With the help of (3. 3) and (3. 4), the result (3. 1) follows immediately.

Formula (3. 2) can be derived with the help of (2. 2) in the same manner.

I am thankful to Principal Dr. S. M. Das Gupta for the facilities he provided to me.

REFERENCES

[1] Erdelyi, A., *Higher Transcendental functions*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Kesarwani, R. N., *Fourier Series for Meijer's G-function*, Compositio Math. **17** (2), 149-151, 1966.

[3] Macrobert, T. M., *Beta-function formulae and integrals involving E-functions*, Math. Annalen **142**, 450-452, 1961.

El operador elasticidad y las transformaciones adiabaticas de los gases perfectos

por *Alberto Sáez* (1) y *José Gallego-Díaz* (2)

Continuando con el estudio y la búsqueda de aplicaciones del operador elasticidad en diversas ramas de la Ciencia, [1], [2], presentamos en esta Nota un ejemplo sencillo de la posibilidad de aplicar el concepto de elasticidad de una función, [3], a las transformaciones adiabáticas de los gases perfectos, obtiniendo diversas expresiones para las capacidades caloríficas molares en función de las elasticidades de la presión y de la temperatura absoluta.

Cálculo de la elasticidad de la presión, respecto del volumen, en una transformación adiabática de un gas perfecto.

Diferenciando la ecuación de estado de los gases perfectos, referida a un mol, se obtiene:

$$d\,T = \frac{p\,d\,V + V\,d\,p}{R} \tag{1}$$

en donde R es la constante universal de los gases perfectos.

La forma diferencial del Primer Principio de Termodinámica, aplicado a un gas perfecto es, [4]:

$$d\,Q = C_v\,d\,T + p\,d\,V \tag{2}$$

en donde C_v es la capacidad calorífica a volumen constante de un mol de gas. Por la propria definición de gas perfecto, C_v es independiente de la temperatura absoluta.

Combinando las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$d\,Q = \frac{C_v + R}{R}\,p\,d\,V + \frac{C_v}{R}\,V\,d\,p \tag{3}$$

En una transformación adiabática (que supondremos reversible) será:

$$(C_v + R)\,p\,d\,V + C_v\,V\,d\,p = 0 \tag{4}$$

Durante la transformación adiabática, la presión es una bien conocida función del volumen, que sería facil de deducir si ello fuera necesario para nuestros fines.

(1) Profesor Titular de la Escuela de Física y Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, Caracas.

(2) Fallecido en Caracas, en febrero de 1965.

Aplicando el operador elasticidad, se obtiene la elasticidad de la presión respecto del volumen que viene expresada, [3], así:

$$(5) \qquad E_v(p) = \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}$$

Conviene advertir que el subíndice se incluye solo para indicar que, en este caso, estamos tomando al volumen como variable independiente. No se trata, pués, de una elasticidad parcial.

Tambien conviene recordar que la elasticidad es un parámetro adimensional, permaneciendo invariante aunque cambiemos las unidades con las que medimos la presión y el volumen.

De (4) se deduce:

$$(6) \qquad E_v(p) = -\frac{C_v + R}{C_v}$$

Definiendo, como en [4]:

$$(7) \qquad \gamma = 1 + \frac{R}{C_v}$$

resulta finalmente:

$$E_v(p) = -\gamma$$

Para los gases perfectos, C_v no depende tampoco de la presión ni del volumen, [5], por lo que será una constante y tambien lo será γ. Por tanto, las transformaciones que nos ocupan son isoelásticas.

Sea C_p la capacidad calorífica a presión constante de un mol de gas perfecto.

Es fácil demonstrar, [4], que se verifica:

$$(9) \qquad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

con lo cual:

$$(9') \qquad E_v(p) = -\frac{C_p}{C_v}$$

Tambien es inmediato ver que de (6) y (9') se deduce la relación de Mayer:

$$C_p - C_v = R$$

Expresiones para las capacidades caloríficas molares.

De la ecución (6) se deduce inmediatamente:

$$(10) \qquad C_v = -R\frac{1}{1 + E_v(p)}$$

y, mediante la ecuación (9'), se obtiene

$$(11) \qquad C_p = R\frac{E_v(p)}{1 + E_v(p)}$$

Tambien podemos considerar, durante la transformación adiabática, que la temperatura absoluta es función del volumen. La elasticidad de la temperatura respecto del volumen podría calcular-se siguiendo un procedimiento paralelo al empleado anteriormente, pero estimamos mas interesante realizarlo haciendo uso de algunas de las reglas operativas del cálculo de elasticidades.

La ecuación de estado de los gases perfectos, referida a un mol, es:

$$(12) \qquad T = \frac{1}{R}pV$$

Apliquemos a los dos miembros el operador elasticidad (respecto de la variable independiente V) y, en virtud de la regla de la elasticidad de un producto de dos funciones, resulta [3]:

$$(13) \qquad E_v(T) = E_v(V) + E_v(p) = 1 + E_v(p) = 1 - \gamma$$

Por consiguiente, se obtienen las siguientes nuevas expresiones de las capacidades caloríficas molares:

(14) $$C_v = -R \frac{1}{E_v(T)}$$

(15) $$C_p = R \frac{E_v(p)}{E_v(T)} = R \frac{E_v(T) - 1}{E_v(T)}$$

Módulo de compresibilidad:

Consideremos una transformación (no necesariamente adiabática) definida por una relación funcional entre la presión y el volumen.

Podemos definir, para dicha transformación, un módulo de compresibilidad en la forma usual:

(16) $$B = -V \frac{dp}{dV}$$

Es evidente que se verifica la relación:

(17) $$B = -p E_v(p)$$

Si se trata de un gas perfecto y la transformación es adiabáticas obtendremos, aplicando (8), la conocida relación:

(18) $$B = \gamma p$$

Observacion: El presente trabajo fué realizado, en su mayor parte, en 1961, en el Instituto de Cálculo Aplicado de la Universidad del Zulia (Maracaibo), cuando el primero de los autores era Director de dicho Instituto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gallego-Diaz, José; *Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales.* Gazeta de Matemática, N.° 50, Lisboa (1951).

[2] Sáez, Alberto y Gallego-Diaz, José; *Nuevos Operadores relacionados con el operador «elasticidad».* Gazeta de Matemática, N.os 88-89 Lisboa (1962).

[3] Rios, Sixto; *Ampliación de Matemáticas.* Madrid (1953), pp. 357 y 359.

[4] Palacios, Julio; *Termodinâmica.* Gráfica Universal. Madrid (1942). pp. 58, 59 y 99.

[5] Palacios, Julio; *Termodinámica Aplicada.* I. N. T. A. Madrid (1951). p. 65.

Primeira pedária positiva duma cónica

por **F. Peres Rodrigues** (*)

Considere-se uma cónica qualquer e um ponto fixo, 0, do seu plano. Sem perda de generalidade no que se vai seguir, pode sempre escolher-se um sistema de eixos ortogonais (x, y) paralelos aos eixos da cónica e com origem no ponto 0.

Neste sistema de eixos, a equação matricial da cónica em coordenadas cartesianas homogéneas escreve-se:

(1) $$f(x,y,t) \equiv [x\, y\, t] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0.$$

A recta genérica tangente à cónica no ponto de coordenadas homogéneas (x, y, t) tem por equação matricial:

(2) $$[x\, y\, t] \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

em que (u, v, w) se podem considerar as suas coordenadas tangenciais homogéneas.

(*) Engenheiro especialista do LNEC, Lisboa.

A comparação de (1) e (2) permite escrever:

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$$

em que k é uma constante finita não nula.

De (3) pode obter-se sucessivamente:

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

e:

$$(5)\qquad [x\, y\, t] = \frac{1}{k} \cdot [u\, v\, w] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1}.$$

A substituição de (4) e (5) em (1) conduz à equação matricial da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(6)\qquad f(u\,,v\,,w) \equiv [u\, v\, w] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

Por definição, a primeira pedária positiva da cónica (1) relativa ao ponto 0, origem das coordenadas, é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas do ponto 0 para as tangentes (2) à cónica[1]. Assim, se se designar por $(x\,,y)$ as coordenadas cartesianas da pedária, deverão verificar-se entre estas coordenadas e as coordenadas tangenciais homogéneas da cónica, as relações:

$$(7)\qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{u} = \frac{x^2+y^2}{u\,x+v\,y} = \frac{-(x^2+y^2)}{w}$$

que mostram ser u, v e w proporcionais respectivamente a x, y e $-(x^2+y^2)$, isto é:

$$\begin{aligned} u &= Kx \\ v &= Ky \\ (8)\qquad w &= -K(x^2+y^2). \end{aligned}$$

A substituição de (8) em (6) permite obter a equação matricial da pedária em coordenadas cartesianas:

$$(9)\qquad F(x\,,y) \equiv [x\, y\, -(x^2+y^2)] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -(x^2+y^2) \end{bmatrix} = 0.$$

Fazendo:

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

a definição de matriz inversa implica, à parte um factor constante que se elimina quando da substituição em (6) ou (9), as seguintes igualdades:

$$(11)\qquad \begin{aligned} a &= CF - E^2 & d &= -CD \\ b &= DE & e &= -AE \\ c &= AF - D^2 & f &= AC. \end{aligned}$$

A substituição de (11) em (6) permite escrever a equação da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(12)\qquad \begin{aligned} f(u\,,v\,,w) \equiv\; & a\,u^2 + 2\,b\,u\,v + c\,v^2 + \\ & + 2\,d\,u\,w + 2\,e\,v\,w + f\,w^2 = 0; \end{aligned}$$

e, a mesma substituição em (9), a equação da pedária em coordenadas cartesianas:

[1] A pedária positiva de ordem n duma curva, relativa a um ponto do seu plano, é, por definição, a primeira pedária positiva da pedária positiva de ordem $n-1$ dessa curva, relativa a esse ponto.

Igualmente se define pedária negativa de ordem n, a partir da primeira pedária negativa dessa curva, relativa a um ponto do seu plano, que é, como se sabe, a envolvente das perpendiculares às extremidades dos raios vectores tirados desse ponto para todos os pontos da curva.

$$(13)\quad \begin{aligned} F(x,y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2(dx+ey)\cdot \\ \cdot (x^2+y^2) + f(x^2+y^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

verificando-se ser esta curva uma cíclica com um ponto duplo na origem.

Se a cónica tiver o centro a distância finita, isto é, for centrada, o parâmetro f definido em (11) não pode ser nulo e a equação (13) da pedária representa uma quártica bicircular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 1

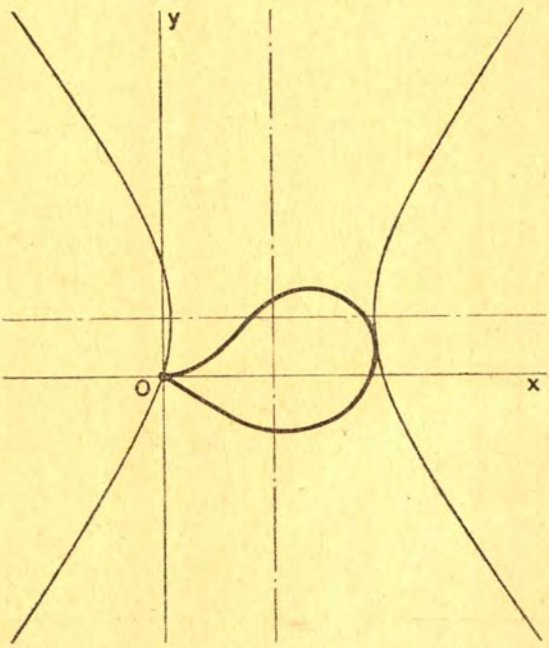

Fig. 1

apresenta-se, como exemplo, a pedária duma hipérbole relativamente a um dos seus pontos [1].

Se a cónica tiver o centro a distância infinita, isto é, se for do género parábola, pode considerar-se, sem perda de generalidade, a sua directriz própria paralela ao eixo dos y e assim, por ser nulo o parâmetro A, as expressões (11) assumem os valores particulares:

$$(14)\quad \begin{array}{ll} a = CF - E^2 & d = -CD \\ b = DE & e = 0 \\ c = -D^2 & f = 0. \end{array}$$

A substituição de (14) em (12) permite escrever a equação da parábola considerada, em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(15)\quad f(u,v,w) \equiv au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw = 0$$

e a substituição de (14) em (13) a equação da pedária correspondente, em coordenadas cartesianas:

$$(16)\quad \begin{aligned} F(x,y) \equiv ax^2 + 2bxy + \\ + cy^2 - 2dx(x^2+y^2) = 0 \end{aligned}$$

que representa uma cúbica circular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 2 apresenta-se como exemplo a pedária duma parábola relativamente a um ponto exterior.

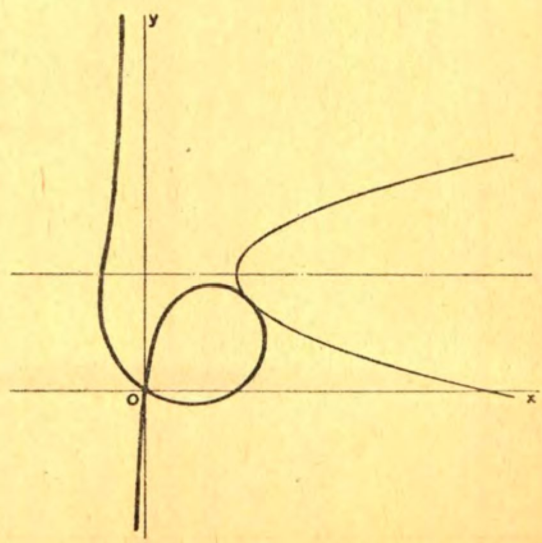

Fig. 2

(1) A discussão do número de pontos comuns à cónica e à pedária e a sua determinação, feita com base no estudo conjunto da cónica, da sua evoluta e da sua hipérbole de Apollónius relativa à origem, saiem fora do âmbito deste artigo.

Os coeficientes angulares m das tangentes à pedária na origem, ponto duplo, obtêm-se a partir das expressões (13) e (16), calculando:

$$(17) \qquad m = \lim_{x,\, y \to 0} \frac{y}{x}$$

resultando de ambas a mesma equação:

$$(18) \qquad c\, m^2 + 2\, b\, m + a = 0 .$$

Por outro lado, as equações das tangentes à cónica tiradas da origem, obtêm-se fazendo em (12) e (15) $w = 0$, vindo indistintamente:

$$(19) \qquad a\, u^2 + 2\, b\, u\, v + c\, v^2 = 0 ;$$

os seus coeficientes angulares são, por definição:

$$(20) \qquad m_1 = -\frac{u}{v}$$

que substituídos em (19) conduzem a:

$$(21) \qquad a\, m_1^2 - 2\, b\, m_1 + c = 0 .$$

A comparação de (18) e (21) mostra que as raízes das duas equações estão ligadas pela relação:

$$(22) \qquad m = -\frac{1}{m_1}$$

o que prova serem as tangentes à pedária no ponto duplo, normais às tangentes tiradas deste ponto à cónica, qualquer que seja o seu género.

Os binómios discriminantes das equações (18) e (21) são iguais e tem por valor:

$$(23) \qquad \delta = b^2 - a\, c$$

podendo, de acordo com as expressões (11) e (14), tomar a forma:

$$(24) \qquad \delta = -F\, \Delta$$

em que Δ é o valor do determinante associado à matriz da cónica (1).

Para $F\,\Delta < 0$ existem duas tangentes reais e distintas, sendo o ponto 0 exterior à cónica e um ponto duplo da pedária (fig. 2), que por ser o cruzamento de dois ramos, se denomina nodo. Para $F = 0$ existem ainda duas tangentes reais mas coincidentes e o ponto 0 pertence simultâneamente à cónica e à pedária, sendo em relação a esta curva, um ponto de reversão de 1.ª espécie ou ceratóide (fig. 1).

Finalmente para $F\Delta > 0$, as duas tangentes tornam-se imaginárias, sendo o ponto 0 interior à cónica e um ponto duplo isolado da pedária (fig. 3).

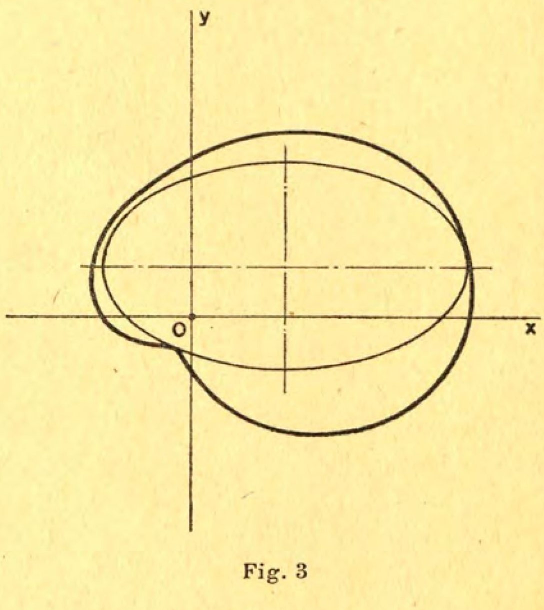

Fig. 3

RESUMO

Deduz-se, a partir da equação matricial duma cónica em coordenadas cartesianas homogéneas, a equação da sua primeira pedária positiva em relação à origem, estu-