ANTOLOGIA

Investigações sobre os Fundamentos da Teoria dos Conjuntos, I (*)

por E. Zermelo
Göttingen

A teoria dos conjuntos é o ramo da matemática ao qual incumbe investigar matemàticamente os conceitos fundamentais de número, ordem e função na sua simplicidade primitiva e desenvolver, por esse meio, os os fundamentos lógicos da Aritmética e da Análise. A teoria dos conjuntos constitui portanto uma componente indispensável da ciência matemática. Todavia, actualmente, a própria existência desta disciplina parece justamente ameaçada por certas contradições ou «antinomias» que se podem deduzir dos seus princípios os quais são, na aparência, leis do pensamento. Não se encontrou até ao presente uma solução inteiramente satisfatória para estas contradições. Em particular, em face da «antinomia de RUSSELL» do «conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos» (1) parece hoje já não ser admissível associar a um conceito lògicamente definível arbitrário, um «conjunto» ou «classe» como sua «extensão». A definição original de CANTOR de «conjunto» como «um agrupamento num todo de objectos definidos, bem distintos, da nossa intuição ou do nosso pensamento» (1) carece portanto, em todo o caso, de uma restrição. Não foi, contudo, coroada de êxito nenhuma tentativa de substituir esta definição por outra igualmente simples que não dê lugar a tais inconvenientes. Nestas condições, não temos actualmente outra alternativa que não seja a de percorrer o caminho em sentido inverso e, partindo da «teoria dos conjuntos» històricamente existente, procurar os princípios que são necessários como fundamento a esta disciplina matemática. O problema deve ser resolvido de maneira que os princípios sejam suficientemente restritos por forma a excluir todas as contradições e, por outro lado, suficientemente gerais para que tudo o que é valioso nesta teoria possa ser conservado.

Neste trabalho pretendo mostrar como se pode deduzir de um pequeno número de definições e de sete «Princípios» ou «Axiomas», aparentemente independentes, a totalidade da teoria criada por G. CANTOR e R. DEDEKIND. A ulterior questão, mais filosófica, da origem

---

(*) Tradução da Introdução e do § 1, por A. VAZ FERREIRA, para uma série de lições dedicadas aos fundamentos da teoria dos conjuntos feitas na Faculdade de Ciências de Lisboa ao abrigo do Plano Intercalar de Fomento — 1967. O original, intitulado *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*, foi publicado em 1908, Math. Ann. **65** (1908) pp. 261-281.

(1) B. RUSSELL «The principles of Mathematics» vol. I, pp. 366-368, 101-107.

N. do T.: A «antinomia de RUSSELL» foi descoberta pràticamente ao mesmo tempo por ZERMELO e RUSSELL independentemente um do outro. Porém, ZERMELO não publicou os seus resultados na ocasião.

(1) G. CANTOR, Math. Annalen Bd 46, p. 481.

e do domínio de validade destes princípios não será aqui discutida. Apesar de ser certamente um ponto muito importante, não consegui estabelecer rigorosamente a «não contradição» dos meus axiomas pelo que tive, em vez disso, de me limitar à indicação ocasional de que as «antinomias» conhecidas desaparecem todas se se toma como base os princípios aqui propostos. Espero pelo menos ter feito assim um útil trabalho preparatório para ulteriores investigações, relativas a estes profundos problemas.

Este artigo compreende os axiomas e as suas consequências mais imediatas e uma teoria da equivalência neles baseada a qual permite evitar o uso formal de números cardinais. Está em preparação um segundo artigo que deverá desenvolver conjuntamente a teoria da boa ordenação e suas aplicações aos conjuntos finitos e aos princípios da Aritmética.

§ 1 — Definições fundamentais e axiomas

1. A teoria dos conjuntos diz respeito a um «*domínio* (Bereich)» $\mathfrak{B}$ de objectos que designamos simplesmente por «*coisas* (Dinge)»; alguns destes objectos são conjuntos (Mengen). Quando dois símbolos a e b designam a mesma coisa escrevemos $a = b$; escrevemos $a \neq b$ no caso contrário. Se uma coisa a pertence ao domínio $\mathfrak{B}$, dizemos que a «existe». Deste modo, diremos que «existem coisas numa classe $\mathfrak{K}$» se $\mathfrak{B}$ contém pelo menos um indivíduo desta classe.

2. Entre as coisas do domínio existem certas «*relações fundamentais* (Grundbeziehungen)» da forma $a \varepsilon b$. Quando a relação $a \varepsilon b$ entre duas coisas a e b é válida, dizemos que «a é *elemento* (Element) do conjunto b» ou que «b contém a como elemento» ou ainda que «b possui o elemento a». Se uma coisa b possui como elemento outra coisa a, b é um conjunto. Recìprocamente, salvo um único caso (Axioma II), todo o conjunto possui pelo menos um elemento.

3. Se cada x de um conjunto M é também elemento do conjunto N, i. e. se de $x \varepsilon M$ pode sempre deduzir-se $x \varepsilon N$, dizemos que «M é *subconjunto* (Untermenge) de N» e escrevemos $M \subset N$(¹). Tem-se sempre $M \subset M$ e de $M \subset N$ e $N \subset R$ segue-se sempre $M \subset R$. Dois conjuntos M, N dizem-se «*disjuntos* (Elementenfremd)» se não têm elementos «comuns», i. e., se nenhum elemento de M é simultâneamente elemento de N.

4. Uma questão ou asserção $\mathfrak{E}$ diz-se «*definida* (definit)» se a sua validade ou não validade se pode decidir sem arbitrariedade a partir das relações fundamentais do domínio por meio dos axiomas e das leis lógicas universais. Do mesmo modo, um «predicado (Klassenaussage)» $\mathfrak{E}(x)$, no qual o termo variável x pode tomar como valor qualquer indivíduo de uma classe $\mathfrak{K}$, dir-se-á «definido» se ele é definido *para cada um* dos indivíduos x da classe $\mathfrak{K}$ *separadamente*. Assim, a questão se $a \varepsilon b$ ou não e a questão se $M \subset N$ ou não, são sempre definidas.

As relações fundamentais do nosso domínio $\mathfrak{B}$ estão sujeitas aos «axiomas» ou «postulados» que vão seguir-se.

AXIOMA I — *Se cada elemento de um conjunto* M *é também elemento de* N *e recìprocamente, tendo-se, portanto,* M ⊂ N *e* N ⊂ M

(¹) Este sinal de inclusão foi introduzido por E. SCHRÖDER («Vorslesungen über Algebra der Logik» Bd. I). O sr. G. PEANO e, seguindo-o, B. RUSSELL, WHITEHEAD e outros, utilizam para o mesmo fim o sinal $\supset$.

N. T.: O sinal a que a nota (¹) se refere não é o sinal ⊂ que figura nesta tradução. A tipografia não possui o tipo correspondente ao sinal, semelhante a uma sobreposição de ⊂ e =, que ZERMELO utiliza.

simultâneamente, então M = N. *Abreviadamente: cada conjunto é determinado pelos seus elementos.*

(Axioma da Determinação (Bestimmtheit)) (*)

O conjunto que contém exactamente os elementos a, b, c, ..., r será designado muitas vezes, de maneira abreviada, por $\{a, b, c, \ldots, r\}$.

Axioma II — *Existe um conjunto (impróprio), o* «conjunto vazio *(Nullmenge)*» 0, *que não possui elementos. Se* a *é uma coisa do domínio, existe um conjunto* $\{a\}$ *cujo único elemento é* a. *Se* a, b *são duas coisas do domínio, existe um conjunto* $\{a, b\}$ *cujos elementos são precisamente* a *e* b.

(Axioma dos Conjuntos Elementares (Elementarmengen))

5. Segundo 1 os «conjuntos elementares» $\{a\}$ e $\{a, b\}$ são sempre unìvocamente determinados pelos seus elementos e existe um só «conjunto vazio». A questão se $a = b$ ou não é sempre definida (N.º 4) visto ser equivalente à questão se $a \varepsilon \{b\}$ ou não.

6. O conjunto vazio é subconjunto de cada conjunto M, $0 \subset M$; um subconjunto de M distinto de M e de 0 dir-se-à uma «*parte* (Teil)» de M. Os conjuntos 0 e $\{a\}$ não possuem partes.

Axioma III — *Se o predicado* $\mathfrak{E}(x)$ *é definido para cada elemento de um conjunto* M, M *possui um subconjunto* $M_{\mathfrak{E}}$ *que é constituído precisamente pelos elementos* x *de* M *para os quais* $\mathfrak{E}(x)$ *é verdadeiro.*

(Axioma da Selecção (Aussonderung))

[Por permitir amplamente a definição de novos conjuntos, este axioma III constitui, em certa medida, um substituto para a definição geral de conjunto citada na introdução e rejeitada por ser insustentável. O axioma distingue-se da definição pelas limitações que passamos a indicar. Em primeiro lugar, por meio deste axioma nunca é possível *definir* conjuntos de *maneira independente* mas sòmente como subconjuntos obtidos por *selecção* a partir de conjuntos prèviamente dados. Ficam por isso excluídas construções contraditórias tais como «o conjunto de todos os conjuntos» ou «conjunto de todos os números ordinais» e também os «paradoxos ultrafinitos» segundo a expressão do sr. G. Hessenberg («Grundbegriffe der Mengenlehre» XXIV). Em segundo lugar, como o critério definidor $\mathfrak{E}(x)$ tem de ser «definido» no sentido que precisàmos no n.º 4, i. e. como, para todo elemento x de M, a validade ou não validade de $\mathfrak{E}(x)$ tem de ser determinada (exclusivamente) a partir das «relações fundamentais» do domínio, são igualmente suprimidos pelo nosso ponto de vista critérios tais como «definível por meio de um número finito de palavras» e com eles a «antinomia de Richard» ou o «paradoxo da designação finita» (Hessenberg, loc. cit. XXIII, cf., por outro lado, J. König, Math. Ann. Bd. 61, p. 156). Isto implica também que, em rigor, antes de cada aplicação do nosso axioma III se deve sempre demonstrar que o respectivo critério $\mathfrak{E}(x)$ é «definido». Assim sucederá no que se segue todas as vezes que isso não seja inteiramente evidente.]

7. Se $M_1 \subset M$, M possui um subconjunto $M - M_1$ designado por «*(conjunto) complementar* (Komplementärmenge) de M_1» e constituído precisamente pelos elementos de M que *não* são elementos de M_1. O conjunto complementar de $M - M_1$ é M_1.

O complementar de $M_1 = M$ é o conjunto

(*) N. do T.: Este axioma é conhecido também por «axioma da extensionalidade».

vazio 0 e o complementar de cada «parte» de M (n.º 6) é ainda uma «parte» de M.

8. Se M e N são dois conjuntos, os elementos de M que são simultâneamente elementos de N, constituem acordo com III um subconjunto D de M, o qual é também subconjunto de N e agrupa os elementos *comuns* a M e N. Este conjunto D será chamado «componente comum (gemeinsame Bestandteil)» ou «*intersecção* (Durchschnitt)» de M e N, e designado por $[M, N]$.

Se $M \subset N$, $[M, N] = M$ e se $N = 0$ ou se M e N são «disjuntos» (n.º 3), $[M, N] = 0$.

9. Do mesmo modo, dados vários conjuntos $M, N, R, \ldots$, existe uma «intersecção» $D = [M, N, R, \ldots]$. Seja T um conjunto qualquer cujos elementos são também conjuntos, segundo III a cada coisa a corresponde então um certo subconjunto $T_a \subset T$ constituído pelos elementos de T dos quais a é elemento. Está por conseguinte definido para cada a, se $T_a = T$ ou não, isto é, se a é (ou não) elemento comum a todos os elementos de T, por forma que, sendo A um elemento qualquer de T, os elementos a de A tais que $T_a = T$ constituem um subconjunto D de A que agrupa todos estes elementos comuns. Este conjunto D será chamado «intersecção dos elementos de T» e designado por $\mathfrak{D}T$. Se os elementos de T não possuem elementos comuns é $\mathfrak{D}T = 0$; isto sucede, p. ex., sempre que um elemento de T é vazio ou não é um conjunto.

10. Teorema. *Cada conjunto* M *possui pelo menos um subconjunto* M_0 *que não é elemento de* M.

Demonstração. Para cada elemento x de M, está definido se $x \varepsilon x$ ou não (a possibilidade de se ter $x \varepsilon x$ não é, em princípio, excluída pelos nossos axiomas). Seja então M o subconjunto de M que, de acordo com III, contém os elementos de M para os quais $x \varepsilon x$ não tem lugar; M_0 não pode ser elemento de M. Com efeito, tem-se $M_0 \varepsilon M_0$ ou *não* $M_0 \varepsilon M_0$. Se a primeira destas alternativas fosse válida, M_0 possuiria um elemento $x = M$ tal que $x \varepsilon x$ o que está em contradição com a definição de M_0. Tem-se, pois, seguramente *não* $M_0 \varepsilon M_0$ e, por conseguinte, se M_0 fosse elemento de M, M_0 seria também elemento de M_0, o que foi agora mesmo excluído.

Conclui-se do teorema que as coisas x do domínio $\mathfrak{B}$ não podem ser elementos de um mesmo conjunto o que significa que o *domínio* $\mathfrak{B}$ não é um conjunto; fica assim afastada pelo nosso ponto de vista a «antinomia de Russell».

Axioma IV. *A cada conjunto* T *está associado um conjunto* $\mathfrak{U}$T (*o* «conjunto potência (*Potentzmenge*)» *de* T) *cujos elementos são precisamente os subconjuntos de* T.

(*Axioma do Conjunto Potência (Potentzmenge)*)

Axioma V. *A cada conjunto* T *está associado um conjunto* $\mathfrak{S}$T (*o* «conjunto reunião (*Vereinigungsmenge*)» *de* T) *cujos elementos são precisamente os elementos dos elementos de* T.

(*Axioma da Reunião (Vereinigung)*)

11. Se nenhum elemento de T é distinto de 0, tem-se naturalmente $\mathfrak{S}T = 0$. Se $T = \{M, N, R, \cdots\}$ onde $M, N, R, \cdots$ são conjuntos, escreve-se também $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ e chama-se a $\mathfrak{S}T$ a «*soma* (Summe) dos conjuntos $M, N, R \cdots$», independentemente do facto de eles possuirem ou não elementos comuns. Tem-se sempre $M = M + 0 = M + M = M + M + M + \cdots$.

12. A «adição (Addition)» de conjuntos acabada de definir gosa das propriedades «comutativa» e «associativa»:

$$M+N=N+M, M+(N+R)=(M+N)+R.$$

Finalmente, é válida para a «soma» e «intersecção» (N.º 8) a lei «distributiva», na dupla forma

$$[M+N, R]=[M, R]+[N, R]$$

$$[M, N]+R=[M+R, N+R].$$

A demonstração faz-se utilizando I, e consiste em mostrar que cada elemento do conjunto do primeiro membro é simultâneamente elemento do conjunto que figura no segundo membro e reciprocamente (1).

13. *Introdução do Produto.* Seja M um conjunto não vazio e a um elemento qualquer de M; a questão se $M=\{a\}$ ou não, é definida de acordo com o n.º 5. *Por conseguinte, a questão se um dado conjunto possui um e um só elemento ou não, é sempre definida.*

Seja então T um conjunto cujos elementos $M, N, R, \cdots$ são conjuntos disjuntos dois a dois, e S_1 um subconjunto qualquer da sua reunião $\mathfrak{S}T$. É então definida, para cada elemento M de T, a questão se a intersecção $[M, S_1]$ possui um único elemento ou não. Deste modo, os elementos de T que têm em comum com S_1 precisamente um elemento constituem um certo subconjunto T_1 de T e é definida a questão se $T_1=T$ ou não. Os subconjuntos $S_1 \subset \mathfrak{S}T$ que têm em comum com cada elemento de T exactamente um elemento, constituem, pois, segundo III, um conjunto $\mathfrak{P}T$ que (atendendo a III e IV) é um subconjunto de $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ e será designado por «conjunto *enlace* (Verbindungsmenge) de T» ou por «*produto* (Produkt) dos conjuntos $M, N, R, \cdots$ (de T)». Se $T=\{M, N\}$ ou $T=\{M, N, R\}$, escreve-se abreviadamente $\mathfrak{P}T=MN$ ou $\mathfrak{P}T=MNR$.

Para garantir que *um produto de vários conjuntos só é vazio se algum dos factores é vazio,* necessitamos de outro axioma.

Axioma VI. *Se* T *é um conjunto cujos elementos são conjuntos não vazios e mùtuamente disjuntos, a sua reunião,* $\mathfrak{S}$T *possui pelo menos um subconjunto* S_1 *que tem em comum com cada elemento de* T *exactamente um elemento.*

(*Axioma da Escolha* (*Auswahl*))

Pode exprimir-se o conteúdo deste axioma dizendo que é sempre possível *escolher* de cada elemento $M, N, R, \cdots$ de T, um elemento $m, n, r, \cdots$, respectivamente, e agrupar estes elementos num conjunto S_1 (1).

[Os axiomas já mencionados são suficientes, como veremos, para deduzir todos os teoremas essenciais da teoria geral dos conjuntos. Porém, para assegurar a existência de conjuntos «infinitos» («unendlicher» Mengen) necessitamos ainda do seguinte axioma que, no que respeita ao essencial, é devido ao sr. R. Dedekind (2).]

(1) A teoria completa desta «adição» e desta «multiplicação (Multiplication)» encontra-se em «Algebra der Logik» Bd. I de E. Schröder.

(1) Sobre a legitimidade deste axioma, cf. o meu artigo Math. Ann. Bd. 65, p. 107-128 em cujo § 2, p. 111 e seguintes, é discutida a literatura relativa a este assunto.

(2) «Was sind und was sollen die Zahlen?» N.º 66. A «demonstração» deste Princípio feita pelo sr. Dedekind a partir da existência do «conjunto de todas as coisas pensáveis», não pode satisfazer visto que, do nosso ponto de vista, o domínio $\mathfrak{B}$ *não* é um conunto (N.º 10).

AXIOMA VII. *No domínio existe pelo menos um conjunto* Z *que contém* 0 *e que, além disso, contém com cada elemento* a *o correspondente conjunto* $\{a\}$.

(*Axioma do Infinito (des Unendlichen)*)

14$_{\text{VII}}$ (1). Seja Z um conjunto nas condições de VII; a questão se Z_1 possui a mesma propriedade que Z ou não, é definida para cada subconjunto Z_1 de Z. Com efeito, para cada $a \varepsilon Z_1$, a questão se $\{a\} \varepsilon Z_1$ ou não é definida, e os elementos a de Z_1 tais que $\{a\} \varepsilon Z_1$ constituem um subconjunto Z_1' de Z_1 para o qual é definido se $Z_1' = Z_1$ ou não. Deste modo, os subconjuntos Z_1 de Z que possuem a referida propriedade são elementos de um conjunto $T \subset \mathfrak{U} Z$ e a sua intersecção (N.º 9) $Z_0 = \mathfrak{D} T$ gosa ainda da mesma propriedade. Com efeito, por um lado, 0 é um elemento comum a todos os elementos Z_1 de T e, por outro lado, se a é um elemento comum a todos estes Z_1, $\{a\}$ também é elemento comum a todos eles, sendo portanto igualmente elemento de Z_0.

Seja agora Z' um conjunto qualquer possuindo a propriedade em referência; a Z' está também associado um subconjunto mímimo Z_0' gosando da mencionada propriedade, tal como a Z estava associado Z_0. Porém, a intersecção $[Z_0, Z_0']$ que é subconjunto de Z e Z' possui necessàriamente a propriedade em questão e contém então Z_0 por ser subconjunto de Z e Z_0' por ser subconjunto de Z_0. Tem-se, por conseguinte, atendendo a I, $[Z_0, Z_0'] = Z_0 = Z_0$ e, portanto, Z_0 *é subconjunto de todos os possíveis conjuntos* Z, não sendo necessário para tirar esta conclusão supor que esses conjuntos Z constituem um conjunto. O conjunto Z_0 possui os elementos $0, \{0\}, \{\{0\}\}$, etc. e pode ser designado por «sucessão natural (Zahlenreihe)» visto que os seus elementos podem ser interpretados como correspondendo aos numerais (*). Z_0 constitui o exemplo mais simples de um conjunto «infinito numerável (abzählbar unendlichen)» (N.º 36).

Nota: Não traduzimos o § 2 (e último) do artigo de ZERMELO, intitulado «Teoria da Equivalência (Theorie der Äquivalenz)», por ter menos interesse como documento para ilustrar estas lições dedicadas aos fundamentos da teoria dos conjuntos.

ZERMELO define uma noção de equivalência (Äquivalenz) entre conjuntos à custa de uma noção prévia de aplicação (injectiva) de um conjunto M sobre um conjunto N disjunto de M (Abbildung von M auf N) e deduz em seguida alguns teoremas que tornariam fácil reconstituir a parte mais significativa da teoria de CANTOR dos números cardinais. Entre estes teoremas figura o teorema de CANTOR (que relaciona a cardinalidade de um conjunto com a cardinalidade do conjunto das partes desse conjunto) e um *princípio geral da escolha* que permite levantar no Axioma VI a restrição que exige que os elementos de T sejam disjuntos.

O artigo tem anexa a data «Chesières, 30 de Julho de 1907».

---

(1) Os índices VI ou VII apostos ao n.º de um teorema exprimem que o axioma VI ou o axioma VII intervém explícita ou implìcitamente na dedução.

(*) *N. do T.:* — No texto figura «Zahlzeichen» cujo significado literal é «algarismo». Naturalmente a tradução literal não corresponde neste caso à ideia do autor. Optámos pela expressão «numeral», tomando esta palavra como designação de «número natural no sentido intuitivo ou primitivo».