Outra demonstração de um teorema de A. H. Stone

por O. T. Alas
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de São Paulo, Brasil

O prof. Dr. EDISON FARAH (professor catedrático de Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo) nos propôs procurar uma demonstração do Teorema de A. H. STONE [1] que utilizasse o Teorema de ZORN ao invés da Indução Transfinita. Uma demonstração nestas condições teria importância didática. Daremos aqui um prova do referido teorema, usando o Teorema de ZORN e, procurando seguir, tanto quanto possível, a ordem de ideias da demonstração original [1].

Antes, porém, recordaremos algumas definições e introduziremos certas notações.

1 — Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de E (1). Para todo subconjunto Y de E indicaremos por $(Y; \mathcal{U})$ o conjunto dos $X \dot{\in} \mathcal{U}$ tais que $X \cap Y \neq \phi$ e por $(Y; -\mathcal{U})$ o conjunto dos $x \in Y$ tais que $(\{x\}; \mathcal{U}) \subset Y$.

No caso de trabalharmos com uma sequência, $(\mathcal{U}_n)$, de recobrimentos abertos, simplificaremos a notação pondo, para todo $Y \subset E$ e para todo $n \geqq 1$,

$$(Y; \mathcal{U}_n) = (Y; n) \quad \text{e} \quad (Y; -\mathcal{U}_n) = (Y; -n).$$

(1) Sendo $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{U}$ é um recobrimento aberto de E se $\mathcal{U}$ é uma família de conjuntos abertos cuja reunião é E. Indicaremos por $X \dot{\in} \mathcal{U}$ o fato de ser X um têrmo da família $\mathcal{U}$.

2 — Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ dois recobrimentos abertos de um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$. Dizemos que $\mathcal{W}$ é um Δ-refinamento de $\mathcal{U}$ se para todo $x \in E$, existe $U \dot{\in} \mathcal{U}$, verificando

$$(\{x\}; \mathcal{W}) \subset U.$$

3 — Um espaço topológico se diz totalmente normal («fully normal») se todo seu recobrimento aberto admite um Δ-refinamento aberto que recobre o espaço.

4 — Um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é paracompacto se para todo recobrimento aberto de E, existe um recobrimento aberto de E, que o refina e é localmente finito.

Nota — Se num espaço topológico $(E, \mathcal{T})$, totalmente normal, para um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de E, existe $\mathcal{W}$, recobrimento localmente finito de E (não necessàriamente aberto) que o refina, então existe um recobrimento aberto de E, localmente finito, que refina $\mathcal{U}$.

Pôsto isto, passaremos à demonstração do

TEOREMA DE STONE. *Todo espaço topológico totalmente normal é paracompacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico totalmente normal e seja $(W_i)_{i \in I}$ um recobrimento aberto de E; tomemos uma sequência $(\mathcal{U}_n)$ de recobrimentos abertos de E tal que

1) $\mathcal{U}_1$ é Δ-refinamento de $(W_i)_{i \in I}$;
2) $\mathcal{U}_{n+1}$ é Δ-refinamento de $\mathcal{U}_n$, $\forall n \geq 1$.

Para cada $i \in I$, ponhamos

$$V_i^1 = (W_i; -1), \quad V_i^n = (V_i^{n-1}; n), \quad \forall n \geq 2$$

e

$$V_i = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} V_i^{\nu}.$$

Ora, $\bigcup_{i \in I} V_i^1 = E$ e se $x \in V_i$, então $x \in V_i^m$ (para um m conveniente) e $(\{x\}; m) \subset V_i$.

Indiquemos por $\mathcal{C}$ a classe das famílias *abertas* (H_{ni}) (1) tais que, sendo,

$$J_H = \{i \in I \mid (\exists\, n \geq 1)(H_{ni} \neq V_i)\},$$

verificam

1) $(H_{ni}; n+1) \subset V_i$, $\forall n \geq 1$, $\forall i \in J_H$;
2) $\bigcup_{i \in J_H} V_i = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ i \in J_H}} H_{ni}$;
3) $\forall n \geq 1$, $\forall U_{n+3} \in \mathcal{U}_{n+3}$, U_{n+3} encontra, no máximo, um conjunto H_{ni} com $i \in J_H$.

Em particular, as famílias de $\mathcal{C}$ são recobrimentos abertos de E. $\mathcal{C}$ é não vazia (pois $E \neq \emptyset$). Ordenemos $\mathcal{C}$ do seguinte modo, sendo (H_{ni}) e (H'_{ni}) pertencentes a $\mathcal{C}$,

$$(H_{ni}) \leq (H'_{ni}) \Longleftrightarrow J_H \subset J_{H'}$$

e

$$H'_{ni} = H_{ni}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i \in J_H.$$

(1) Para simplificar a notação, uma família genérica

$$(T_{(n,i)})_{(n,i) \in N \times I}$$

será indicada por (T_{ni}).

É fácil verificar que $(\mathcal{C}, \leq)$ é indutivo.

Pelo Teorema de ZORN, $\mathcal{C}$ admite um elemento maximal que denotaremos por (H^*_{ni}). Mostremos que $\bigcup_{i \in J_{H^*}} V_i = E$. Caso isso não fôsse verdade, existiria $x \in E$, pertencente a um certo V_j, com $j \notin J_{H^*}$.

Ponhamos, então,

$$H'_{ni} = H^*_{ni}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i \in J_{H^*},$$

$$H'_{nj} = (((V_j; -n) - \bigcup_{i \in J_{H^*}} V_i); n+3), \quad \forall n \geq 1 \text{ (1)}$$

$$H'_{nk} = V_k, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in I - (J_{H^*} \cup \{j\}).$$

A família (H'_{ni}), assim construída, pertence a $\mathcal{C}$ e é estritamente maior do que (H^*_{ni}), o que é absurdo.

Finalmente, vamos construir a partir do elemento maximal (H^*_{ni}) um recobrimento localmente finito de E, o que, levando-se em consideração a nota, termina a demonstração.

Para todo $(n, i) \in N \times J_{H^*}$ pomos

$$G_{ni} = H^*_{ni} - \bigcup_{\substack{1 \leq m \leq n-1 \\ j \in J_{H^*}}} H^*_{mj}.$$

A família (G_{ni}) assim construída é um recobrimento localmente finito de E.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. H. STONE, *Paracompactness and Product Spaces,* Bulletin of the American Mathematical Society, Outubro de 1948.

[2] EDISON FARAH, *Teoria dos conjuntos,* São Paulo, 1961.

[3] WILLIAM J. PERVIN, *Foundations of General Topology,* Academic Press, New York, 1964.

(1) Se $H'_{1j} = V_j$, então, tomamos

$$H'_{nj} = \emptyset, \quad \forall n \geq 2.$$