MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 10-2-1967.

I

5671 — 1) Formalize o argumento seguinte e estude a sua validade:

«Se o mercado é livre, um só vendedor não pode influenciar os preços. Se um só vendedor não pode influenciar os preços, então existe um grande número de vendedores. Existe um grande número de vendedores. Logo, o mercado é livre».

2) Considere um conjunto $U = \{a, b, c, \cdots\}$ e uma relação binária S nele definida, satisfazendo aos axiomas:

A. 1 $a S b \Rightarrow a \neq b$
A. 2 $2a S b \wedge b S c \Rightarrow a S c$.

Demonstre o seguinte teorema:

T. 1 $a S b \Rightarrow b \tilde{S} a$.

Se U for o conjunto dos pontos de uma recta, como pode definir S para que se obtenha uma concretização da axiomática? Justifique.

R: 1) *Fazendo*

p = *o mercado é livre*
q = *um só vendedor não pode influenciar os preços*
r = *existe um grande números de vendedores*

o argumento pode formalizar-se do modo seguinte:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \underline{r \qquad} \\ \therefore p \end{array}$$

O argumento é inválido porque de $p \Rightarrow q$ *e* $q \Rightarrow r$ *pode concluir-se* $p \Rightarrow r$ *mas de* $p \Rightarrow r$ *e* r *não é legítimo deduzir* p.

2) *Para provar* T. 1 *pode seguir-se o método de demonstração por redução ao absurdo. Supondo que se tem simultâneamente* $a S b$ *e* $b S a$, *o axioma* A. 2 *permite concluir que* $a S a$ *e o axioma* A. 1 *conduz à contradição* $a \neq a$. *Logo,* $a S b \Rightarrow b \tilde{S} a$.

Sendo P *e* Q *pontos de uma recta a relação* S *pode ser «*P *está à esquerda de* Q*».*

II

5672 — 1) Seja $A = \left\{x \in R : x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\}$, onde m e n designam números naturais.

a) Ache $\inf A$ e $\sup A$. O conjunto A tem máximo e mínimo? Porquê?

b) Mostre que os números $1/n$ e o $\inf A$ são pontos de acumulação de A. O conjunto A é fechado? Porquê?

2) Calcule $\lim_{n=\infty} (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n}$.

R: 1) a) $\inf A = 0$, $\sup A = 2$. *O conjunto* A *tem o máximo* $x = 2$ *mas não possui mínimo.*

b) $\lim_{m=\infty} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ *e* 0 *é ponto de acumulação dos números* $1/n$. *O conjunto* A *não é fechado porque* $0 \notin A$.

2) *Como*

$$\lim_{n=\infty} \log (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log (e^{1/n^3} - 1) =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log \frac{\xi}{n^3}, \text{ com } \xi \to 1, \text{ e}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log \frac{\xi}{n^3} = \lim_{n=\infty} \frac{\log \xi}{\log n} - 3 = -3,$$

tem-se

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n} = e^{-3}.$$

III

5673 — 1) Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}.$$

2) Mostre que o critério de razão não esclarece a natureza da série $\Sigma\, a_n$, onde $a_{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ e $a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, mas que o critério da raiz permite concluir que ela é convergente.

R: 1) *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ *tem a soma* $S = -\frac{1}{4}$ *e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ *tem a soma* $S' = \frac{3}{4}$. *Logo a serie proposta tem a soma* $S - S' = -1$.

2) $\rho_{2n-1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{3} < 1$ *e* $\rho_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2 > 1$ *e portanto o critério da razão não permite esclarecer a natureza da série. Como*

$$r_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2n-1}} \to \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$r_{2n} = \sqrt[2n]{a_{2n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \to \sqrt{\frac{2}{3}},$$

tem-se $\lim r_n = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ *e portanto a série converge.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência — 2.ª chamada — 17-2-67.

I

5674 — 1) Utilize a demonstração condicional para provar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \vee r) \\ q \Rightarrow \sim p \\ s \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow \sim s \end{array}$$

2) Utilize a álgebra dos conjuntos para simplificar a expressão:

$$[(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim C)] \cap (A \cap \sim C).$$

R: 1) *Tem de se provar então que*

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \vee r) \\ q \Rightarrow \sim p \\ s \Rightarrow \sim r \\ p \\ \hline \therefore\ \sim s \end{array}$$

Com efeito,

1.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	*Prem.*
2.	$q \Rightarrow \sim p$	*Prem.*
3.	$s \Rightarrow \sim r$	*Prem.*
4.	p	*Prem. adic.*
5.	$q \vee r$	1,4 *modus ponens*
6.	$p \Rightarrow \sim q$	2, *Equiv.*
7.	$n \Rightarrow \sim s$	3, *Equiv.*
8.	$\sim q$	4,6 *modus ponens*
9.	r	5,8 *silogismo disjuntivo*
10.	$\sim s$	7,9 *modus ponens.*

2) $[(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim C)] \cap (A \cap \sim C) =$
$= [(A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C)] \cup [(B \cap \sim C) \cap (A \cap \sim C)] =$
$= [(A \cap \sim C) \cap \sim B] \cup [(A \cap \sim C) \cap B] =$
$= (A \cap \sim C) \cap (\sim B \cup B) =$
$= (A \cap \sim C) \cap U =$
$= A \cap \sim C.$

II

5675 — 1) Designe R o conjunto dos números reais e sejam x e y números reais quaisquer. Definam-se os números: *a*) $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$; *b*) $d_2(x, y) = 2|x - y|$; *c*) $d_3(x, y) = \inf\{2, |x - y|\}$. Quais dos números d_1, d_2 e d_3 definem distâncias no conjunto R? Justifique a resposta.

2) Calcule $\lim_{n=\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1}$.

R: 1) d_2 *e* d_3 *satisfazem à axiomática da distância.*

2) $$\lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1} = \lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n} \log a} - 1} = \lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\xi \log a},$$

com $\xi \to 1$. *Portanto,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1} = \frac{1}{log\, a}.$$

III

5676 — 1) Sendo Σa_n e Σb_n séries de termos não-negativos, demonstre que a condição $h \leqq a_n / b_n \leqq k$, onde h e k designam números positivos, implica que as séries são da mesma natureza.

2) Determine o intervalo de convergência absoluta da série

$$\sum \left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^{n^2} (x-1)^n.$$

R: 1) *De* $h \leqq a_n / b_n$ *vem* $h\, b_n \leqq a_n$ *donde se conclui que*

$$\Sigma a_n C \Longrightarrow \Sigma b_n C.$$
$$\Sigma b_n D \Longrightarrow \Sigma a_n D.$$

De $a_n / b_n \leqq k$ *vem* $a_n \leqq k\, b_n$ *donde se tira*

$$\Sigma a_n D \Longrightarrow \Sigma b_n D.$$
$$\Sigma b_n C \Longrightarrow \Sigma a_n C.$$

Em resumo,

$$\Sigma a_n C \Longleftrightarrow \Sigma b_n C.$$
$$\Sigma a_n D \Longleftrightarrow \Sigma b_n D.$$

2) *Como*

$$\overline{lim} \sqrt[n]{\left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^{n^2}} = \overline{lim} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^n = \sqrt{e},$$

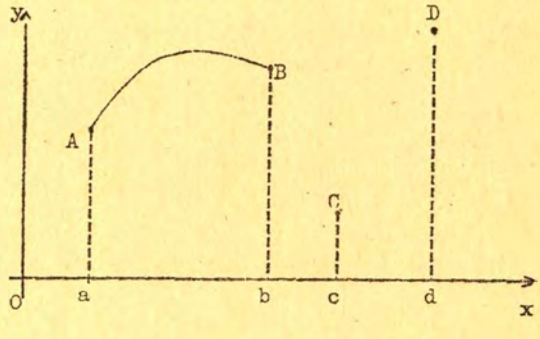
o intervalo de convergência absoluta é

$$]1 - 1/\sqrt{e},\ 1 + 1/\sqrt{e}\,[.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação (1.ª chamada) — 12-6-1967.**

I

5677 — 1) Considere a função $y = f(x)$ com o domínio $X = [a, b] \cup \{c\} \cup \{d\}$ e cuja imagem se apresenta na figura junta. Resolva os problemas seguintes:



a) Diga qual é o contradomínio $f(X)$.

b) Mostre que $f(x)$ é contínua em X e verifique os teoremas de Dini e Weierstrass.

c) Pode-se calcular $f'(c)$ e $f'(d)$? Porquê?

d) Quais são os extremos locais de $f(x)$? E os extremos absolutos? Justifique.

2) Calcule $P \log(x^2 + x + 1)$.

R: 1) a) *Seja* $e \in]a, b[$ *o ponto onde* $f'(e) = 0$. *O contradomínio é* $f(X) = \{f(c)\} \cup [f(a), f(e)] \cup \{f(d)\}$.

b) *A imagem de* $f(x)$ *mostra que a função é contínua em* $[a, b]$ *ou seja em todos os pontos de acumulação de* X. *A verificação do teorema de Dini é imediata pois o contradomínio* $f(X)$ *é conjunto fechado limitado; para o teorema de Weierstrass basta notar que o mínimo absoluto é* $f(c)$ *e o máximo absoluto é* $f(d)$.

c) *Não, porque* c *e* d *são pontos isolados em* X.

d) *Os extremos locais são: mínimos* — $f(a)$ e $f(b)$
máximo — $f(e)$

De acordo com a definição de extremo local $f(c)$ *e* $f(d)$ *também são extremos locais (máximos ou mínimos). O mínimo absoluto é* $f(c)$ *e o máximo absoluto* $f(d)$.

2) $P\, log(x^2 + x + 1) =$

$$= x\, log(x^2 + x + 1) - P \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 1} =$$

$$= x\, log(x^2 + x + 1) - P \left(2 - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\right)$$

$$= x\, log(x^2 + x + 1) - 2x + P \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= x\, log(x^2 + x + 1) - 2x + P \frac{(x + 1/2) + 3/2}{(x + 1/2)^2 + 3/4}$$

$$= x\, log(x^2 + x + 1) - 2x + \frac{1}{2} P \frac{2(x + 1/2)}{(x + 1/2)^2 + 3/4} +$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}\,P\,\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=x\,log\,(x^2+x+1)-2x+\frac{1}{2}\,log\,[(x+1/2)^2+3/4]+$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

II

5678 – 1) Considere a função $F(x)$ tal que $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}_{(a)}=0$ e sejam L e l, respectivamente, o supremo e o ínfimo de $F^{(n)}_{(x)}$ em $[a,b]$. Mostre que

$$\frac{l\,(x-a)^n}{n!}\leq F(x)\leq\frac{L\,(x-a)^n}{n!}\quad(a\leq x\leq b).$$

2) Calcule $\lim\limits_{x=0}\dfrac{x^3\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}-x+log\,(1+x)}{x^2\cos x}$

R: 1) *Pela fórmula de Taylor vem*

$$F(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}\,F^{(n)}\,[a+\theta_n\,(x-a)].$$

Com $a\leq x\leq b$ *e atendendo a que*

$$l\leq F^{(n)}\,[a+\theta_n\,(x-a)]\leq L$$

vem imediatamente o resultado.

2) $$\lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2}-x+log\,(1+x)}{x^2\,cos\,x}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2}-x+x-\lambda\,x^2}{x^2\,cos\,x}$$

com $lim\,\lambda=1/2$. *Então*

$$\lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2}-x+log\,(1+x)}{x^2\,cos\,x}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{x\,sen\,\frac{1}{x^2}-\lambda}{cos\,x}=-1/2.$$

III

5679 – 1) Qual é o campo de existência de $f(x,y,z)=\dfrac{x^2-y^2-2z^2}{2x^2+y^2+3z^2}$? Calcule os limites sobrepostos para $f(x,y,z)$ no ponto $P(0,0,0)$. Existe $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}}f(x,y,z)$? Porquê?

2) Se o sistema de equações lineares $AX=B$ possui duas soluções distintas X_1 e X_2, prove que $a\,X_1+(1-a)\,X_2$ também é solução, qualquer que seja a. Serve este resultadc pasa mostrar que, tendo $AX=B$ duas soluções distintas, existe uma infinidade de soluções? Porquê?

R: 1) *O campo de exiitência é* $R^3-\{P\}$.

$$\lim_{x=0}\lim_{y=0}\lim_{z=0}f(x,y,z)=1/2$$
$$\lim_{x=0}\lim_{z=0}\lim_{y=0}f(x,y,z)=1/2$$
$$\lim_{y=0}\lim_{x=0}\lim_{z=0}f(x,y,z)=-1$$
$$\lim_{y=0}\lim_{z=0}\lim_{x=0}f(x,y,z)=-1$$
$$\lim_{z=0}\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y,z)=-2/3$$
$$\lim_{z=0}\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y,z)=-2/3$$

Não existe $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}}f(x,y,z)$ *porque os limites sobrepostos não são todos iguais.*

2) *Como* $A\,X_1=B$ *e* $A\,X_2=B$, *vem*

$$A\,[a\,X_1+(1-a)\,X_2]=a\,A\,X_1+(1-a)\,A\,X_2=$$
$$=a\,B+(1-a)\,B=B,$$

o que mostra que $a\,X_1+(1-a)\,X_2$ *também é solução.*

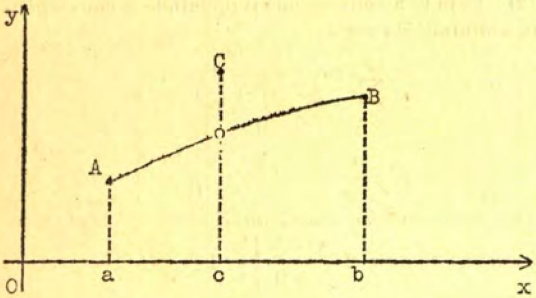
I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência e 2.º ponto de informação – (2.ª chamada) – 14-6-67.

I

5680 – 1) Considere a função $y=f(x)$ com o domínio $X=[a,b]$ e cuja imagem se apresenta na figura junta. Resolva os problemas seguintes:

a) Diga qual é o contradomínio $f(x)$.

b) Mostre que $f(x)$ é descontínua para $x=c$, indicando a oscilação $w(c)$.



c) Calcule $f'(c)$.

d) Quais são os extremos locais de $f(x)$? E os extremos absolutos? Justifique.

2) Mostre que $\varphi(x) = \begin{cases} x\ (x \neq 0) \\ 1\ (x = 0) \end{cases}$ não possui primitiva em $]-\infty, +\infty[$.

R: 1) a) *Note-se que* $f(c-0) = f(c+0)$. *Estes limites laterais são representados geomètricamente pela ordenada do ponto que é centro do pequeno círculo em branco.*

$f(X) = [f(a), f(c-0)[\cup]f(c-0), f(b)] \cup \{f(c)\}$.

b) $\omega(c) = C - f(c-0) > 0$ *e portanto* $f(x)$ *é descontínua para* $x = c$.

c) $f'(c) = \pm\infty$.

d) *O mínimo local é* $f(a)$ *e os máximos locais são* $f(c)$ *e* $f(b)$. *O mínimo absoluto é* $f(a)$ *e o máximo absoluto é* $f(c)$.

2) *Supondo que existe* $\Phi(x) = P\varphi(x)$ *teria de ser* $\Phi(x)$ *contínua e portanto da forma*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + k\ (x \neq 0) \\ k\ (x = 0). \end{cases}$$

Ora a derivada desta função é

$$\Phi'(x) = \begin{cases} x\ (x \neq 0) \\ 0\ (x = 0) \end{cases}$$

que não coincide com $\varphi(x)$. *Logo* $\varphi(x)$ *não possui primitiva em* $]-\infty, +\infty[$.

II

5681 — 1) Desenvolva a função

$$\psi(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

em série de Mac-Laurin, indicando o termo geral e o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

2) Seja $f(x)$ convexa em $[a, b]$ e $g(y)$ crescente e convexa num intervalo que contém o contradomínio de $f(x)$. Prove que $g[f(x)]$ é convexa em $[a, b]$.

Nota: Admita a existência de derivadas até à 2.ª ordem das funções f e g.

R.: 1) $\psi(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2-x} - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{3-x}$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_0^\infty x^n + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

para $|x| < 1$.

Também se pode escrever

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(-1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n.$$

2) *Fazendo* $F(x) = g[f(x)]$, *vem* $F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$, $F''(x) = g''(y)[f'(x)]^2 + g'(y) f''(x)$ *e, como* $g'(y) \geqq 0$, $g''(y) \geqq 0$ *e* $f''(x) \geqq 0$, *tem-se* $F''(x) \geqq 0$, *o que prova o resul.ado.*

III

5682 — 1) Considere $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + z^2 + 1}{x - y - z}$, $f(0,0,0) = 0$. Calcule $f'_x(0,0,0)$, $f'_y(0,0,0)$ e $f'_z(0,0,0)$.

2) Duas matrizes A e B de ordem n diferem apenas na j-ésima coluna. Prove que

$$2^{1-n}|A + B| = |A| + |B|.$$

R.: 1) $f'_x(0,0,0) = \lim\limits_{x=0} \dfrac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x} =$

$$= \lim_{x=0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$$

$$f'_y(0,0,0) = \lim_{y=0} \frac{f(0,y,0) - f(0,0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} -\frac{1}{y^2} = -\infty$$

$$f'_z(0,0,0) = \lim_{z=0} \frac{f(0,0,z) - f(0,0,0)}{z} =$$

$$= \lim_{z=0} - \frac{z^2+1}{z^2} = -\infty .$$

2) *Sendo*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad e \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots b_{nj} \cdots b_{nn} \end{vmatrix},$$

vem

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} + b_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} \cdots a_{nj} + b_{nj} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

e

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 2\,a_{11} \cdots a_{1j} + b_{1j} \cdots 2\,a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 2\,a_{n1} \cdots a_{nj} + b_{nj} \cdots 2\,a_{nn} \end{vmatrix} = 2^{n-1} (|A| + |B|)$$

o que prova a proposição.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho — (1.ª chamada) — Prova escrita — 10-7-67.

5683 — 1) Ache todos os números complexos que satisfazem à relação $\bar{z} = z^{n-1}$, onde $\bar{z}$ designa o conjugado de z.

R: *Fazendo* $z = \rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, *tem-se*

$$\bar{z} = \rho\,[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)]$$

e a relação proposta transforma-se em

$$\rho\,[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)] =$$
$$= \rho^{n-1}\,[\cos(n-1)\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,(n-1)\,\theta]$$

que exige

$$\rho = \rho^{n-1}$$
$$(n-1)\,\theta + \theta = 2\,k\,\pi ,$$

isto é,

$$\rho = 0 \vee \rho = 1$$
$$\theta = \frac{2\,k\,\pi}{n} .$$

A solução é pois $z = 0$ *ou*

$$z = \cos\frac{2\,k\,\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\,k\,\pi}{n} .$$

2) Estude a convergência, incluindo a convergência uniforme, da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \left(2 \cdot \frac{x-3}{x+1}\right)^n .$$

R: *Como* $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \left| \frac{x-3}{x+1} \right|$, *em que* a_n *é o termo geral da série associada, a série converge (absolutamente) quando* $2 \left| \frac{x-3}{x+1} \right| < 1$ *e diverge quando* $2 \left| \frac{x-3}{x+1} \right| > 1$.

Obtém-se assim o intervalo de convergência absoluta $]5/3, 7[$. *Notando que a série é simplesmente convergente para* $x = 5/3$, *ela é uniformemente eouvergente em qualquer intervalo* $[a, b]$ *com* $a \geq 5/3$ *e* $b < 7$.

3) Prove que $f(x) = \frac{x+k}{x^2-k}$ não possui extremantes interiores se $-2 \leq k \leq 2$. E extremantes fronteiros?

Calcule $P\,f(x)$.

R: *Como* $f'(x) = \frac{-x^2 - 2\,k\,x - 4}{(x^2-4)^2}$ *e o binómio discriminante de* $-x^2 - 2\,k\,x - 4$ *é* $\Delta = k^2 - 4$, *tem-se para* $-2 \leq k \leq 2$, $\Delta \leq 0$ *o que implica* $f'(x) \leq 0$: *não há pois extremantes interiores,* $f(x)$ *é decrescente no seu campo de existência.*

Dado que $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$, *os pontos impróprios são extremantes:* $+\infty$ *é minimizante e* $-\infty$ *é maximizante.*

$$P \frac{x+k}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+k}{4} \log|x-2| -$$
$$- \frac{2-k}{4} \log|x+2| .$$

4) O determinante de ordem n $\Delta = |a_{ij}|$ pode ser considerado como função das n^2 variáveis a_{ij}. Mostre que Δ é função homogénea e que $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$.

Verifique o teorema de Euler e interprete-o na teoria dos determinantes.

R: Δ *é função homogénea de grau* n *pois* $|\lambda\,\Delta| = \lambda^n\,\Delta$. *Pelo teorema de Laplace tem-se*

$$a_{i1}\,A_{i1} + a_{i2}\,A_{i2} + \cdots + a_{ij}\,A_{ij} + \cdots + a_{in} = \Delta$$

e vem imediatamente

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij} .$$

Com i *e* j *mudos correntes de* 1 *a* n *vem*

$$a_{ij}\, A_{ij} = n\, \Delta\,.$$

5) Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes do polinómio $z^3 + pz + q$, ache a relação entre p e q por forma que $r_3 = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

R: *De* $r_3 = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$ *vem* $r_1 r_2 r_3 = r_2 + r_1$ *e, como* $r_1 r_2 r_3 = -q$ *tem-se* $r_1 + r_2 = -q$. *Por outro lado,* $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, *ou* $r_1 + r_2 = -r_3$, *e portanto* $r_3 = q$. *Terá de ser então* $q^3 + pq + q = 0$.

6) Considere o sistema de equações sobre o corpo R dos números reais

$$S)\left\{\begin{array}{l} 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 15 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 = -5 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 9 \\ -x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 = 11\,. \end{array}\right.$$

Reduza-o a um sistema de equações lineares e mostre que $S)$ é possível. Apresente a solução.

R: *Fazendo* $x_i^2 = y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *o sistema transforma-se no sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 15 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 - 2y_4 = -5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 = 9 \\ -y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 11\,. \end{array}\right.$$

Utilizando o método de condensação, vem

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & 11 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 24 \\ -9 & -10 & 0 & 0 & -49 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e vê-se que a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz completa : o sistema linear é possível (indeterminado porque a característica é 3).

A solução do sistema linear é $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ *e* $y_3 = 1 - y_4$ *e o sistema proposto também é possível (indeterminado) com as soluções*

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & x_2 = 2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = 2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = -2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = 2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \end{array}$$

É claro que terá de ser $-1 \leqq x_4 \leqq 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho — 2.ª chamada — Prova escrita — 13-7-67.

5684 — 1) Sejam

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

e

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

pontos de R^n. Mostre que a relação binária

$$X \geqq Y \Longleftrightarrow x_i \geqq y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

é relação de ordem parcial mas não é relação de ordem.

Introduzindo a *adição*

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

e *a multiplicação por um escalar*

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

prove que são verificadas as propriedades seguintes:

a) $X_1 \geqq Y_1 \wedge X_2 \geqq Y_2 \Rightarrow X_1 + X_2 \geqq Y_1 + Y_2$

b) $X \geqq Y \wedge \lambda > 0 \Rightarrow \lambda X \geqq \lambda Y$.

R: *A relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva e portanto é relação de ordem parcial. Não é relação de ordem pois não é tricotómica.*

A demonstração das propriedades a) *e* b) *é imediata.*

2) **Calcule:**

a) $$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{x^2}$$

b) $P\, x^2 (1 + x^5)^4$.

R.: a) *Utilizando duas vezes a regra de Cauchy, vem:*

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x - e^x}{2} = -1.$$

b) $$P\, x^2 (1+x^5)^4 = P\, x^2 (1 + 4x^5 + 6x^{10} + 4x^{15} + x^{20}) =$$

$$= P\,(x^2 + 4x^7 + 6x^{12} + 4x^{17} + x^{22}) =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{2} + 6\frac{x^{13}}{13} + 2\frac{x^{18}}{9} +$$

$$+ \frac{x^{23}}{23} + C.$$

3) **A substituição** $x = e^t\, y = e^u$ **converte** $f(x, y)$ **em** $g(t, u) = f(e^t, e^u)$. **Se** f **satisfaz à relação** $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, **mostre que** g **satisfaz a** $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$.

R.: $$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^t = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{2t} + \frac{\partial f}{\partial x} e^t$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial x} x$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot e^u = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{2u} + \frac{\partial f}{\partial y} e^u$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0.$$

4) **Seja** $P(z)$ **polinómio inteiro em** z. **O resto da divisão por** $z - 3$ **é** 4 **e, na divisão por** $z + 3$, **o resto é** 5. **Qual é o resto da divisão de** $P(z)$ **por** $z^2 - 9$? **Justifique.**

R.: $$P(z) = (z^2 - 9)\, Q(z) + (A z + B)$$

$$P(3) = 3A + B$$

$$P(-3) = -3A + B$$

e portanto

$$\begin{cases} 3A + B = 4 \\ -3A + B = 5 \end{cases}$$

que dá

$$A = -1/6 \ \ e \ \ B = 9/2.$$

O resto é $-\frac{1}{6} z + \frac{9}{2}$.

5) **Ache a matriz** A **que satisfaz à seguinte equação matricial:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

R.: *Como*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \ e \ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

vem

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}.$$

6) **Utilize a teoria dos determinantes para deduzir a condição para que as rectas**

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n x + B_n y + C_n = 0 \end{cases}$$

sejam concorrentes.

R.: *A característica de* $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \end{bmatrix}$ *terá de ser igual a* 2 *e portanto a matriz dos coeficientes terá de possuir um menor de 2.ª ordem significativo. Para fixar ideias, seja* $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. *O teorema de Rouché dá imediatamente as condições:*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \cdots, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_n & B_n & C_n \end{vmatrix} = 0.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final (Epoca de Outubro) — Prova escrita — 3-10-1967.

5685 — 1) Considere o conjunto universal R^2 e seja A o subconjunto de R^2 tal que $A = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 < 4\}$. Indique o interior de A, o exterior de A e o conjunto derivado de A. O conjunto A é aberto? É fechado? Porquê? Acompanhe a resolução do problema com a respectiva interpretação geométrica.

R.: *int* $A = A$; *ext* $A = R^2 - \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$; $A' = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

O conjunto A *é aberto porque* $A =$ *int* A.

2) Resolva os problemas seguintes:

a) Desenvolva x em série de potências de $y = \dfrac{x}{1-x}$ (sugestão: exprima x em função de y). Para que valores de x é válido o desenvolvimento? Justifique.

b) Calcule $P \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$.

R.: a) *De* $y = \dfrac{x}{1-y}$ *vem*

$$x = \frac{y}{1+y} = \sum_0^{\infty} (-1)^n y^{n+1} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}$$

e o desenvolvimento é válido para $|y| = \left|\dfrac{x}{1-x}\right| < 1$ *ou* $x < 1/2$.

b) $P \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) =$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} P \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} \log(1 + \operatorname{sen}^2 x) + C.$$

3) Utilize a teoria das funções implícitas para achar os extremos da função $y(x)$ definida por $x y^2 - y x^2 - 2a^3 = 0$ $(a > 0)$.

R.: *O extremante terá de satisfazer às condições*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Ora a solução do sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = x y^2 - y x^2 - 2a^3 = 0 \\ f'_x(x, y) = y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

é $\begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$ *que satisfaz à condição* $f'_y(a, 2a) \neq 0$.

Sendo $\dfrac{dy}{dx} = 0$, *vem* $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{f''_{x^2}(x, y)}{f'_y(x, y)}$ *e portanto* $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)_a = -\dfrac{f''_{x^2}(a, 2a)}{f'_y(a, 2a)} = \dfrac{4a}{3a^2} > 0$. *Logo* $y(x)$ *atinge o mínimo* $y = 2a$ *para* $x = a$.

4) Ache o valor de k por forma que uma das raízes da equação $z^3 - 7z + k = 0$ seja o dobro de uma das outras.

R.: *Designando por* z_1, z_2 *e* z_3 *as raízes da equação, as fórmulas de Girard e a condição dada permitem escrever*

$$\begin{cases} z_1 = 2z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 z_2 z_3 = -k \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 2z_2 \\ 3z_2 + z_3 = 0 \\ 2z_2 \cdot z_2(-3z_2) = -k \end{cases} \quad \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ z_2^3 = k/6. \end{cases}$$

Substituindo $z_2 = \sqrt[3]{k/6}$ *na equação, vem*

$$\frac{k}{6} - 7\sqrt[3]{\frac{k}{6}} + k = 0$$

que dá $k = \pm 6$.

5) Seja A uma matriz quadrada tal que $A^n = 0$ $(n \in N)$. Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$.

R.: *Tem-se* $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})(I - A) = I$, *o que prova a proposição.*

6) Determine a e b por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + a x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}$$

seja possível indeterminado de grau 2. Ache nesse caso a solução do sistema.

R.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & b \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & b \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+3 & b \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja possível indeterminado de grau 2 terá de ser $a = 3$ *e* $b = 0$. *A solução será então* $\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 4x_3 + 5x_4 \end{cases}$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final—Epoca de Outubro (Prova escrita)— 10-10-1967.

5686 – Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [e^{nx} - e^{(n-1)x}]^{-1}$$

é convergente se e só se $x > 0$ e tem por soma

$$\frac{e^x}{e^{2x}-1}.$$

R: *O termo geral da série pode escrever-se na forma* $\frac{1}{e^x-1} \cdot (-1)^{n-1} \frac{1}{e^{(n-1)x}}$ *e, como* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{e^{(n-1)x}}$ *é a série geométrica de razão* $-1/e^x$ *(convergente se e só se* $x > 0$*), a soma da serie proposta é*

$$S = \frac{1}{e^x-1} \cdot \frac{1}{1+1/e^x} = \frac{1}{e^{2x}-1}.$$

2) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x/2 \ (x < 0) \\ P(x) \ (0 \leq x \leq 1) \\ 1 \ (x > 1) \end{cases}$$

onde $P(x)$ é um polinómio do 3.º grau. Escolha $P(x)$ por forma que $f(x)$ e $f'(x)$ sejam contínuas para todo o x real.

R: *Tomando* $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$, *a continuidade de* $f(x)$ *em* $x = 0$ *e* $x = 1$ *obriga a tomar* $d = 0$ *e* $a + b + c = 1$. *Como*

$$f'(x) = \begin{cases} 1/2 \ (x < 0) \\ 3ax^2 + 2bx + c \ (0 \leq x \leq 1) \\ 0 \ (x > 1) \end{cases}$$

a continuidade de $f'(x)$ *traduz-se nas relações* $c = 1/2$ *e* $3a + 2b + 1/2 = 0$.

Tem-se então $a = -3/2$, $b = 2$, $c = 1/2$ *e* $d = 0$.

3) Calcule:

a) $\lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right]$

b) $P \frac{\log^3 x}{x(1+\log^2 x)}$.

R: a) *Com* $\lim_{x=0} \lambda = 1/2$, *tem-se*

$$\lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right] =$$
$$= \lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{x - \lambda x^2}{x^2} \right] =$$
$$= \lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x} + \lambda \right] =$$
$$= \lim_{x=0} \left[-\frac{x}{x+1} + \lambda \right] = -1/2.$$

b) *Fazendo* $\log x = t$, *vem*

$$P \frac{\log^3 x}{x(1+\log^2 x)} = P \frac{t^3}{1+t^2} = P \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) =$$
$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1+t^2) + C =$$
$$= \frac{\log^2 x}{2} - \frac{1}{2} \log(1 + \log^2 x) + C.$$

4) Considere

$$F(x, y) = \begin{cases} x y \operatorname{sen} \frac{\pi(x+y)}{2(x-y)} & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

Calcule $F''_{xy}(0,0)$ e $F''_{yx}(0,0)$.

R: $F'_x(0,0) = \lim_{x=0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = 0$,

$$F'_x(0,y) = \lim_{x=0} \frac{F(x,y) - F(0,y)}{x} =$$

$$= y \, sen \frac{\pi y}{-2y} \quad F'_y(0,0) = \lim_{y=0} \frac{F(0,y) - F(0,0)}{y} = 0,$$

$$F'_y(x,0) = \lim_{y=0} \frac{F(x,y) - F(x,0)}{y} = x \, sen \frac{\pi x}{2x}$$

$$F''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0} \frac{F'_x(0,y) - F'_x(0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} sen \frac{\pi y}{-2y} = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$F''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0} \frac{F'_y(x,0) - F'_y(0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0} sen \frac{\pi x}{2x} = sen \frac{\pi}{2} = 1 .$$

5) Seja $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$. Qual é o valor de $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \end{vmatrix}$? Justifique.

R.: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \Delta$.

6) Ache um sistema fundamental de soluções para o sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 . \end{cases}$$

R.: *Condensando a matriz dos coeficientes integrada na matriz completa, tem-se*

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

A característica da matriz dos coeficientes é 2 *e o grau de indeterminação do sistema é* 3. *Tomando as incógnitas não-principais* x_3, x_4 *e* x_5 *é fácil construir um sistema fundamental de soluções.*

Fazendo $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ *e* $x_5 = 0$ *obtém-se* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = -2$; *para* $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ *e* $x_5 = 0$ *vem* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = -2$; *finalmente, com* $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ *e* $x_5 = 1$ *resulta* $x_1 = 5$ *e* $x_2 = -6$.

O sistema fundamental de soluções é pois

$$X_1 = [1 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0], \quad X_2 = [1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 0]$$

e

$$X_3 = [5 \ -6 \ 0 \ 0 \ 1] .$$

Qualquer solução do sistema se pode escrever na forma $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ *e portanto a solução geral do sistema pode apresentar-se na forma*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 \\ x_2 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 6\alpha_3 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_2 \\ x_5 = \alpha_3 . \end{cases}$$

Enunciados e soluções dos N.os 5671 a 5686 de Fernando de Jesus