is idempotent. Let $tr\,A$ denote the trace of A. Then (1) gives

$$tr\,A_i = tr\,\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0) = n_i\,.$$

On the other hand we have $tr\,E = \sum_{i=1}^{m} tr\,A_i$ and so $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

We show now that $b)$ implies c). This has been proved by Djoković, Langford and others (see [3], where a stronger result due to R. C. Thompson is mentioned). For the sake of completeness we repeat a proof here.

Let $x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}$ be a basis for the range of A_i. Let x be any n dimensional vector. We have

$$x = Ex = \sum_{i=1}^{m} A_i x$$

which proves that any x can be expressed as a linear combination of the vectors $x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$. As $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, the number of these vectors is exactly n and so they must be linearly independent. It follows that any x can be expressed uniquely in the form $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ with x_i belonging to the range of A_i, namely $x_i = A_i x$. Therefore $A_j A_i x = 0$ $(i \neq j, x$ arbitrary) and so $A_j A_i = 0$ $(i \neq j)$.

Finally we show that $c)$ implies $a)$.

Multiplying $\sum_{i=1}^{m} A_i = E$ by A_j we get

$$A_j^2 = A_j$$

and the proof is complete

REFERENCES

[1] Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw — Hill, New York, (1960).

[2] Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, (1960).

[3] Kestelman, *A generalization of Cochran's Theorem*. The Am. Math. Monthly, **75**, N.º 3 (1968), p. 301-303.

Sôbre os teoremas de Zorn, de Zermelo e de Bernstein-Cantor

por **Constantino M. de Barros**

Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, Brasil

Os teoremas referidos acima são deduzidos fàcilmente de um bem conhecido lema que assegura a existência de partes bem ordenadas compatíveis com uma função dada. De passagem dá-se uma demonstração simplificada dêsse lema.

1. Sejam E e F conjuntos. Uma relação *unívoca* de E para F é um subconjunto f do produto cartesiano $E \times F$ tal que se $(x,y),(x',y') \in f$ e $x = x'$, então $y = y'$. Diz-se que f é uma *função* de E para F se f é uma relação unívoca de E para F verificando a seguinte condição suplementar: para todo $x \in E$ existe pelo menos um $y \in F$ tal que $(x,y) \in f$. Se f é uma função de E para F, então para todo $x \in E$ existe um único elemento de F, indicado por

$f(x)$, tal que $(x, f(x)) \in f$. Uma *aplicação* é um terno (F, f, E) tal que f seja uma função de E para F. Uma função f de E para F, resp. uma aplicação (F, f, E), é dita *bijetiva* se para todo $y \in F$ existe um único elemento $x \in E$ tal que $y = f(x)$.

Diz-se que $\leqq$ é uma relação de *ordem* sôbre o conjunto E se $\leqq$ é um subconjunto de $E \times E$ satisfazendo os três seguintes axiomas:

(R 01) Se $x \in E$, então $x \leqq x$;

(R 02) Se $x \leqq y$ e $y \leqq z$, então $x \leqq z$;

(R 03) Se $x \leqq y$ e $y \leqq x$, então $x \leqq y$;

onde $x \leqq y$ significa $(x, y) \in \leqq$.

Seja $(E, \leqq)$ um sistema ordenado, isto é, $\leqq$ é uma relação de ordem sôbre E. Para cada $x \in E$ põe-se

$$\Lambda_x =]\leftarrow, x] = \{w \mid w \in E \text{ e } w \leqq x\}.$$

Por Λ indica-se a função de E para $\beta(E)$ tal que $\Lambda(x) = \Lambda_x$ se $x \in E$. Por $\beta(E)$ nota-se o conjunto formado por todas as partes de E.

PROPOSIÇÃO 1. Se $\leqq$ é uma relação de ordem sôbre E, então existe uma única função Λ de E para $\beta(E)$ tal que

(F 01) Se $x \in E$, então $x \in \Lambda_x$, onde $\Lambda_x = \Lambda(x)$;

(F 02) Se $(x, y) \in E \times E$ e $x \in \Lambda_y$, então $\Lambda_x \subset \Lambda_y$;

(F 03) Se $(x, y) \in E \times E$ e $\Lambda_x = \Lambda_y$, então $x = y$;

(F 04) Se $(x, y) \in E \times E$, então $x \leqq y$ se, e sòmente se $x \in \Lambda_y$.

Recìprocamente, se Λ é uma função de E para $\beta(E)$ satisfazendo (F 01), (F 02) e (F 03), então existe uma única relação de ordem $\leqq$ sôbre E tal que $\Lambda(x) = \Lambda_x =]\leftarrow, x]$ para todo $x \in E$.

Seja $a \in E$. Diz-se que a é *maximal* se o conjunto $\{x \mid x \in E \text{ e } a < x\}$ é vazio. Seja $X \subset E$. Diz-se que a é uma *cota superior* (resp. *inferior*) de X se $x \leqq a$ (resp. $a \leqq x$) para todo $x \in X$. Diz-se que a é *primeiro* elemento de X se $a \in X$ e a é cota inferior de X. Indica-se por X^+ o conjunto das cotas superiores de X. Designa-se por Pri a relação únivoca de $\beta(E)$ para E tal que $(X, a) \in \text{Pri}$ se, e sòmente se a é primeiro elemento de X. Diz-se que X possui primeiro elemento se existe $a \in E$ tal que $(X, a) \in \text{Pri}$. Indica-se por Sup a relação unívoca de $\beta(E)$ para E tal que $(X, a) \in \text{Sup}$ se, e só se $(X^+, a) \in \text{Pri}$. Diz-se que X admite supremo se existe $s \in E$ tal que $(X, s) \in \text{Sup}$. Se X admite supremo indica-se por $\text{Sup}\, X$ o elemento de E tal que $(X, \text{Sup}\, X) \in \text{Sup}$ e diz-se que $\text{Sup}\, X$ é o *supremo* de X.

Seja K um subconjunto de E. Diz-se que K é *bem ordenado* (por $\leqq$) se todo o subconjunto X de K possui primeiro elemento. Portanto K é bem ordenado se, e só se para todo $X \subset K$ existe $w \in X$ tal que $w \in \bigcap_{x \in X} \Lambda_x$.

Diz-se que $(E, \leqq)$ é bem ordenado se E é bem ordenado por $\leqq$.

Por $\beta_*(E)$ indica-se a coleção constituida por todas as partes não vazias de E. Uma *função escolha* sôbre E é uma função σ de $\beta_*(E)$ para E tal que $\sigma(X) \in X$ para todo $X \in \beta_*(E)$.

2. Seja $(E, f, \leqq)$ tal que (E, f, E) seja uma aplicação e $(E, \leqq)$ seja um sistema ordenado.

LEMA 1. *Se* $(x, a) \in E \times E$ *verifica*

(C^f) $x \leqq a$ *ou* $f(a) \leqq x$,

então (x, a) *verifica também a condição:*

(N^f) *se* $a < x$, *então* $f(a) \leqq x$.

Se além do mais $a \leqq f(a)$, *então*

(C) $a < x$ ou $x \leqq a$.

Recìprocamente, se um par $(x, a) \in E \times E$ *verifica* (N^f) *e* (C), *então* (x, a) *satisfaz* (C^f).

Demonstração. $(C^f) \Rightarrow (N^f)$. Se $a < x$, então $x \not\leqq a$, logo $f(a) \leqq x$ por (C^f).

$(C^f) \Rightarrow (C)$. De facto, se $x \not\leqq a$, então $a \leqq f(a) \leqq x$. A recíproca é trivial.

Lema 2. *Se* $(x, a) \in E \times E$ *satisfaz a condição* (C^f), *e se* $x \leqq f(x)$, *então* $(f(x), a)$ *também sattisfaz* (C^f).

Demonstração. Se $x < a$, então $f(x) \leqq a$ pelo lema 1. Se $x = a$, então $f(a) \leqq f(x)$. Se $f(a) \leqq x$, então $f(a) \leqq x \leqq f(x)$. Logo $f(x) \leqq a$ ou $f(a) \leqq f(x)$.

Seja K uma parte de E. Para cada subconjunto A de K se escreverá

$$C_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A, \text{ então } x \leqq a \text{ ou } f(a) \leqq x\},$$

$$\bar{C}_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A, \text{ então } x \leqq a \text{ ou } a \leqq x\},$$

$$N_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A \text{ e } a < x, \text{ então } f(a) \leqq x\}.$$

Tem-se

$$C_K^f A = K \cap C_E^f A \quad \text{e} \quad N_K^f A = K \cap N_E^f A.$$

Do lema 1 resulta: $C_K^f A \subset N_K^f A \cap C_K A$. Se além do mais $a \leqq f(a)$ para todo $a \in A$, então $C_K^f A = N_K^f A \cap C_K A$.

Lema 3. *Se* $A \subset K \subset E$, *então*

(C 1) *Se* w *é primeiro elemento de* K, *então* $w \in C_K^f$;

(C 1) *Se* $B \subset C_K^f A$, *se* B *admite supremo e se* $(Sup B) \in K$, *então* $(Sup B) \in C_K^f A$.

Demonstração de (C 2). De fato, seja $a \in K$. Se a é uma cota superior de B, então $(\operatorname{Sup} B) \leqq a$. Se a não é cota superior de B, então existe $x \in B$ tal que $x \not\leqq a$, logo $f(a) \leqq x$. Portanto $f(a) \leqq x \leqq \operatorname{Sup} B$. Consequentemente $(\operatorname{Sup} B) \leqq a$ ou $f(a) \leqq \leqq \operatorname{Sup} B$. Logo $(\operatorname{Sup} B) \in C_K^f A$.

Uma parte K de E será dita uma *corrente* em w se (K, w) satisfazer os três axiomas seguintes:

(C 1) $f(K) \subset K$;

(C 2) $w \in K$;

(C 3) Se $A \subset K$ e se A admite supremo, então $(\operatorname{Sup} A) \in K$.

Se além do mais (K, w) satisfizer

(C 4) Se $x \in K$, então $w \leqq x$,

diz-se que K é uma corrente de *origem* w.

Para todo $w \in E$ tem-se: (*i*) E é uma corrente em w; (*ii*) a interseção de todas as correntes em w é uma corrente em w.

Por $K[w]$ indica-se a interseção de todas as correntes em w e $K[w]$ será dita a a corrente *gerada* por w.

Da definição de $K[w]$ resulta o seguinte princípio de indução: se $X \subset E$ e se $K[w] \cap X$ é uma corrente em w, então $K[w] \subset X$.

Diz-se que $(E, f, \leqq)$ é uma *dilatação* se $(E, \leqq)$ é um sistema ordenado e f é uma função de E para E tal que

(D) Se $x \in E$, então $x \leqq f(x)$;

ou equivalentemente

($\tilde{D}$) Se $w \in E$, então $[w, \rightarrow[= \{x \mid x \in E$ e $w \leqq x\}$ é uma corrente em w.

Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e $w \in E$, então $K[w] \subset [w, \rightarrow[$, logo w é primeiro elemento de $K[w]$. Portanto $K[w]$ é uma corrente de origem w.

LEMA 4. *Seja* $(E, f, \leqq)$ *é uma dilatação Se* $w \in E$ *e se* $K[w] \subset N^f K[w]$, *então* $K[w]$ *é uma parte bem ordenada de* $(E, \leqq)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $X \subset K[w]$ tal que $X \neq \phi$, onde ϕ é o conjunto vazio. Suponhamos que X não possui primeiro elemento. Então $X^- \cap X = \phi$, onde X^- é a parte de E formada por todas as cotas inferiores de X.

(*a*) Seja $a \in X^-$, então $a < x$ para todo $x \in X$, logo $f(a) \leqq x$ para todo $x \in X$. Consequentemente $f(a) \in X^-$.

(*b*) $w \in X^-$ visto que w é o primeiro elemento de $K[w]$.

(c) Seja $A \subset X$ tal que A admita supremo. Então para todo $x \in X$ se tem $(\operatorname{Sup} A) \leqq x$. Logo $(\operatorname{Sup} A) \in X^-$.

De (*a*), (*b*) e (c) resulta que $X^- = K[w]$, logo $X = \phi$, o que é absurdo.

LEMA 5. *Se* $(E, f, \leqq)$ *é uma dilatação, então* $K[w] \subset C^f K[w]$.

DEMONSTRAÇÃO. Em virtude dos lemas 2 e 3 se $a \in K[w]$, então o conjunto $(K[w])_a = \{x \mid x \in K[w],\ x \leqq a \text{ ou } f(a) \leqq x\}$ é uma corrente em w. Portanto $K[w] = (K[w])_a$.

Dos lemas 4 e 5 e do fato de $C^f K[w] \subset N^f K[w]$ resulta

PROPOSIÇÃO 2. Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e se $w \in E$, então $K[w]$ é uma parte bem ordenada de E. Além do mais w é o primeiro elemento de $K[w]$ e $f(m) = m \in K[w]$ se $K[w]$ admite supremo e $m = \operatorname{Sup} K[w]$.

COROLÁRIO 1 (do ponto fixo para dilatações). Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e se tôda parte bem ordenada de E admite supremo, então para cada $w \in E$ existe $m \in E$ tal que $w \leqq m$ e $f(m) = m$.

3. TEOREMA DE ZORN (1.ª forma). *Seja* $(E, \leqq)$ *um sistema ordenado tal que tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo. Então para todo* $w \in E$ *existe um elemento maximal* $m \in E$ *tal que* $w \leqq m$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja f a função de E para E definida pela formula:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é maximal}, \\ \sigma(]x, \to[) & \text{se } x \text{ não é maximal}, \end{cases}$$

onde σ é uma função escolha sôbre E. O teorema resulta do corolário 1.

4. Seja σ uma função escolha sôbre E. Indica-se por $\hat{\sigma}$ a função de $\beta(E)$ para $\beta(E)$ definida pela seguinte formula: se $X \subset E$, então

$$\hat{\sigma}(X) = \begin{cases} E & \text{se } X = E, \\ X \cup \{\sigma(E - X)\} & \text{se } X \neq E, \end{cases}$$

onde $E - X = \{w \mid w \in E \text{ e } w \notin X\}$. Tem-se que $(\beta(E), \hat{\sigma}, \subset)$ é uma dilatação Seja $K_\sigma[\phi]$ a corrente gerada pelo conjunto vazio. Por K_σ^* se indicará o conjunto $K_\sigma[\phi] - \{E\}$. Se $x \in E$, por Λ_x^* se indicara a reunião de todos os conjuntos $Y \in K_x^*$ tais que $x \notin Y$. Em virtude de definição de Λ_x^* resulta:

(O_σ^*) Se $Y \in K_\sigma^*$, então $x \notin Y$ se, e só se $Y \subset \Lambda_x^*$.

PROPOSIÇÃO 3. Para todo $x \in E$ existe um único subconjunto de E, indicado por Λ_x^*, tal que

$(I^* 1)$ $\Lambda_x^* \in K_\sigma^*$;

$(I^* 2)$ $x \notin \Lambda_x^*$;

$(I^* 3)$ $\sigma(E - \Lambda_x^*) = x$.

Além do mais se $Y \in K_\sigma^*$, então $Y = \Lambda_{\sigma(E-Y)}^*$.

DEMONSTRAÇÃO. As propriedades (I* 1) e (I* 2) são consequências da caracterização de Λ^*_x por intermédio de (O^*_σ) e de definição de $K_\sigma[\phi]$. Resta mostrar apenas (I* 3). Se $\Lambda^*_x \cup \{\sigma(E-\Lambda^*_x)\} = E$, então $x=\sigma(E-\Lambda^*_x)$ pois $x \notin \Lambda^*_x$. Se $\hat{\sigma}(\Lambda^*_x) \in K^*_\sigma$ e $x \notin \hat{\sigma}(\Lambda^*_x)$, então $\hat{\sigma}(\Lambda^*_x) \subset \Lambda^*_x$, em virtude da definição de Λ^*_x; logo $\sigma(E-\Lambda^*_x) \in \Lambda^*_x$ o que é absurdo.

Seja Y tal que $Y \in K^*_\sigma$, $x \notin Y$ e $\sigma(E-Y)= = x$. Da definição de Λ^*_x e de (I* 2) resulta que $Y \subset \Lambda^*_x$. Se $Y \neq \Lambda^*_x$, de (I* 1) e do lemma 1 resulta que $\hat{\sigma}(Y) \subset \Lambda^*_x$, logo $\sigma(E-Y) \in \Lambda^*_x$, portanto $\sigma(E-Y) \neq x$ pois $x \notin \Lambda^*_\sigma$, porém isto contraria a hipótese $\sigma(E-Y)=x$, logo $Y=\Lambda^*_x$.

Se $Y \in K^*_\sigma$ e se $x=\sigma(E-Y)$, então $x \in Y$, logo $Y=\Lambda^*_x$ pela unicidade.

COROLÁRIO 2. Se $x, y \in E$, então

$(\tilde{O}^*_\sigma)$ $x \notin \Lambda^*_y$ se, e só se $\Lambda^*_y \subset \Lambda^*_x$,

(O_σ) $x \in \Lambda_y$ se, e só se $\Lambda_x \subset \Lambda_y$,

onde $\Lambda_x = \Lambda^*_x \cup \{x\}$.

COROLÁRIO 3. Seja σ uma função escolha sôbre E. Se σ^* é a função de K^*_σ para E tal que $\sigma^*(Y)=\sigma(E-Y)$ se $Y \in K^*_\sigma$ e Λ^* é a função de E para K^*_σ tal que $\Lambda^*(x)=\Lambda^*_\sigma$ se $x \in E$, então σ^* é bijetiva e Λ^* é a inversa de σ^*, isto é, $\sigma^*\Lambda^*(x)=x$ se $x \in E$ e $\Lambda^*\sigma^*(Y)=Y$ se $Y \in K^*_\sigma$.

TEOREMA DE ZERMELO. *Seja* σ *uma função escolha sôbre* E. *Então existe uma única relação de boa ordem* $\underline{\angle}$ *sôbre* E *tal que:* (i) K^*_σ *é o conjunto cujos elementos são da forma* $]\leftarrow, x[$, *onde* $x \in E$; *ou* (ii) $\sigma(E - [\leftarrow, x[) = x$ *para todo* $x \in E$. *Além do mais* $\Lambda^*(x) =]\leftarrow, x[$ *para todo* $x \in E$, $\sigma(E-Y)$ *é o primeiro elemento de* $E - Y$ *se* $Y \in K^*_\sigma$ e $\Lambda^*_{\sigma(E)} = \phi$.

DEMONSTRAÇÃO. Pondo-se $x < y$ se $(x, y) \in E \times E$ e $\Lambda^*_x \subset \Lambda^*_y$, de Λ^* ser bijetiva resulta que $\underline{\angle}$ é uma relação de boa ordem sôbre E.

A unicidade é consequência do lema 6 abaixo aplicado à $K=K_\sigma[\phi]$ e à

$$K' = \Lambda^*(\phi) \cup \{E\} \quad \text{em} \quad (\beta(E), \hat{\sigma}, \subset).$$

LEMA 6. *Seja* $(E, \underline{\angle})$ *um sistema ordenado tal que tôda a parte bem ordenada admita supremo. Seja* f *uma função de* E *para* E. *Se* $w \in E$, *então existe no máximo um subconjunto* K *de* E *tal que*

(1) K *é uma corrente de origem em* w.

(2) *Se* $x \in K$, *então* $x \,\underline{\angle}\, f(x)$; *se* $(x, y) \in K \times K$ *e* $x \,\underline{\angle}\, y \,\underline{\angle}\, f(x)$, *então* $x=y$ *ou* $y=f(x)$;

(3) K *é bem ordenado;*

(4) *Se* $p \in K$ *e* $p=f(p)$, *então* $x \,\underline{\angle}\, p$ *para todo* $x \in K$.

Se além do mais $x \,\underline{\angle}\, f(x)$ *para todo* $x \in E$, *então* $K[w]$ *é a única parte de* E *verificando as condições* (1), (2), (3) *e* (4) *acima.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K' uma outra corrente de origem w. Tem-se $K \subset K'$. De fato, em caso contrário $K - K' \neq \phi$. Nêste caso seja q o primeiro elemento de $K - K'$, o qual existe visto que K é bem ordenado. Seja $\Lambda^*_q(K) = \{x \in K \text{ e } x < q\}$. Da definição de q resulta $\Lambda^*_q(K) \subset K \cap K'$. Seja $s = \operatorname{Sup} \Lambda^*_q(K)$. Das duas uma: $s < q$ ou $s = q$.

Caso 1. Seja $s < q$. Como $s < q < f(s)$ é impossível, então $f(s) \,\underline{\angle}\, q$, pois $q, f(s) \in K$ e K é bem ordenado. Ora $f(s) < q$ implica $f(s) = s$ em virtude da definição de s e de (2). Se $f(s) = q$, então $q = f(s) \in K'$, pois $s \in K'$, o que também é absurdo pois $q \in K - K'$.

Caso 2. Seja $s = q$. Ora $\Lambda^*_q(K) \subset K'$ e K' é uma corrente, logo $q \in K'$, pois $q = s$, mas $q \in K - K'$. Portanto êste segundo caso é impossível.

Conseqüêntemente $K - K' = \phi$. Portanto $K \subset K'$. Pelas mesmas razões $K' \subset K$.

Das proposições 1, 2 e do lema 5 resulta que $K = K[w]$ satisfaz (1), (2) e (3). Resta apenas demonstrar (4). Se $p \in K[w]$ e $p = f(p)$, então $[w, p]$ é uma corrente em w, logo $K[w] \subset [w, p]$.

5. Diz-se que $(E, f, \trianglelefteq)$ é um sistema *crescente* se $(E, \trianglelefteq)$ é um sistema ordenado e f é uma função de E para E tal que

(F C) Se $(x, y) \in E \times E$ e $x \trianglelefteq y$, então $f(x) \trianglelefteq f(y)$.

LEMA 7 (do ponto fixo para funções crescentes). *Se* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \trianglelefteq)$ *é um sistema crescente e tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo, então existe* $\mathrm{m} \in \mathrm{E}$ *tal que* $\mathrm{m} = \mathrm{f}(\mathrm{m})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $W = \{x \mid x \in E$ e $x \trianglelefteq f(x)\}$. O conjunto W é uma corrente de origem $O = \mathrm{Sup}\, \phi$. Aplicando o corolário 1 à $(W, f_W, \trianglelefteq_W)$, onde $f_W(x) = f(x)$ para todo $x \in E$ e $\trianglelefteq_W = (W \times W) \cap \trianglelefteq$, resulta que existe um elemento $m \in W$ tal que $m = f(m)$.

TEOREMA DE BERNSTEIN-CANTOR. *Sejam* $(\mathrm{F}, \mathrm{g}, \mathrm{E})$ *e* $(\mathrm{E}, \mathrm{h}, \mathrm{F})$ *aplicações injetivas, i. e., se* $\mathrm{x}, \mathrm{x}' \in \mathrm{E}$, *se* $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in \mathrm{F}$ *e se* $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}')$ *e* $\mathrm{h}(\mathrm{y}) = \mathrm{h}(\mathrm{y}')$, *então* $\mathrm{x} = \mathrm{x}'$ *e* $\mathrm{y} = \mathrm{y}'$. *Então existe uma função bijetiva* f *de* E *para* F.

DEMONSTRAÇÃO. Seja θ a função de $\beta(E)$ para $\beta(E)$ tal que para todo $X \in \beta(E)$ se tenha $\theta(X) = C(h(C(g(X))))$, onde $C(Y) = E - Y$ se $Y \subset E$. O terno $(\beta(E), \theta, \subset)$ é um sistema crescente. Pelo lema 7 existe um elemento $E_1 \in \beta(E)$ tal que $\theta(E_1) = E_1$. Seja $F_1 = g(E_1)$; então $C(E_1) = h(C(F_1))$. Seja f a função de E para F tal que para todo $x \in E$ se tenha $f(x) = g(x)$ se $x \in E_1$ e $h(f(x)) = x$ se $x \in C(E_1)$. Da definição de f e do fato de g e h serem injetivas decorre que f é bijetiva.

6. Nas demonstrações acima, dadas para os teoremas de ZORN, de ZERMELO e de BERNSTEIN-CANTOR usou-se fragmento (proposição 2 e lemas 6, 7) do seguinte resultado básico:

TEOREMA DA EXTRAÇÃO DE PARTES BEM ORDENADAS E DO PONTO FIXO. *Seja* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \trianglelefteq)$ *uma dilatação ou um sistema crescente. Se tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo, então existe uma única parte de* E, *indicada por* K, *tal que* (K, w) *verifica as condições* (1), (2), (3) *e* (4) *do lema 6, onde* $\mathrm{w} = Sup\, \phi$. *Além do mais* $\mathrm{f}(Sup\, \mathrm{K}) = Sup\, \mathrm{K}$.

7. Seja $(E, \trianglelefteq)$ um sistema ordenado. Seja X um subconjunto de E. Diz-se que X é

(t. o.) *totalmente ardenado* se para todo $(x, x') \in X \times X$ se tenha $x \trianglelefteq x'$ ou $x' \trianglelefteq x$:

(p. b. o.) *parcialmente bem ordenado* se tôda parte totalmente ordenada não vazia contida em X possui primeiro elemento;

(f. d.) *filtrante (à direita)* se para todo $(x', x'') \in (X \times X)$ existe um elemento $x \in X$ tal que $x' \trianglelefteq x$ e $x'' \trianglelefteq x$.

Por $X^{\#}$ indica-se o subconjunto de E constituido por todos os elementos $y \in E$ tais que $y \ntriangleleft x$ para todo $x \in X$. Tem-se $X^{+} \subset X^{\#}$.

Por $\subset^{\#}$, (resp. $\subset^{+}$) indica-se a relação de ordem sôbre $\beta(E)$ definida do seguinte modo:

$X \subset^{\#} Y$ se, e só se $X \subset Y$ e $Y - X \subset X^{\#}$.

(resp. $X \subset^{+} Y$ se, e só se $X \subset Y$ e $Y - X \subset X^{+}$).

A relação de ordem $\subset^{\#}$ (resp. $\subset^{+}$) será chamada a $(\#)$-*inclusão* (resp. $(\#)$-*inclusão*) associada à $(E, \underline{\angle})$.

Proposição 4. Seja $\mathscr{F}$ um conjunto cujos elementos são partes de E. Se $\mathscr{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão (resp. pela $(+)$-inclusão), então $\mathscr{F}$ admite supremo com respeito à $\subset^{\#}$ (resp. $\subset^{+}$) e

$$\underset{\#}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F} = (\bigcup \mathscr{F}) \qquad (\text{resp. } \underset{+}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F} = (\bigcup \mathscr{F})),$$

onde $\underset{\#}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F}$ (resp. $\underset{+}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F}$) indica o supremo de $\mathscr{F}$ com respeito à $(\#)$-inclusão (resp. $(\#)$-inclusão).

Demonstração. Seja $X = \bigcup \mathscr{F}$.

(*a*) Tem-se $X_\alpha \subset^{\#} X$ para todo $X_\alpha \in \mathscr{F}$. De facto, seja $w \in X - X_\alpha$, então existe $X_\beta \in \mathscr{F}$ tal que $w \in X_\beta$, porém $\mathscr{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão, logo existe $X_\gamma \in \mathscr{F}$ tal que $X_\alpha \subset^{\#} X_\gamma$ e $w \in X_\gamma - X_\alpha$. Conseqüêntemente $w \in X_\alpha^{\#}$, portanto $X_\alpha \subset^{\#} X$.

(*b*) Seja W uma parte de E tal que $X_\alpha \subset^{\#} W$ para todo $X_\alpha \in \mathscr{F}$. Seja w um elemento de $W - X$; para todo $X_\alpha \in \mathscr{F}$ se tem: $w \in W - X_\alpha$, logo $w \in X_\alpha^{\#}$, portanto $w \in X^{\#}$. Conseqüêntemente $X \subset^{\#} W$.

Lema 8. *Seja $\mathscr{F}$ um conjunto cujos elementos são partes parcialmente bem ordenadas (resp. totalmente ordenadas) de* E *munido de $\underline{\angle}$. Se $\mathscr{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão, então $(\bigcup \mathscr{F}) = \underset{\#}{Sup}\, \mathscr{F}$ e $\underset{\#}{Sup}\, \mathscr{F}$ é parcialmente bem ordenado (resp. totalmente ordenado).*

Demonstração. Em virtude da proposição 4 resta apenas mostrar que $(\bigcup \mathscr{F})$ é parcialmente bem ordenado (resp. totalmente ordenado). Seja $X = (\bigcup \mathscr{F})$. Seja H uma parte totalmente ordenada não vazia de E e tal que $H \subset X$. Existe $X_\alpha \in \mathscr{F}$ tal que $H \cap X_\alpha \neq \phi$. Seja a o primeiro elemento $H \cap X_\alpha$. Tem-se que a é também primeiro elemento de H. Com efeito, para todo $x \in H$ existe $X_\beta \in \mathscr{F}$ tal que $X_\alpha \subset^{\#} X_\beta$ e $x \in X_\beta$, pois $\mathscr{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão. Das duas uma: $x \in X_\alpha$ ou $x \in X_\beta - X_\alpha$. Se $x \in X_\alpha$, então $a \underline{\angle} x$. Se $x \in X_\beta - X_\alpha$, então $x \not\angle a$ pois $X_\alpha \subset^{\#} X_\beta$, portanto $a \underline{\angle} x$, pois $a, x \in H$ e H é totalmente ordenado.

Corolário 4. Seja $\mathscr{F}$ um conjunto cujos elementos são partes bem ordenadas de E munido de $\underline{\angle}$. Se $\mathscr{F}$ é filtrante pela $(+)$-inclusão, então $(\bigcup \mathscr{F}) = \underset{+}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F}$ e $(\underset{+}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F})$ é uma parte bem ordenado de E.

8. Teorema de Zorn (2.ª forma). *Seja* $(\mathrm{E}, \underline{\angle})$ *um sistema ordenado tal que tôda parte bem ordenada de* E *possui uma cota superior. Então para todo* $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ *existe um elemento maximal* $\mathrm{m} \in \mathrm{E}$ tal que $\mathrm{w} \underline{\angle} \mathrm{m}$.

Demonstração. Seja $\mathscr{X}_w$ o conjunto formado por tôdas as partes bem ordenadas de E que têm w por cota inferior. Do corolário 4 resulta que $\mathscr{X}_w$ munido de $\subset^{+}$ satisfaz a seguinte condição: se $\mathscr{F} \subset \mathscr{X}_w$ e $\mathscr{F}$ é bem ordenado pela $(+)$-inclusão, então $X = \underset{+}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{F}$ e $X \in \mathscr{X}_w$. Da 1.ª forma do teorema de Zorn resulta que existe $M \in \mathscr{X}_w$ maximal em $\mathscr{X}_w$ munido da $(+)$-inclusão. Logo $M = M \cup \{w\}$ se w fôr cota superior de M. Portanto $M^{+} = \{m\}$ e $m \in N$. Conseqüêntemente $w \underline{\angle} m$ e m é maximal em $(E, \underline{\angle})$.

9. Seja $(E, \underline{\angle})$ um sistema ordenado. Se M e A são partes de E diz-se que M é *cofinal* em A se $M \subset A$ e para cada $a \in A$

existe $w \in M$ tal que $a \leqq w$. Se M fôr cofinal em A, então $M^+ = A^+$ e A admite supremo se, e só se M admite supremo.

LEMA 9. *Para toda parte* A *de* E *existe* M *cofinal em* A *tal que* M *seja parcialmente bem ordenado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{X}_A$ o conjunto das partes parcialmente bem ordenadas contidas em A. Pelo lema 8 e pela 1.ª forma do teorema de ZORN existe um elemento $M \in \mathfrak{X}_A$ maximal em $\mathfrak{X}_A$ munido da ($\#$)-inclusão. Resta apenas, mostrar que M é cofinal em A. Se M não fôsse cofinal em A, então para todo $a \in A - M$ se teria $a \in M^{\#}$, logo $M \cup \{a\}$ seria parcialmente bem ordenado e $M \cup \{a\} \subset A$, porém isto é absurdo visto que M é maximal em $\mathfrak{X}_A$.

Do lema 9 deduz-se:

PROPOSIÇÃO 5. Seja $(E, \leqq)$ um sistema ordenado. As seguintes condições abaixo são equivalentes

(BI) Tôda parte bem ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo);

(TI) Tôda parte totalmente ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo).

OBSERVAÇÃO. Se $X, Y \subset^+ W$, então $X \subset^+ Y$ ou $Y \subset^+ X$. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes de E. Com respeito a ($+$)-inclusão $\mathcal{F}$ é totalmente ordenado se, e só se $\mathcal{F}$ fôr filtrante.

10. Do lema 7, por relativisação, resulta:

COROLÁRIO 5. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e bem ordenada de E admita supremo. Para todo $w \in E$ tal que $w < f(w)$ existe $m \in E$ tal que $w < m$ e $f(m) = m$.

No corolário acima, a hipótese $w < f(w)$ é essencial como mostra o seguinte exemplo: seja $\Delta_E = \{(x, y) | (x, y) \in E \times E$ e $x = y\}$; se f é uma função de E para E a qual não admite ponto fixo, então (E, f, Δ_E) é um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e totatmente ordenada de E admite supremo.

COROLÁRIO 6. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que E seja finito. Se E possui primeiro elemento ou se existe um elemento $w \in E$ tal que $w < f(w)$, então f possui ponto fixo.

Sobre a determinação do contradomínio de certas funções de matrizes

por G. N. de Oliveira
Coimbra

1. Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de matrizes e $\mathcal{F}$ um conjunto arbitrário. Seja $y = f(A)$ uma «função» que toma valores em $\mathcal{F}$ quando A percorre $\mathfrak{S}$. Suporemos que f pode ser multivalente, isto é, que a cada matriz A podem corresponder vários elementos de $\mathcal{F}$.

Designemos por $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ o contradomínio de f, isto é, $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ é o subconjunto de $\mathcal{F}$ definido por

$y \in \mathcal{F}_f(\mathfrak{S}) \Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathfrak{S}$ *tal que* y *é um dos elementos de* $\mathcal{F}$ *que* f *faz corresponder a* **A**.