = z \cdot z\,a\,a = z^2\,a^2\,,$$

o que completa a prova.

Uma proposição análoga pode ser estabelecida substituindo no teorema 3 a condição $a\,z = z^2\,a^2$ por $z\,a = a^2\,z^2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ MORGADO, *Sobre Semigrupos Regulares à Esquerda e à Direita,* em publicação, «Gazeta de Matemática», Lisboa.

[2] RICHARD H. BRUCK, *A Survey of Binary Systems,* Berlim, 1958.