(14) $$C_v = -R \frac{1}{E_v(T)}$$

(15) $$C_p = R \frac{E_v(p)}{E_v(T)} = R \frac{E_v(T) - 1}{E_v(T)}$$

Módulo de compresibilidad:

Consideremos una transformación (no necesariamente adiabática) definida por una relación funcional entre la presión y el volumen.

Podemos definir, para dicha transformación, un módulo de compresibilidad en la forma usual:

(16) $$B = -V \frac{dp}{dV}$$

Es evidente que se verifica la relación:

(17) $$B = -p\,E_v(p)$$

Si se trata de un gas perfecto y la transformación es adiabáticas obtendremos, aplicando (8), la conocida relación:

(18) $$B = \gamma p$$

Observacion: El presente trabajo fué realizado, en su mayor parte, en 1961, en el Instituto de Cálculo Aplicado de la Universidad del Zulia (Maracaibo), cuando el primero de los autores era Director de dicho Instituto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gallego-Diaz, José; *Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales*. Gazeta de Matemática, N.º 50, Lisboa (1951).

[2] Sáez, Alberto y Gallego-Diaz, José; *Nuevos Operadores relacionados con el operador «elasticidad»*. Gazeta de Matemática, N.os 88-89 Lisboa (1962).

[3] Rios, Sixto; *Ampliación de Matemáticas*. Madrid (1953), pp. 357 y 359.

[4] Palacios, Julio; *Termodinámica*. Gráfica Universal. Madrid (1942). pp. 58, 59 y 99.

[5] Palacios, Julio; *Termodinámica Aplicada*. I. N. T. A. Madrid (1951). p. 65.

Primeira pedária positiva duma cónica

por **F. Peres Rodrigues** (*)

Considere-se uma cónica qualquer e um ponto fixo, 0, do seu plano. Sem perda de generalidade no que se vai seguir, pode sempre escolher-se um sistema de eixos ortogonais (x, y) paralelos aos eixos da cónica e com origem no ponto 0.

Neste sistema de eixos, a equação matricial da cónica em coordenadas cartesianas homogéneas escreve-se:

(1) $$f(x,y,t) \equiv [x\,y\,t] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0.$$

A recta genérica tangente à cónica no ponto de coordenadas homogéneas (x, y, t) tem por equação matricial:

(2) $$[x\,y\,t] \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

em que (u, v, w) se podem considerar as suas coordenadas tangenciais homogéneas.

(*) Engenheiro especialista do LNEC, Lisboa.

A comparação de (1) e (2) permite escrever:

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$$

em que k é uma constante finita não nula.

De (3) pode obter-se sucessivamente:

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

e:

$$(5)\qquad [x\ y\ t] = \frac{1}{k} \cdot [u\ v\ w] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} .$$

A substituição de (4) e (5) em (1) conduz à equação matricial da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(6)\qquad f(u, v, w) \equiv [u\ v\ w] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 .$$

Por definição, a primeira pedária positiva da cónica (1) relativa ao ponto 0, origem das coordenadas, é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas do ponto 0 para as tangentes (2) à cónica [1]. Assim, se se designar por (x, y) as coordenadas cartesianas da pedária, deverão verificar-se entre estas coordenadas e as coordenadas tangenciais homogéneas da cónica, as relações:

$$(7)\qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{u} = \frac{x^2+y^2}{u\,x + v\,y} = \frac{-(x^2+y^2)}{w}$$

que mostram ser u, v e w proporcionais respectivamente a x, y e $-(x^2+y^2)$, isto é:

$$u = Kx$$
$$v = Ky$$
$$(8)\qquad w = -K(x^2+y^2) .$$

A substituição de (8) em (6) permite obter a equação matricial da pedária em coordenadas cartesianas:

$$(9)\qquad F(x, y) \equiv [x\ y\ -(x^2+y^2)] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -(x^2+y^2) \end{bmatrix} = 0 .$$

Fazendo:

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

a definição de matriz inversa implica, àparte um factor constante que se elimina quando da substituição em (6) ou (9), as seguintes igualdades:

$$(11)\qquad \begin{aligned} a &= CF - E^2 & d &= -CD \\ b &= DE & e &= -AE \\ c &= AF - D^2 & f &= AC. \end{aligned}$$

A substituição de (11) em (6) permite escrever a equação da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(12)\qquad \begin{aligned} f(u, v, w) \equiv\ & a\,u^2 + 2\,b\,u\,v + c\,v^2 + \\ & + 2\,d\,u\,w + 2\,e\,v\,w + f\,w^2 = 0 ; \end{aligned}$$

e, a mesma substituição em (9), a equação da pedária em coordenadas cartesianas:

---

[1] A pedária positiva de ordem n duma curva, relativa a um ponto do seu plano, é, por definição, a primeira pedária positiva da pedária positiva de ordem $n-1$ dessa curva, relativa a esse ponto.

Igualmente se define pedária negativa de ordem n, a partir da primeira pedária negativa dessa curva, relativa a um ponto do seu plano, que é, como se sabe, a envolvente das perpendiculares às extremidades dos raios vectores tirados desse ponto para todos os pontos da curva.

$$(13)\quad F(x,y)\equiv ax^2+2bxy+cy^2-2(dx+ey)\cdot\\ \cdot(x^2+y^2)+f(x^2+y^2)^2=0$$

verificando-se ser esta curva uma cíclica com um ponto duplo na origem.

Se a cónica tiver o centro a distância finita, isto é, for centrada, o parâmetro f definido em (11) não pode ser nulo e a equação (13) da pedária representa uma quártica bicircular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 1

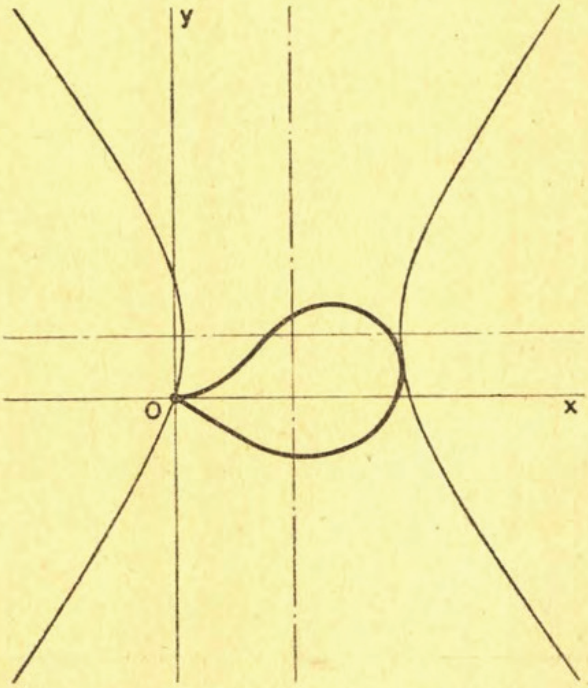

Fig. 1

apresenta-se, como exemplo, a pedária duma hipérbole relativamente a um dos seus pontos [1].

Se a cónica tiver o centro a distância infinita, isto é, se for do género parábola, pode considerar-se, sem perda de generalidade, a sua directriz própria paralela ao eixo dos y e assim, por ser nulo o parâmetro A, as expressões (11) assumem os valores particulares:

$$(14)\qquad \begin{array}{ll} a=CF-E^2 & d=-CD \\ b=DE & e=0 \\ c=-D^2 & f=0. \end{array}$$

A substituição de (14) em (12) permite escrever a equação da parábola considerada, em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(15)\quad f(u,v,w)\equiv au^2+2buv+cv^2+2duw=0$$

e a substituição de (14) em (13) a equação da pedária correspondente, em coordenadas cartesianas:

$$(16)\qquad F(x,y)\equiv ax^2+2bxy+\\ +cy^2-2dx(x^2+y^2)=0$$

que representa uma cúbica circular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 2 apresenta-se como exemplo a pedária duma parábola relativamente a um ponto exterior.

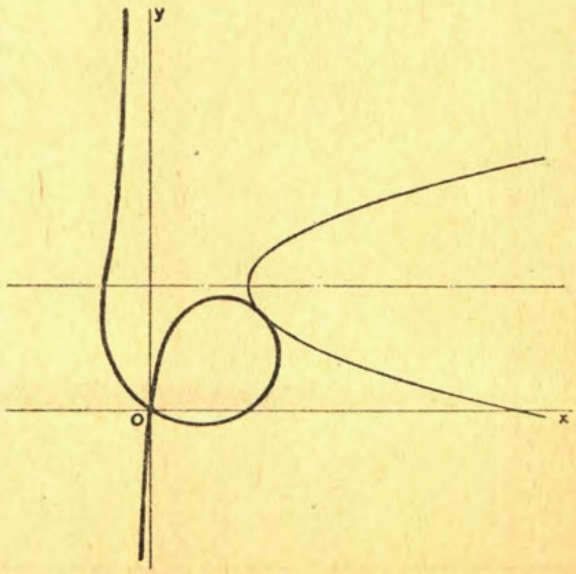

Fig. 2

[1] A discussão do número de pontos comuns à cónica e à pedária e a sua determinação, feita com base no estudo conjunto da cónica, da sua evoluta e da sua hipérbole de Apollónius relativa à origem, saiem fora do âmbito deste artigo.

Os coeficientes angulares m das tangentes à pedária na origem, ponto duplo, obtêm-se a partir das expressões (13) e (16), calculando:

$$(17) \qquad m = \lim_{x,\, y \to 0} \frac{y}{x}$$

resultando de ambas a mesma equação:

$$(18) \qquad c\,m^2 + 2\,b\,m + a = 0\,.$$

Por outro lado, as equações das tangentes à cónica tiradas da origem, obtêm-se fazendo em (12) e (15) $w = 0$, vindo indistintamente:

$$(19) \qquad a\,u^2 + 2\,b\,u\,v + c\,v^2 = 0\,;$$

os seus coeficientes angulares são, por definição:

$$(20) \qquad m_1 = -\frac{u}{v}$$

que substituídos em (19) conduzem a:

$$(21) \qquad a\,m_1^2 - 2\,b\,m_1 + c = 0\,.$$

A comparação de (18) e (21) mostra que as raízes das duas equações estão ligadas pela relação:

$$(22) \qquad m = -\frac{1}{m_1}$$

o que prova serem as tangentes à pedária no ponto duplo, normais às tangentes tiradas deste ponto à cónica, qualquer que seja o seu género.

Os binómios discriminantes das equações (18) e (21) são iguais e tem por valor:

$$(23) \qquad \delta = b^2 - a\,c$$

podendo, de acordo com as expressões (11) e (14), tomar a forma:

$$(24) \qquad \delta = -F\,\Delta$$

em que Δ é o valor do determinante associado à matriz da cónica (1).

Para $F\,\Delta < 0$ existem duas tangentes reais e distintas, sendo o ponto O exterior à cónica e um ponto duplo da pedária (fig. 2), que por ser o cruzamento de dois ramos, se denomina nodo. Para $F = 0$ existem ainda duas tangentes reais mas coincidentes e o ponto O pertence simultâneamente à cónica e à pedária, sendo em relação a esta curva, um ponto de reversão de 1.ª espécie ou ceratóide (fig. 1).

Finalmente para $F\Delta > 0$, as duas tangentes tornam-se imaginárias, sendo o ponto O interior à cónica e um ponto duplo isolado da pedária (fig. 3).

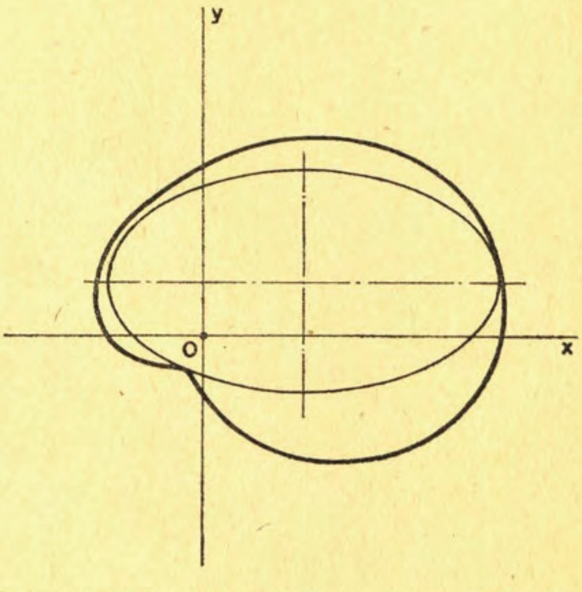

Fig. 3

RESUMO

Deduz-se, a partir da equação matricial duma cónica em coordenadas cartesianas homogéneas, a equação da sua primeira pedária positiva em relação à origem, estudando-se a natureza desta curva em função da natureza da cónica. Estuda-se ainda as características da origem, ponto duplo da pedária, atendendo à sua posição relativamente à cónica.

RESUME

On déduit, basée sur l'équation matricielle d'une conique écrite en coordonnées cartésiennes homogènes, l'équation de sa première podaire positive par rapport à l'origine, et étudie la nature de cette courbe en fonction de la nature de la conique. On étudie aussi les caractéristiques de l'origine, point double de la podaire, prenant en attention sa position par rapport à la conique.

SUMMARY

Based on the matricial equation of a conic in homogeneous cartesian coordinates, the equation of its first positive pedal in relation to the origin is deduced, and the nature of this curve in function of the nature of the conic studied. The characteristics of the origin (double point of the pedal) are also studied taking in account its position in relation to the conic.

Note on Jacobi endomorphisms

by **José Morgado**

Instituto de Matemática,
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. In a recent paper [1], B. M. PUTTASWAMAIAH studied the *Jacobi endomorphisms* of an arbitrary group G, i. e., the endomorphisms σ satisfying the condition

$$(1) \qquad ((a\,b)^\sigma c)^\sigma ((b\,c)^\sigma a)^\sigma ((c\,a)^\sigma b)^\sigma = 1 \quad \text{for all } a, b, c \text{ in } G,$$

a^σ being the image of a under σ and 1 being the neutral element of G.

It is clear that the trivial endomorphism θ defined by $a^\theta = 1$ for every $a \in G$, is a JACOBI endomorphism. A group G which admits a non trivial JACOBI endomorphism is said to be a *Jacobi group*.

Some assertions contained in [1] are not true.

Thus, for instance, it is asserted ([1], Lemma 1) that *a group* G *has a* (non trivial) JACOBI *endomorphism* σ *if and only if*

$$n \mid 2\sigma^2 + \sigma \quad \text{and} \quad a^\sigma b^{\sigma^2} = b^{\sigma^2} a^\sigma \quad \text{for all } a, b \text{ in } G$$

where n *denotes the exponent of* G (i. e., n is the least positive integer such that $x^n = 1$ for every $x \in G$ ([2], p. 108)).

Or this is not true, as one concludes from the following

EXAMPLE 1. Let G be the additive group of all rational numbers and let σ be the endomorphism of G defined by

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2}x \quad \text{for every} \quad x \in G.$$