existe $w \in M$ tal que $a \leqq w$. Se M fôr cofinal em A, então $M^+ = A^+$ e A admite supremo se, e só se M admite supremo.

LEMA 9. *Para toda parte* A *de* E *existe* M *cofinal em* A *tal que* M *seja parcialmente bem ordenado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{X}_A$ o conjunto das partes parcialmente bem ordenadas contidas em A. Pelo lema 8 e pela 1.ª forma do teorema de ZORN existe um elemento $M \in \mathfrak{X}_A$ maximal em $\mathfrak{X}_A$ munido da ($\#$)-inclusão. Resta apenas, mostrar que M é cofinal em A. Se M não fôsse cofinal em A, então para todo $a \in A - M$ se teria $a \in M^{\#}$, logo $M \cup \{a\}$ seria parcialmente bem ordenado e $M \cup \{a\} \subset A$, porém isto é absurdo visto que M é maximal em $\mathfrak{X}_A$.

Do lema 9 deduz-se:

PROPOSIÇÃO 5. Seja $(E, \leqq)$ um sistema ordenado. As seguintes condições abaixo são equivalentes

(BI) Tôda parte bem ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo);

(TI) Tôda parte totalmente ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo).

OBSERVAÇÃO. Se $X, Y \subset^+ W$, então $X \subset^+ Y$ ou $Y \subset^+ X$. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes de E. Com respeito a $(+)$-inclusão $\mathcal{F}$ é totalmente ordenado se, e só se $\mathcal{F}$ fôr filtrante.

10. Do lema 7, por relativisação, resulta:

COROLÁRIO 5. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e bem ordenada de E admita supremo. Para todo $w \in E$ tal que $w < f(w)$ existe $m \in E$ tal que $w < m$ e $f(m) = m$.

No corolário acima, a hipótese $w < f(w)$ é essencial como mostra o seguinte exemplo: seja $\Delta_E = \{(x, y) | (x, y) \in E \times E \text{ e } x = y\}$; se f é uma função de E para E a qual não admite ponto fixo, então (E, f, Δ_E) é um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e totatmente ordenada de E admite supremo.

COROLÁRIO 6. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que E seja finito. Se E possui primeiro elemento ou se existe um elemento $w \in E$ tal que $w < f(w)$, então f possui ponto fixo.

Sobre a determinação do contradomínio de certas funções de matrizes

por G. N. de Oliveira
Coimbra

1. Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de matrizes e $\mathcal{F}$ um conjunto arbitrário. Seja $y = f(A)$ uma «função» que toma valores em $\mathcal{F}$ quando A percorre $\mathfrak{S}$. Suporemos que f pode ser multivalente, isto é, que a cada matriz A podem corresponder vários elementos de $\mathcal{F}$. Designemos por $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ o contradomínio de f, isto é, $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ é o subconjunto de $\mathcal{F}$ definido por

$y \in \mathcal{F}_f(\mathfrak{S}) \Longleftrightarrow \exists A \in \mathfrak{S}$ *tal que* y *é um dos elementos de* $\mathcal{F}$ *que* f *faz corresponder a* **A**.

O problema que aqui nos propomos tratar é o da determinação de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ para várias concretizações de $\mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ e f. Problemas deste tipo têm, ùltimamente, sido tratados por vários autores embora nem sempre se lhes tenha dado esta formulação. Formulações bastante semelhantes podem encontrar-se em [8] e [16]. Vejamos alguns exemplos.

Seja $\mathfrak{S}$ o conjunto das matrizes simétricas reais de ordem n. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das sequências $y = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n; a_1, \cdots, a_n)$ em que os λ_i e a_i são números reais e se supõe que $\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$. Além disso, dois elementos de $\mathcal{F}$ que só difiram pela ordem dos a_i não são considerados distintos. Definamos agora uma função f em $\mathfrak{S}$ e que toma valores em $\mathcal{F}$ do seguinte modo:

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n; a_1, \cdots, a_n) = f(A)$$

se e só se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios de A e $a_1, \cdots, a_n$ são os elementos principais de A. Põe-se agora o problema: determinar o contradomínio desta função.

Sejam $\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n$ os números $a_1, \cdots, a_n$ mas escritos por uma tal ordem que $\overline{a}_1 \geqq \cdots, \geqq \overline{a}_n$. De acordo com Mirsky [14] $y \in \mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ se e só se

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{a}_i \leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \qquad (k = 1, \cdots, n),$$

verificando-se a igualdade para $k = n$.

Graças a este resultado, dado um elemento y de $\mathcal{F}$, podemos sempre decidir se y pertence ou não a $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$.

Seja agora C uma matriz complexa, fixa do tipo $k \times k$. Designemos por $\mathfrak{S}$ o conjunto de todas as matrizes complexas, quadradas, de ordem n $(n > k)$ cuja submatriz contida nas primeiras k linhas e k colunas é C. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os polinómios de coeficientes complexos, de grau n e primeiro coeficiente unitário. Finalmente seja f a seguinte função: se $A \in \mathfrak{S}$, $f(A)$ é o polinómio característico de A. Qual o contradomínio de f? A solução deste problema, que aqui não apresentamos por ser demasiado longa, pode encontrar-se em [20] e [21].

Como estes dois exemplos deixam ver, um sem número de problemas do tipo considerado acima pode ser formulado. Como veremos, muitos deles são extremamente difíceis e então, em vez da determinação de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$, podemos, simplesmente, procurar algumas propriedades deste conjunto. Assim pode-se perguntar: será $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ conexo, convexo, limitado etc., sempre que estas noções tenham sentido em $\mathcal{F}$. Podemos ainda procurar subconjuntos $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ tais que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ ou $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_f(\mathfrak{S}) = \Phi$, onde Φ representa o conjunto vazio, etc.

Em [15] e [16] encontram-se interessantes exposições de problemas deste tipo. Estes dois artigos contêm uma boa parte dos resultados conhecidos na altura em que foram publicados. No presente trabalho concentraremos a nossa atenção nos casos em que $\mathfrak{S}$ é o conjunto das matrizes estocásticas de ordem n ou o conjunto das matrizes duplamente estocásticas da mesma ordem.

2. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $n \times n$ diz-se estocástica se

$$a_{ij} \geqq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \qquad (i, j = 1, \cdots, n).$$

Estas matrizes têm importantes aplicações no Cálculo das Probabilidades. Seja então $\mathfrak{S}$ o conjunto das matrizes estocásticas de ordem n e $\mathcal{F}$ o conjunto dos números complexos. Seja $f(A) =$ um (qualquer) valor próprio de A. Neste caso especial designaremos $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ por M_n. Segue-se pois que $z \in M_n$ se e só se existe uma matriz estocástica de ordem n de que z é uma das raízes características. O problema da determinação de M_n resulta dum outro um pouco mais geral, mas que a este se reduz, posto por KOLMOGOROV em 1937 (veja-se [10]). Se z é raiz característica da matriz estocástica $A = [a_{ij}]$, satisfará um sistema de equações do tipo

$$z x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

com um, pelo menos, dos x_i diferente de zero. Sendo $|x_r| = \max_i |x_i|$, teremos

$$|z| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{rj} \frac{|x_j|}{|x_r|} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{rj} = 1$$

e portanto a região M_n está contida no círculo de centro na origem e raio 1. Este primeiro resultado obteve-se com grande facilidade mas a determinação completa de M_n foi um problema bastante difícil resolvido em 1951 por KARPELEVIČ [9]. Mostrou este autor que M_n é a região limitada pelos pontos do círculo unitário da forma $e^{i 2\pi \frac{a}{b}}$, em que a e b são dois inteiros quaisquer tais que $0 \leq a < b \leq n$, e ainda por certos arcos (de equações complicadas, pelo que as não reproduzimos) ligando aqueles pontos.

Em 1949 SULEĬMANOVA propôs um outro problema de certo modo parecido com este: $\mathfrak{S}$ é o mesmo do problema anterior, $\mathcal{F}$ é o conjunto das sequências $(z_1, \cdots, z_n)$ em que os z_i são números complexos, sendo irrelevante a ordem por que se encontram escritos e $f(A) = (z_1, \cdots, z_n)$ se e só se $z_1, \cdots, z_n$ são os n valores próprios de A.

No seu primeiro artigo sobre o assunto SULEĬMANOVA determinou parte de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$, que neste caso designaremos por $\mathcal{M}_n$, mas o problema continua até hoje sem solução completa.

Uma condição necessária para que $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{M}_n$ tira-se imediatamente. Com efeito, suponhamos que $(z_1, \cdots, z_n) = f(A)$ com $A \in \mathfrak{S}$. Teremos $(z_1^k, \cdots, z_n^k) = f(A^k)$ para qualquer inteiro positivo k. Como o traço de A^k tem de ser não negativo, por A^k não poder ter elementos negativos, teremos

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^k \geq 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Sabe-se que se os z_i forem reais e se $n \leq 4$ aquela condição é também suficiente. Porém para $n > 4$, mesmo que os z_i sejam reais, aquela condição já não é suficiente. Com efeito, não é difícil provar que não existe nenhuma matriz estocástica de 5.ª ordem com as raízes características 1, 1, $-1/2$, $-3/4$, $-3/4$ embora estes números satisfaçam a condição acima. Este exemplo deve-se a H. PERFECT e podem encontrar-se pormenores em [19] e [24].

Em [19] introduzimos um processo para atacar este problema que conduziu a resultados novos com bastante simplicidade. Esse processo baseia-se na transformação L que a seguir definimos.

Seja A uma matriz arbitrária do tipo $n \times n$, X outra matriz do tipo $n \times 1$ e q um número complexo. Prolonguemos A com a coluna $\begin{bmatrix} X \\ q \end{bmatrix}$, à direita e com uma linha de zeros, em baixo. Designemos por B a matriz assim obtida. Seja T uma matriz qualquer não singular do tipo $(n \times 1) \times \times (n+1)$ e

$$B_1 = T B T^{-1}.$$

Representaremos B_1 por $L_T^{\binom{X}{q}}(A)$ e chamar-lhe-emos transformada L de A.

Seja agora $A_1 = [z_1]$ e

$$A_{i+1} = L_{T_i}^{\binom{X_i}{z_{i+1}}}(A_i) \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

em que X_i e T_i são matrizes de tipo conveniente. Claro que as raízes características de A_n são os números $z_1, \cdots, z_n$ (ao passarmos de A_i a A_{i+1} «introduzimos» a raiz característica z_{i+1}) e A_n apresenta-se assim como extremo duma «cadeia»

$$A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n$$

em que A_i é do tipo $i \times i$ e cada matriz é uma transformada L da anterior. A ideia do método é construir A_n e depois investigar em que condições se pode dispor das matrizes X_i e T_i $(i=1, \cdots, n-1)$ por forma que A_n seja estocástica. Uma das dificuldades aparentes do método é o aparecimento da inversa de T_i $(i=1, \cdots, n-1)$ no decorrer do processo. Felizmente foi-nos possível provar que toda a matriz A_n se pode «construir» pelo método acima usando só matrizes T_i do tipo

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \\ \alpha_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & \cdots \alpha_i^{(i)} & 1 \end{bmatrix}$$

e efectuando, por vezes, certas permutações de linhas e as mesmas permutações de colunas em certas matrizes intermédias A_i. A inversa de T_i obtém-se, trocando simplesmente o sinal aos $\alpha_j^{(i)}$ $(j=1, \cdots, i)$. Não é também difícil mostrar que se tomarmos $A_1=[1]$ e as matrizes T_i por forma que

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^{(i)} = 1$$

a matriz A_n é tal que a soma dos elementos de qualquer das suas linhas é 1. Para que seja estocástica só temos, pois, a preocupar-nos com a não negatividade dos seus elementos! A título de exemplo damos uma proposição que se pode obter imediatamente com a transformação L e que tem como consequência quase imediata um outro teorema apresentado em [25] por H. PERFECT com uma demonstração bastante mais complicada.

TEOREMA 1. *Seja* $\mathrm{A} = [\mathrm{a}_{ij}]$ *uma matriz estocástica de ordem* n. *Seja* λ *um número negativo e suponhamos que* A *tem um elemento diagonal,* a_{kk} *por exemplo, tal que* $|\lambda| \leq \mathrm{a}_{kk}$. *É então possível construir uma matriz estocástica* B *de ordem* $\mathrm{n}+1$ *cujas raízes características são as de* A *e o número* λ. *Além disso os primeiros* n *elementos diagonais de* B *coincidem com os correspondentes de* A *à excepção do da linha* k *que é* $\mathrm{a}_{kk}+\lambda$; *o último elemento diagonal de* B *é* 0.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, para fixar ideias, que $k=n$. Seja T a matriz T_i atrás definida para $i=n$ com $\alpha_1^{(n)} = \cdots = \alpha_{n-1}^{(n)} = 0$ e $\alpha_n^{(n)} = 1$. Sendo S uma matriz do tipo $(n+1) \times (n+1)$, $T S T^{-1}$ obtém-se somando à última linha de S a penúltima e depois subtraindo a sua última coluna da penúltima. Seja

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & -\lambda \\ 0 \;\cdots\; 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

em que todos es elementos da última coluna são nulos à excepção dos dois últimos. A matriz $T C T^{-1}$ é a matriz B cuja existência se afirma no teorema.

A transformação L admite uma generalização natural: antes de se achar a transformada mediante T prolongue-se A com uma matriz do tipo $(n+k) \times k$ colocada à direita e preencham-se com zeros os lugares vagos em baixo para que se obtenha uma matriz quadrada. O uso desta generalização da transformação L é de particular utilidade para o estudo da construção de matrizes estocásticas com raízes características complexas. Tanto quanto nós sabemos o primeiro resultado neste caso (para $n > 3$) é o seguinte

Teorema 2. *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz estocástica de ordem* n. *Sejam* p *e* q *números reais e* $i = \sqrt{-1}$. *Suponhamos que* A *tem um menor principal*

$$\begin{bmatrix} a_{rr} & a_{rs} \\ a_{sr} & a_{ss} \end{bmatrix}$$

tal que $|p| \leqq a_{rr}, a_{ss}$ *e* $|q| \leqq a_{sr}, a_{rs}$. *Então a partir de* A *pode construir-se uma matriz estocástica de ordem* $n+2$ *cujas raízes características são as de* A *e ainda os números* $p \pm i q$.

A demonstração do teorema 1 deixa adivinhar a demonstração deste. Para pormenores veja-se [19].

3. Se tanto A como A^T são estocásticas diremos que A é duplamente estocástica. Ter-se-á pois neste caso

$$a_{ij} \geqq 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1$$
$$(i, j = 1, \cdots, n).$$

Se nas definições de M_n e $\mathfrak{M}_n$ substituirmos «matriz estocástica» por «matriz duplamente estocástica» obtemos duas novas regiões que designaremos por D_n e $\mathfrak{D}_n$ respectivamente. Nenhuma destas duas regiões é completamente conhecida embora haja um conhecimento parcial das suas naturezas (veja-se [18]). Claro que

$$D_n \subseteq M_n \quad \text{e} \quad \mathfrak{D}_n \subseteq \mathfrak{M}_n .$$

Uma via que seria interessante explorar seria a da procura de relações entre D_n e M_n por um lado e $\mathfrak{D}_n$ e $\mathfrak{M}_n$ por outro (veja-se [19], Capítulo III).

A transformação L, embora não pareça tão apropriada para o estudo de matrizes duplamente estocásticas como para o de matrizes estocásticas, pode contudo conduzir a resultados de interesse como mostrámos em [19].

4. Chamaremos matriz de permutação a toda a matriz que possa ser obtida da identidade por conveniente permuta de linhas. Em 1946 Birkhoff demonstrou o seguinte

Teorema 3. *Se* A *é uma matriz duplamente estocástica então pode representar-se na seguinte forma*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$$

em que $P_1, \cdots, P_m$ *são matrizes de permutação e* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *são números reais satisfazendo* $\lambda_i \geqq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Pode acerca deste Teorema perguntar-se se há alguma relação entre o número m e a ordem n da matriz, por exemplo. Demonstraram Mirsky e Farahat ([17]) que se pode sempre supor $m \leqq n^2 - 2n + 2$ e que este limite é o melhor possível.

As matrizes duplamente estocásticas têm sido objecto de numerosos estudos sobretudo no que diz respeito às suas propriedades combinatórias. Certos problemas de Análise Combinatória levam à consideração duma função de matriz bastante interessante: o permanente (veja-se [27]). A definição de permanente é muito semelhante à de determinante: adicionem-se todos os termos da matriz; o resultado chama-se permanente. Portanto a diferença entre permanente e determinante consiste em que na formação daquele não se troca o sinal aos termos ímpares. Apesar da semelhança das definições as propriedades são bastante diferentes. Com efeito algumas propriedades do determinante mantêm-se no caso do permanente mas outras, fundamentais, faltam completamente. Por exemplo a regra de LAPLACE mantém-se: o permanente duma matriz é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os permanentes de todos os menores contidos em k linhas (ou colunas) pelos permanentes dos respectivos menores complementares. Ao contrário do determinante, o permanente não é em geral multiplicativo, isto é, em geral tem-se $\operatorname{perm}(AB) \neq \operatorname{perm} A \cdot \operatorname{perm} B$ (onde o símbolo $\operatorname{perm} X$ designa o permanente de X). Como é sabido, se adicionarmos a uma linha (coluna) duma matriz quadrada outra linha (coluna) multiplicada por uma constante o determinante não se altera. Infelizmente isto não é verdade para o permanente o que bastante dificulta o seu cálculo.

Pode também pensar-se se não existirá uma regra uniforme de troca de sinais dos elementos duma matriz de tal modo que se obtenha uma nova matriz cujo determinante seja o permanente da inicial. Se existisse teríamos assim reduzido o estudo do permanente ao do determinante. Porém, para matrizes de ordem superior a dois, PÓLYA mostrou que tal regra não existe (veja-se [12]). Mais do que isso, segundo MARCUS e MINC [11], não existe nenhum operador linear sobre o espaço das matrizes do tipo $n \times n \, (n > 2)$ tal que o permanente da transformada duma matriz seja igual ao determinante da matriz de que se partiu.

Seja agora A uma matriz duplamente estocástica. A partir do Teorema de BIRKHOFF não é difícil provar que $\operatorname{perm} A > 0$. Na realidade sabe-se que se A é duplamente estocástica e tem h valores próprios de módulo 1 então

$$\operatorname{perm} A > \frac{1}{(n-h+1)^{n-h+1}},$$

e se além disso A é indecomponível ter-se-á

$$\operatorname{perm} A \geq \left(\frac{h}{n}\right)^n.$$

A consideração da função permanente conduziu a um famoso problema do tipo mencionado no parágrafo 1: determinar o contradomínio da função $\operatorname{perm} A$ quando A percorre o conjunto de todas as matrizes duplamente estocásticas de ordem n. Prova-se com facilidade que deverá ser $\operatorname{perm} A \leq 1$ e a respeito do limite inferior existe a seguinte conjectura (com mais de 40 anos mas ainda por resolver) devida a VAN DER WAERDEN:

$$\operatorname{perm} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

verificando-se o sinal igual se e só se A é a matriz com todos os elementos iguais a $\dfrac{1}{n}$.

Os principais estudos sobre esta conjectura devem-se a M. MARCUS e seus colaboradores. Dois dos mais interessantes resultados obtidos são os seguintes [13]:

I. Se A_0 minimiza $\operatorname{perm} A$ e se todos os elementos de A_0 são positivos então A_0 é a matriz com todos os elementos iguais a $\dfrac{1}{n}$ (que designaremos por J_n).

II. Se $A \neq J_n$ e A pertence a uma vizinhança suficientemente pequena de J_n ter-se-á

$$\operatorname{perm} A > \operatorname{perm} J_n.$$

De acordo com o primeiro resultado a conjectura de VAN DER WAERDEN ficaria resolvida pela afirmativa se fosse possível provar que para cada matriz duplamente estocástica com alguns elementos nulos existe uma com todos os elementos positivos e permanente inferior. Isso conseguir-se-ia se para cada matriz A com elementos nulos fosse possível construir uma matriz B (ambas duplamente estocásticas) tal que AB tivesse todos os elementos positivos e

$$\operatorname{perm}(AB) < \operatorname{perm} A .$$

Dentro deste contexto talvez valha a pena citar o seguinte resultado de Brualdi [4]:

Se A e B são duas matrizes não negativas (não necessàriamente duplamente estocásticas) ter-se-á

$$\operatorname{perm}(AB) \geqq \operatorname{perm} A \cdot \operatorname{perm} B$$

5. Embora as diferenças entre as propriedades do determinante e do permanente sejam grandes, a importância do polinómio $\det(zE - A)$ (onde E é a identidade da mesma ordem de A) na teoria das matrizes sugere a consideração do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$. Assim Brenner e Brualdi provaram que as raízes de $f(z)$, quando A é uma matriz duplamente estocástica, estão dentro ou sobre a fronteira do círculo $|z| \leqq 1$ [2]. É notável a coincidência com a mesma propriedade das raízes de $\det(zE - A)$.

Como dissemos atrás quando A é duplamente estocástica tem-se $\operatorname{perm} A > 0$ e portanto se n é par será $f(0) > 0$ e se n é ímpar será $f(0) < 0$. A respeito de $f(1)$ mostraram Brualdi e Newman que $f(1) \geqq 0$. Se A é simétrica sabe-se que é com certeza $f(1) > 0$, desde que a matriz não tenha nenhum elemento diagonal igual a 1. Uma outra conjectura ainda pendente é a seguinte:

Se n *é par e* A *(que continuamos a supor duplamente estocástica) é irredutível,* $f(z)$ *não tem raízes reais. Se, sob as mesmas hipóteses a respeito de* A, n *é ímpar,* $f(z)$ *tem uma e uma só raiz real.*

Se nas definições das regiões $M_n, \mathfrak{M}_n, D_n$ e $\mathfrak{D}_n$ substituirmos «raiz característica» por «raiz do polinómio $\operatorname{perm}(zE - A)$» obtemos outras quatro regiões que designaremos respectivamente por $M_n^*, \mathfrak{M}_n^*, D_n^*$ e $\mathfrak{D}_n^*$. Nenhuma destas regiões foi, até agora, determinada.

A consideração do permanente e do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ leva a muitos problemas do tipo exposto no parágrafo 1, envolvendo aquele polinómio ou as suas raízes. Assim pode pôr-se o problema: sob que condições os números $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e $a_1, \cdots, a_n$ podem ser respectivamente as raízes do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ e os elementos diagonais duma matriz real e simétrica A?

Claro que numerosos problemas deste tipo se podem enunciar. Em [22] encontra-se o primeiro resultado nesta direcção com o

Teorema 4. *Para que os números* $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ *e* $a_1, \cdots, a_n$ *possam ser respectivamente as raízes do polinómio* $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ *e os elementos principais duma matriz* A *(qualquer) é necessário e suficiente que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Se esta condição se verifica e tanto os a_i *como os* λ_i *são reais,* A *pode escolher-se real.*

SUMMARY

This is an expository paper where we are concerned with the following problem: let $\mathfrak{S}$ be a set of matrices, $\mathcal{F}$ an arbitrary set and f a function from $\mathfrak{S}$ into $\mathcal{F}$; determine the range of this function. We treated mainly the case in which $\mathfrak{S}$ is the set of stochastic or doubly-stochastic matrices of order n. A survey of some known results is given and attention is called for some up to now unsolved problems.

BIBLIOGRAFIA

[1] Birkhoff, *Tres observaciones sobre el algebra lineal.* Univ. Nac. Tucumán, Rev. Ser. A, **5** (1946), pág. 147-151.

[2] Brenner e Brualdi, *Properties of the permanent function.* Notices of the Am. Math. Soc., **14** (1967), pag. 87.

[3] Brualdi, *Permanent of the product of doubly stochastic matrices.* Proc. Camb. Phil. Soc., **62** (1966), pag. 643-648.

[4] ———, *Permanent of the direct product of matrices.* Pacific J. Math., **16** (1966), pag. 471-482.

[5] Brualdi e Newman, *Proof of a permanental inequality.* Quart. J. Math. Oxford, **17**, 2nd Series, (1966), pag. 234-238.

[6] Brualdi e Wielandt, *A spectral characterization of stochastic matrices.* Aguardando publicação in Linear Algebra and its Applications.

[7] Fiedler, *Relations between the diagonal elements of two mutually inverse positive definite matrices.* Czech. Math. J., **14** (1964), pag. 39-51.

[8] ———, *Matrix Inequalities.* Numerische Math., **9** (1966), pag. 109-119.

[9] Karpelevič, *O harakterističeskih kornjah matricy s neotricatel' nymi èlementami.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Serie Mat., **15** (1951), pag. 361-383.

[10] Kolmogorov, *Markov chains with countably many possible states.* Bull. Univ. Moscow (A), **1**: 3 (1937).

[11] Marcus e Minc, *On the relation between the determinant and the permanent.* Illinois J. Math., **5** (1961), pag. 376-381.

[12] ———, *Permanents.* The Am. Math. Monthly, **72** (1965), pag. 577-591.

[13] Marcus e Newman, *On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix.* Duke Math. J., **26** (1959), pag. 61-72.

[14] Mirsky, *Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements.* J. London Math. Soc., **33** (1958), pag. 14-21.

[15] ———, *Results and problems in the theory of doubly stochastic matrices.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **1** (1963), pag. 319-334.

[16] ———, *Inequalities and existence theorems in the theory of matrices.* J. of Math. Anal. and Appl., **9** (1964), pag. 99-118.

[17] Mirsky e Farahat, *Permutation endomorphisms and refinement of a theorem of Birkhoff.* Proc. Camb. Phil. Soc., **56**, Part 4 (1960), pag. 322-328.

[18] Mirsky e Perfect, *Spectral properties of doubly--stochastic matrices.* Monat. für Math., **69** (1965), pag. 35-57.

[19] Oliveira, *Sobre matrizes estocásticas e duplamente estocásticas.* Tese. Rev. da Fac. de C. da Univ. de Coimbra, **41** (1968), pag. 15-221.

[20] ———, *Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix.* Aguardando publicação in Pacific J. Math.

[21] ———, *Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix — II.* Aguardando publicação.

[22] ———, *A conjecture and some problems on permanents.* Aguardando publicação.

[23] ———, *On a certain system of matrix equations.* Aguardando publicação in Siam Review.

[24] Perfect, *Methods of constructing certain stochastic matrices.* Duke Math. J., **20** (1953), pag. 395-404.

[25] ———, *Methods of constructing certain stochastic matrices — II.* Duke Math. J., **22** (1955), pag. 305-311.

[26] ———, *A lower bound for the diagonal elements of a non-negative matrix.* J. of the London Math. Soc., **31** (1956), pag. 491-493.

[27] Ryser, *Combinatorial Mathematics.* Carus Math. Monograph n.º 14 (1963).

[28] Suleĭmanova, *Stohastičeskie matricy s deĭstvitel'nymi harakterističeskimi čislami.* Doklady Akad. Nauk SSSR, **16** (1949), pag. 343-345.

[29] van der Waerden, Aufgabe 45, Jber. Deutsch Math. Verein, **35** (1926), 117.