ANO XXVII – N.os 103-104 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ. – 1966

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Sur quelques équations différentielles non-linéaires du deuxième ordre

par **Ivan Bandić**
Beograd

1°. Il s'agit de l'équation différentielle

$$F(x,\underbrace{y,\overset{p}{y'},y''}_{m})=0\,. \tag{1}$$

En supposant que x a la dimension λ et y la dimension ν, on a indiqué par le symbole $F(x,\underbrace{y,\overset{p}{y'},y''}_{m})$ que tous les termes du polynome F sont de dimension p et que F est, en outre, homogène selon y, y' et y'' de degré m.

L'équation donnée on nomme ici, pour plus de brièveté, l'équation P du deuxième ordre.

On a demontré dans le présent travail que l'équation (1) est intégrable par quadratures. En vertu des résultats obtenus on résout, ensuite, deux problèmes: *a*) On résout certains cas connus de (1) au moyen d'une nouvelle méthode. (*b*) On forme de nouvelles classes, très larges, d'équations différentielles intégrables de forme (1).

(1. 1) Au cours du travail on applique aussi les dérivées relatives de M. Petrović, [1]. La dérivée relative du n-ième ordre de la fonction $u=u(x)$ est introduite au moyen de la définition $\Delta_n(u)=u^{(n)}/u$, $(u^{(n)}=d^n u/dx^n)$.

De tous les nombreux relations entre les dérivées relatives, qui en résultent, on y a utilisé

$$\Delta_1(uv)=\Delta_1(u)+\Delta_1(v)\,;$$

$$\Delta_1\left(\frac{u}{v}\right)=\Delta_1(u)-\Delta_1(v)\,;$$

$$\Delta_1(u^n)=n\,\Delta_1(u)\,;\quad \Delta_2(u)=\Delta_1'(u)+\Delta_1^2(u)\,;$$

$$\Delta_1(\exp\textstyle\int u\,dx)=\exp\int\Delta_1(u)\,dx=u\,,$$

où $u=u(x)$, $v=v(x)$.

(1. 2) Dans le travail on a utilisé également les dérivées relatives partielles du premier ordre de la fonction à deux variables indépendantes, $u=u(x_1,x_2)$, qu'on a introduite par la définition, [2]

$$\Delta_1(u)_{x_\nu}=\frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\,,\qquad (\nu=1,2)\,.$$

Si x_2 est la fonction de x_1, on arrive à la dérivée relative totale selon x_1

$$\nabla_1(u)_{x_1}=\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx_1}=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot x'_2\right),$$
$$\left(x'_2=\frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ou bien, en vertu de la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1}=\Delta_1(u)_{x_1}+\Delta_1(u)_{x_2}\,x'_2\,.$$

2°. Lorsqu'on introduit dans le polynome F de l'équation (1) la nouvelle variable indépendante t et la fonction inconnue $\eta=\eta(t)$ au moyen de la substitution

(2) $$x=e^{\lambda t},\quad y=\eta\,e^{\nu t},$$

et que l'on prend en considération les caractéristiques sus-mentionnées de F, on obtient

$$F=F(1\,,1\,,[\Delta_1(\eta)+\nu]/\lambda\,,$$
$$[\Delta_2(\eta)+(2\nu-\lambda)\Delta_1(\eta)+\nu(\nu-\lambda)]/\lambda^2)\,\eta^m\exp(pt)\,.$$

En introduisant les fonctions z et ϑ par la substitution

(3) $$\Delta_1(\eta)+\nu=\lambda z\,;\ \ \Delta_2(\eta)+(2\nu-\lambda\vartheta)\Delta_1(\eta)+$$
$$+\nu(\nu-\lambda)=\lambda^2\vartheta\,,$$

d'où il résulte

(4) $$z'=\lambda(\vartheta+z-z^2)\,,\qquad (z'=dz\,|\,dt)$$

la fonction F devient

(5) $$F=F(1\,,1\,,z\,,\vartheta)\exp\!\int[m\lambda z+$$
$$+(p-m\nu)]\,dt$$

Dans ce cas l'équation (1) se réduit à l'équation algèbrique

(6) $$F(1\,,1\,,z\,,\vartheta)=0\,.$$

(**2.** 1) Soit $\vartheta=\vartheta(z)$ une solution de (6). Dans ce cas on trouve l'intégrale générale de l'équation (1) de (2), (3) et (4) dans la forme paramètrique

(7) $$x=c_1\exp\!\int P(z)dz;\ \ y=c_2\exp\!\int zP(z)dz;$$
$$P(z)=(\vartheta(z)+z-z^2)^{-1}$$

où z est le paramètre.

(**2.** 2) L'intégrale générale de (1) peut être exprimée, à la base de (2), (3) et (4) sous la forme

(8) $$x=c_1\exp\!\int Q(\vartheta)\,d\vartheta\,;$$
$$y=c_2\exp\!\int z(\vartheta)\,Q(\vartheta)\,d\vartheta\,;$$
$$Q(\vartheta)=z'(\vartheta)(\vartheta+z(\vartheta)-z^2(\vartheta))^{-1}$$

où ϑ joue le rôle de paramètre et $z=z(\vartheta)$ représente une solution de l'équation (6).

(**2.** 3) On applique ici les résultats obtenus aux quelques cas spéciaux de l'équation (1).

(**2.** 3. 1) L'équation différentielle, [3]

(9) $$f(x\,,\underbrace{\overset{p_0}{y\,,y'}}_{m_0})\,y''+\varphi(x\,,\underbrace{\overset{p_1}{y\,,y'}}_{m_1})=0$$

appartient à la classe des équations P de forme (1) si

(10) $$m_1-m_0=1\,;\ \ p_1-p_0=\nu-2\lambda\,.$$

L'intégrale générale de (9) on trouve, dans ce cas, de (7) où

$$(11) \quad \vartheta(z) = -\varphi(1,1,z)/f(1,1,z).$$

EXEMPLE. On donne l'éqnation P de forme (9), [4]

$$(12) \qquad (xy'-y)y''+4y'^2=0,$$

où $m_0=1$, $p_0=\nu$, $m_1=2$, $p_1=2(\nu-\lambda)$, et la condition (10) est satisfaite. L'intégrale générale de (12) est donnée par (7), où

$$P(z)=(1-z)/z(1+z)^2.$$

(2. 3. 2) L'équation différentielle

$$(13) \quad f(x,\underbrace{\overset{p_0}{y},y''}_{m_0})y'+\varphi(x,\underbrace{\overset{p_1}{y},y''}_{m_1})=0$$

est une équation P si

$$(14) \quad m_1-m_0=1, \qquad p_1-p_0=\nu-\lambda.$$

L'intégrale générale de (13) est donnée par les relations (8), où

$$(15) \quad z(\vartheta)=-\varphi(1,1,\vartheta)/f(1,1,\vartheta).$$

EXEMPLE. On donne l'équation P de forme (13), [5]

$$(16) \qquad a x^5 y' y''+b y^2=0, \quad (a=\text{const.}, \ b=\text{const.})$$

où $m_0=1$, $p_0=\lambda+\nu$, $m_1=2$, $p_1=2\nu$. L'intégrale générale de (16), où la condition (14) est satisfaite, on trouve de (8), où $z(\vartheta)=-b/a\vartheta$.

(2. 4) En utilisant les résultats de 2°, on résout ici le problème b) de 1°.

On donne l'équation différentielle

$$(17) \qquad f(x,\underbrace{\overset{p_0}{y},y'}_{m_0})y''+\varphi(x,\underbrace{\overset{p_1}{y},y'}_{m_1})= \\ =\psi(x,\underbrace{\overset{q_0}{y},y'}_{n_0})y''+\theta(x,\underbrace{\overset{q_1}{y},y'}_{n_1}).$$

En supposant que

$$(18) \qquad m_1-m_0=n_1-n_0=1; \\ p_1-p_0=q_1-q_0=\nu-2\lambda,$$

on obtient à la base de (5)

$$(19) \quad (f\vartheta+\varphi)\exp\int[m_1\lambda z+(p_1-m\,\nu)]dt= \\ =(\psi\vartheta+\theta)\exp\int[n_1\lambda z+(q_1-n_1\nu)]dt,$$

avec

$$f=f(1,1,z), \ \varphi=\varphi(1,1,z), \\ \psi=\psi(1,1,z), \ \theta=\theta(1,1,z),$$

ou bien

$$(20) \qquad R=\exp\int(\alpha z+\beta)dt,$$

où est posé, pour de brièveté

$$(21) \qquad R=(f\vartheta+\varphi)/(\psi\vartheta+\theta); \\ \alpha=(n_1-m_1)\lambda, \ \beta=(q_1-p_1)-(n_1-m_1)\nu.$$

En appliquant l'opérateur ∇_1 selon t aux deux côtés de (20), et en tenant compte que $\nabla_1(R)_z=\lambda(\vartheta+z-z^2)\nabla_1(R)_z$ on obtient

$$(22) \quad \lambda(\vartheta+z-z^2)\nabla_1(R_z)=\alpha z+\beta.$$

Finalement, en éliminant la variable ϑ de (21) et (22), on arrive à l'équation d'ABEL

$$(23) \qquad \lambda \{[z(1-z)\psi - \theta] R - \\ - [z(1-z)f - \varphi]\} R' = \\ = (\alpha z + \beta) R (\psi R - f), \quad (R' = dR/dz).$$

Soit $R = R(z, c_1)$ l'intégral générale de (23). Dans ce cas on trouve de (21)

$$(24) \qquad \vartheta(z, c_1) = [\varphi - \theta R(z, c_1)] / \\ / [\psi R(z, c_1) - f]$$

et l'intégrale générale de (17), où la condition (18) est satisfaite, on obtient de (2), (3), (22) et (24) dans la forme paramètrique

$$(25) \qquad x = c_2 \exp \int \frac{dz}{\vartheta(z, c_1) + z - z^2}, \\ x^\beta y^\alpha = [R(z, c_1)]^\lambda,$$

où z est le paramètre.

(2.4.1) En supposant que

$$(26) \qquad z(1-z)f - \varphi = 0,$$

l'équation (23) se réduit à l'équation linéaire

$$(27) \qquad \lambda [z(1-z)\psi - \theta] R' = \\ (\alpha z + \beta)(\psi R - f),$$

dont l'intégrale générale est

$$(28) \qquad R = \varepsilon \left(c_1 + \frac{1}{\lambda} \int \frac{f}{\varepsilon} \omega \, dz \right); \\ \varepsilon = \exp \frac{1}{\lambda} \int \psi \omega \, dz, \\ (\omega = (\alpha z + \beta) / [z(1-z)\psi + \theta]).$$

En tenant compte que, en vertu de (2) et (3)

$$(29) \qquad z = x y' / y,$$

et que

$$(30) \qquad f(1, 1, z) = A f(x, y, y'), \\ \varphi(1, 1, z) = A \frac{x^2}{y} \varphi(x, y, y'), \\ (A = x^{(\nu m_0 - p_0)/\lambda} y^{-m_0})$$

la condition (26) devient

$$(31) \quad x y \varphi(x, y, y') = y'(y - x y') f(x, y, y')$$

et l'équation intégrable (17) apparaît sous la forme

$$(32) \quad \{x y y'' + y'(y - x y')\} f(x, \overset{p_0}{\underbrace{y, y'}_{m_0}}) = \\ = x y \{\psi(x, \overset{q_0}{\underbrace{y, y'}_{n_0}}) y'' + \theta(x, \overset{q_1}{\underbrace{y, y'}_{n_1}})\},$$

où $n_1 - n_0 = 1$, $q_1 - q_0 = \nu - 2\lambda$.

L'intégrale générale de (32) on trouve de (25) où $R = R(z, c_1)$ est donné par (28).

LITTÉRATURE

[1] M. PETROVIĆ, *Un algorithme différentielle et ses applications*, Monographies de l'Académie Serbe des Sciences, Vol. XCI (1936), Beograd.

[2] I. BANDIĆ, *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*, Bull. de la Soc. des Math. et phys. de la R. P. de Serbis, X 1-4 (1958), Beograd.

[3] I. BANDIĆ, *Sur une classe d'équations différentielles quasi-homogènes à deux dimensions du deuxième ordre*, Acad. roy. de Belgique, Bull. de la Classe des Sciences, 5 Serie, T. LI (1965), Bruxelles.

[4] FORSYTH-JACOBSTHAL, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, p. 144, 710, (1912), Braunschweig.

[5] E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, I, p. 595, 6-229, (1943), Leipzig.