Sobre Medidas de Probabilidade Geradas por Fracções Contínuas Regulares

por J. Marques Henriques

Lisboa

1. Introdução

É um facto bem conhecido que qualquer número irracional admite um desenvolvimento *único* em fracção contínua regular. Se o número em questão é o resultado de uma experiência aleatória efectuada sobre os números de um intervalo de medida unitária, então os seus termos podem considerar-se como variáveis aleatórias susceptíveis de gerarem medidas de probabilidade. No decorrer deste trabalho apresentamos algumas propriedades notáveis destas medidas de probabilidade.

Seja então Ω o conjunto dos números *irracionais* do intervalo $(0,1)$, $\mathfrak{A} := \Omega \cap \mathfrak{B}^1$ a σ-álgebra dos sub-conjuntos borelianos de Ω, e λ a clássica medida de LEBESGUE. Deste modo, $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ é um espaço de probabilidade completo. Consideremos ω como sendo o ponto genérico de Ω. Então, o desenvolvimento de ω em fracção contínua regular será designado do seguinte modo (compare-se, e. g. com [6], [7], ou [14]):

$$(1.1) \qquad \omega = [0;\ a_1(\omega),\ a_2(\omega), \cdots].$$

Os *termos* da fracção contínua são funções de ω, e por isso os designamos por $a_i(\omega)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$.

Como $\omega \in \Omega$, então necessàriamente que $a_0(\omega) = 0$.

Além disso, $a_i(\omega)$ $(i \geq 1)$ é sempre um inteiro positivo.

Não é completamente evidente o facto de as funções $a_i(\omega)$ serem variáveis aleatórias definidas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$, mas tal facto será justificado mais adiante.

Em todo este artigo utilizaremos as notações clássicas usadas na teoria das fracções contínuas, de que fazemos aqui apenas um breve resumo.

A *reduzida* (ou *convergente*) de ordem n de ω é o número (racional)

$$(1.2) \qquad \frac{A_n(\omega)}{B_n(\omega)} = [0;\ a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega)],$$

cujas *constituintes* $A_n(\omega)$ e $B_n(\omega)$ se podem calcular pelo processo iterativo seguinte:

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} A_{n+1}(\omega) &= a_{n+1}(\omega) \cdot A_n(\omega) + A_{n-1}(\omega) \\ B_{n+1}(\omega) &= a_{n+1}(\omega) \cdot B_n(\omega) + B_{n-1}(\omega) \\ & \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

onde se estabelece a convenção:

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} A_{-1} &:= 1, \qquad & A_0 &:= 0 \\ B_{-1} &:= 0, \qquad & B_0 &:= 1. \end{aligned}$$

A *relação modular* seguinte (veja-se, e. g. [6], [7], ou [14]) será utilizada mais abaixo:

$$(1.5) \qquad A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \quad (n \geq 0).$$

(Sempre que não seja necessário, omitiremos os argumentos). De grande importância é a seguinte

DEF. (KHINCHIN [7, pág. 56]). *Intervalo fundamental de ordem* n, é o conjunto

$$(1.6)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n} := \\ = \{\omega : a_i(\omega) = k_i\,;\ i = 1, \cdots, n\},$$

onde os k_i's são todos inteiros positivos, ou seja, $k_i = 1, 2, \cdots$.

Nota: De facto, $\Delta^{(n)} \subset \Omega$, de modo que a designação de *intervalo* é utilizada aqui apenas por razões de consistência com a terminologia usada quando se admitem também os números racionais no conjunto fundamental Ω.

Se puzermos $A_n/B_n := [0\,; k_1, \cdots, k_n]$, então é um facto conhecido que

$$(1.7)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n} = \begin{cases} \left(\dfrac{A_n}{B_n}, \dfrac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}\right) \cap \Omega, & \text{se } n = 2\nu \\[2ex] \left(\dfrac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}, \dfrac{A_n}{B_n}\right) \cap \Omega, & \text{se } n = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Nota: A_n/B_n é um número racional, quaisquer que sejam os k_i's (inteiros positivos), de modo que $\Delta^{(n)}$ pode considerar-se de facto como um intervalo aberto, na topologia induzida por Ω nos sub-conjuntos de $(0, 1)$.

Um aspecto importante que salientamos aqui, e que se prova fàcilmente, é que os intervalos fundamentais de todas as ordens geram a σ-álgebra $\mathfrak{A}$.

DEF. Chamaremos *rede* (de $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$) a toda a sucessão $\{\mathfrak{N}_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ de sub-classes de $\mathfrak{A}$, tal que:

(*i*) os conjuntos de $\mathfrak{N}_n$ são disjuntos dois a dois e $\bigcup \mathfrak{N}_n = \Omega$;

(*ii*) se $A \in \mathfrak{N}_n$, então $\lambda(A) > 0$;

(*iii*) se $A \in \mathfrak{N}_n$, então é

$$A = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{N}_{n+1} \text{ e } B \subset A\}.$$

Uma consequência imediata é o seguinte

TEOREMA 1. *A sucessão das classes*

$$\mathfrak{N}_n = \{\Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n}\,;\ k_i = 1, 2, \cdots\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

é uma rede.

DEM. (*ii*) é de verificação imediata, atendendo às relações (1.5) e (1.7). De facto, tem-se

$$(1.8)\qquad \lambda(\Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n}) = \frac{1}{B_n(B_n + B_{n-1})} > 0,$$

qualquer que seja $n = 1, 2, \cdots$.

(*i*) e (*iii*) são uma consequência directa de (1.6), pois que fixados $k_1, \cdots, k_n$ se tem

$$(1.9)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^{(n+1)}_{k_1,\dots,k_n,\nu}$$

com uma união disjunta de intervalos fundamentais de ordem $n+1$ (RICHTER [12]). Q. E. D.

As medidas de probabilidade geradas por $a_i(\omega) = k_i$, $i = 1, \cdots, n$ (consideradas sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{A})$) são definidas sobre os intervalos fundamentais de ordem n, por relações do tipo:

$$(1.10)\qquad P(\Delta^{(n)}_{k_1,\dots,k_n}) =: p(k_1, \cdots, k_n).$$

Compare-se com BILLINGSLEY [3, (3.12)].

E agora é evidente que as funções $a_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ são variáveis aleatórias relativamente aos dois espaços de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ e $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, i. e. são $\mathfrak{A}$-mensuráveis (e portanto também P- e λ-mensuráveis), uma vez que são funções simples definidas em Ω, ou seja, para $\omega \in \Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}$ tem-se

$$(1.\ 11) \qquad a_n(\omega) = k_n .$$

2. Uma condição necessária e suficiente para que P seja singular

Nesta secção demonstraremos o seguinte

Teorema 2. $\mathrm{P} \perp \lambda \Longleftrightarrow$

$$(2.\ 1) \qquad \lambda\left(\omega : \lim_{n \to \infty} \mathrm{B}_n^2(\omega) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{a}_1(\omega), \cdots \right.$$
$$\left. \cdots, \mathrm{a}_n(\omega)) = 0\right) = 1 .$$

Nota: Usamos a notação $P \perp \lambda$ para denotar que P é uma medida *singular* relativamente à medida de Lebesgue, i. e. admite um *suporte* (conjunto $A \in \mathfrak{A}$, tal que $P(A) = 1$), disjunto de algum suporte de λ.

Dem. Fixemos n. Então a função

$$(2.\ 2) \qquad x_n(\omega) := \sum_{\Delta^{(n)} \in \mathfrak{N}_n} I_{\Delta^{(n)}} \frac{P(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n})}{\lambda(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n})},$$

é definida para todos os $\omega \in \Omega$; mais concretamente, para $\omega \in \Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}$, é:

$$(2.\ 3) \qquad x_n(\omega) = P(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}) / \lambda(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}) =$$
$$= B_n(\omega) \cdot [B_n(\omega) + B_{n-1}(\omega)] \cdot$$
$$\cdot\, p(a_1(\omega), \cdots a_n(\omega)),$$

onde usamos as relações (1. 8), (1. 10) e (1. 11). Ora, como em virtude do Teorema 1, $\{\mathfrak{N}_n\}$ é uma rede, logo se conclui que (cf. Doob [4, pg. 612 e 343] e Hewitt and Stromberg [5, pg. 343]):

(*i*) $\lim_{n \to \infty} x_n(\omega) =: x_\infty(\omega)$ existe p. p.; e,

(*ii*) $P \perp \lambda \Longleftrightarrow x_\infty(\omega) = 0\,[\lambda]$,

uma vez que, por definição, $x_\infty(\omega)$ é a derivada de P em ordem a λ, relativamente à rede $\{\mathfrak{N}_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Ora, como (1. 3) implica

$$0 < B_{n-1}(\omega) < B_n(\omega),$$

segue-se que

$$B_n^2(\omega) \cdot p(a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega)) < x_n(\omega) <$$
$$< 2\, B_n^2(\omega) \cdot p(a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega))$$

e por isso (*i*) e (*ii*) acarretam a veracidade do Teorema. Q. E. D.

Nota: Uma outra demonstração deste Teorema usa a propriedade da sucessão (2. 2) ser uma *martingala* (cf. Doob [4, Cap. VII]). De facto,

$$E(x_n \mid x_1, \cdots, x_{n-1}) =$$
$$= E(x_n \mid a_1, \cdots, a_{n-1}) = x_{n-1}[\lambda],$$

onde $E(.|.)$ designa o valor esperado da primeira variável aleatória, condicionado pelas seguintes, tomado relativamente a P.

3. A singularidade de P, no caso das variáveis aleatórias $a_i(\omega)$ serem independentes

Consideremos agora o caso seguinte:

$$(3.\ 1) \qquad p(k_1, \cdots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(k_i),$$

onde $p_i(k) > 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} p_i(k) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots)$.

Isto é, por definição, o que sucede quando as variáveis aleatórias $a_i(\omega)$ são independentes (relativamente a P), ou seja,

$$(3.2) \quad P(\omega : a_i(\omega) = k_{i'} \ \& \ a_j(\omega) = k_{j'}) = \\ = P(\omega : a_i(\omega) = k_{i'}) \cdot P(\omega : a_j(\omega) = k_{j'}),$$

para todos os $i \neq j$. Para simplificar a notação escreveremos:

$$(3.3) \qquad p_i(k) := P(\omega : a_i(\omega) = k),$$

onde, evidentemente, $i \geq 1$ e $k = 1, 2, \cdots$.

Em primeiro lugar provaremos o seguinte

LEMA. $a_i(\omega)$'s *independentes* $\Rightarrow$ *a medida de probabilidade* P *é:*

α) *puramente atómica; ou,*

β) *não-atómica e singular; ou,*

γ) *absolutamente contínua.*

DEM. A demonstração deste Lema envolve algumas dificuldades. Por isso, após algumas extensões da teoria desenvolvida, provaremos sucessivamente:

1.º Que, em certas condições, P satisfaz α);

2.º Que se P não satisfaz nem α) nem γ), então satisfaz β);

3.º O caso γ) não será demonstrado ($P << \lambda$ é, até mesmo, impossível, como se verá pelo TEOREMA 3), uma vez que se P não satisfizesse nem α), nem β), então necessàriamente (aplicando o clássico teorema de LEBESGUE-RADON-NIKODYM) teria de satisfazer γ).

I. Dada a probabilidade P, suponhamos que $P(A) > 0$ para um certo $A \in \mathfrak{A}$ (um tal conjunto existe sempre, pois que $P(\Omega) = 1$). Associemos a A o conjunto A^* dos irracionais *equívalentes* (cf. VICENTE GONÇALVES [14, pg. 129] ou HARDY and WRIGHT [6, (10. 11)]), aos irracionais de A, i. e.

$$(3.4) \qquad A^* := \{\omega : \exists\, n_0 = n_0(\omega) \ \text{e} \\ \omega_0 \in A \ni a_i(\omega) = a_i(\omega_0), \ i > n_0\}.$$

Se introduzirmos o *resto de ordem* n de ω,

$$(3.5) \qquad r_n(\omega) := [a_n(\omega); a_{n+1}(\omega), \cdots]$$

é

$$A^* = \{\omega : r_{n_0}(\omega) = r_{n_0}(\omega_0), \omega_0 \in A\}.$$

Nota: $r_n(\omega)$ é, para cada ω, um número irracional do intervalo $(1, \infty)$. De facto, $a_n(\omega) \geq 1$, e $[0; a_{n+1}(\omega), \cdots] \in \Omega)$.

É claro que $A \subset A^*$ e como A^* é *o conjunto dos pontos* ω *para os quais a sucessão de variáveis aleatórias independentes* $a_1(\omega)$, $a_2(\omega), \cdots$ *é convergente,* usando a lei de KOLMOGOROV (cf. RICHTER [12]), logo se conclui que $P(A^*) = 0$ ou $P(A^*) = 1$; mas como $P(A) > 0$ é então, necessàriamente,

$$(3.6) \qquad P(A^*) = 1.$$

Por outro lado (cf. HARDY and WRIGHT [6]), $\omega \in A^* \Longleftrightarrow$ para algum $\omega_0 \in A$ se encontram inteiros positivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ e $\omega = (\alpha\omega_0 + \beta)/(\gamma\omega_0 + \delta)$.

Se definirmos (*sempre* com $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$)

$$(3.7) \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} := \{\omega : \omega = (\alpha\omega_0 + \beta)/ \\ /(\gamma\omega_0 + \delta), \omega_0 \in A\},$$

então fàcilmente se vê que

$$(3.8) \qquad A^* = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} A_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

onde os conjuntos $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ constituem as diferentes classes de equivalência.

II. Passemos agora à demonstração do Lema pròpriamente dito:

1.º Suponhamos que o conjunto A, considerado em I é numerável. Então, evidentemente que os $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ são também todos numeráveis e por consequência A^* é numerável. Então P é medida puramente atómica, pois que

$$(3.9) \quad P(A^*) = 1 \Rightarrow P(\Omega - A^*) = 0,$$

com A^* numerável, e α) está demonstrada.

2.º Suponhamos agora que P não satisfaz α) (i. e., em virtude de 1.º, que A não é numerável). Suponhamos ainda que P não é absolutamente contínua. Então, para um certo $A \in \mathfrak{A}$ será $P(A) > 0$ com $\lambda(A) = 0$, e portanto $P(A^*) = 1$, tal como em I. Mas $\lambda(A) = 0$ implica $\lambda(A_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0$ para todos os $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfazendo a condição $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, uma vez que a medida de LEBESGUE é invariante relativamente a transformações lineares. E por conseguinte, (3. 8) implica

$$(3.10) \qquad \lambda(A^*) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \lambda(A_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0.$$

O teorema de LEBESGUE-RADON-NIKODYM aplicado a P implica então que P é medida não-atómica (se A fosse um átomo de $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ então necessàriamente A seria um destes conjuntos, acarretando uma contradição, pois A teria de ser ou numerável, ou conjunto de continuidade de P), demonstrando β).

3.º Evidentemente que se P não satisfaz α) nem β), então necessàriamente tem de ser tal que $P \ll \lambda$, pois $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ é òbviamente um espaço de probabilidade regular (cf. HEWITT and STROMBERG [5, (12. 39)]), relativamente à topologia induzida por Ω. Q. E. D.

E posto isto passamos finalmente ao

TEOREMA 3. (CHATTERJI). $a_i(\omega)$*'s independentes* $\Rightarrow$

a) $P \perp \lambda$;

b) *a medida de probabilidade* P *é*:

  α) *puramente atómica; ou*

  β) *não-atómica.*

DEM.: Atendendo ao Lema, basta provar a impossibilidade de $P \ll \lambda$, pois que tanto nos casos 1.º como 2.º (cf. (3. 9) e (3. 10) resp.) do Lema se encontraram sempre suportes A^* para P, com $\lambda(A^*) = 0$, provando a).

A demonstração vai fazer-se por redução ao absurdo, admitindo que de facto se pode ter $P \ll \lambda$.

Recapitulemos aqui o seguinte TEOREMA, devido a GAUSS (veja-se e. g. BILLINGSLEY [3, (4. 11)] ou KHINCHIN [7, pg. 72]):

Com $\omega \in \Omega$, *tem-se* $(0 < x < 1)$:

$$(3.11) \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r_n(\omega)^{-1} < x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Este teorema, formulado por GAUSS pela primeira vez em 1812, numa carta dirigida a LAPLACE (reproduzida no livro de J. V. USPENSKI (1937), *Introduction to Mathematical Probability*, New York: MC-GRAW-HILL), só foi demonstrado em 1928 por R. O. KUZMIN e, independentemente, em 1929 por P. LÉVY, a quem se deve uma generalização que iremos utilizar abaixo.

Ora, do teorema de Gauss conclui-se que:

$$(3.\,12)\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r^n(\omega) < t) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r^n(\omega)^{-1} < t^{-1}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\log 2}\log(1+\frac{1}{t}) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\frac{2t}{1+t}.$$

Até aqui nada concluimos de novo. O facto que aqui utilizamos é o seguinte

Teorema de Lèvy. *Se* $P << \lambda$, *então* (3. 12) *é válida com* P *em lugar de* λ.

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez em 1937 ([10]), utilizando complicados métodos analíticos. No entanto, existem actualmente outras demonstrações mais simples, em especial as que utilizam o teorema ergódico, de que não nos ocuparemos aqui.

Então, voltando à demonstração do Teorema 3, se fosse $P << \lambda$, utilizando (3. 12) com P em vez de λ, temos o seguinte resultado:

$$(3.\,13)\qquad \lim_{n\to\infty} P(\omega : a_n(\omega) = k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\omega : k < r_n(\omega) < k+1) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2(k+1)}{k+2} - \log\frac{2k}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

(Compare-se com Billingsley [3, pg. 45]). Por outro lado é

$$(3.\,14)\quad \lim_{n\to\infty} P(\omega : a_n(\omega) = k_1 \;\&\; a_{n+1}(\omega) = k_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : k_1 + \frac{1}{k_2+1} < r_n(\omega) < k_1 + \frac{1}{k_2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1} < r_n(\omega) < \frac{k_1k_2+1}{k_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2\,\frac{k_1k_2+1}{k_2}}{\frac{k_1k_2+1}{k_2}+1} - \log\frac{2\,\frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1}}{\frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1}+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\left[\frac{k_1k_2+1}{k_2(k_1+1)+1}\cdot\frac{(k_2+1)(k_1+1)+1}{k_1(k_2+1)+1}\right].$$

E da independência das variáveis aleatórias $a_i(\omega)$, usando (3. 2) e passando aos limites para $n\to\infty$, de (3. 13) e (3. 14) deverá vir

$$\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{\log 2}\log\frac{(k_i+1)^2}{k_i(k_i+2)}\right] = \frac{1}{\log 2}\log\left[\frac{k_1k_2+1}{k_2(k_1+1)+1}\cdot\frac{(k_2+1)(k_1+1)+1}{k_1(k_2+1)+1}\right].$$

Ora, esta igualdade é falsa. Punhamos, e.g. $k_1 = k_2 = 1$; viria

$$\left[\frac{1}{\log 2}\log\frac{4}{3}\right]^2 = \frac{1}{\log 2}\log\frac{10}{9},$$

o que é uma contradição relativamente à hipótese de que $P << \lambda$. Q. E. D.

4. Aplicações.

O TEOREMA 3 é devido a CHATTERJI [2], cuja demonstração seguimos de perto, excepto no que respeita a uma condição necessária e suficiente de atomicidade de P, inicialmente devida a VAN KAMPEN. Aquele Autor aplica o Teorema para demonstrar a singularidade da função de MINKOWSKI, já antes provada por KINNEY [9]. Um outro aspecto da teoria refere-se à dimensão de HAUSDORFF (generalizada por BILLIGSLEY; veja-se e. g. [3] e a bibliografia aí citada) dos suportes de P. De grande interesse neste domínio são os trabalhos recentes de CHATTERJI [1], KINNEY and PITCHER [8] e ROOS [13], tratando estes últimos várias questões que se prendem de perto com o expôsto aqui. O estudo de certas questões relativas à teoria das fracções contínuas usando métodos probabilísticos é apenas um exemplo das múltiplas aplicações da Teoria das Probabilidades à Análise Matemática e à Teoria dos Números.

Nota: Já depois deste trabalho ter sido submetido para publicação deparou-se-nos uma demonstração extremamente elegante da propriedade relativa às *martingalas*, a que nos referimos na *Nota* a seguir à demonstração do TEOREMA 2, no livro de PAUL A. MEYER, *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Massachusets (1966).

Para uma bibliografia mais extensa relativa às aplicações de métodos probabilísticos e das fracções contínuas à Análise, à Teoria dos Números Reais e à Teoria do Potêncial, consulte-se também: J. MARQUES HENRIQUES, *Hausdorff-Besicovitch Dimension For Probability Product Spaces*, Master's Paper, Department of Statistics, The University of Chicago, Chicago, Illinois (1967).

BIBLIOGRAFIA

[1] CHATTERJI, S. D., *Certain induced measures and the fractional dimensions of their «supports»*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **3** 184-92, (1964).

[2] ———, *Masse, die von regelmässigen Kettenbrüchen induziert sind*, Math. Ann. **164** 113-7, (1966).

[3] BILLINGSLEY, P., *Ergodic Theory and Information*, John Wiley and Sons, New York, (1965).

[4] DOOB, J. L., *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, New York, (1953).

[5] EWITT, E. and STROMBERG, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1965).

[6] HARDY, G. H. and WRIGHT, E. M., *An Introduction to the Teory of Numbers*, 4th edition, Oxford University Press, London, (1959).

[7] KHINCHIN, A. YA, *Continued Fractions*, 3rd edition. The University of Chicago Press, Chicago, (1964).

[8] KINNEY, J. R. and PITCHER, T. S., *The dimension of some sets defined in terms of f-expansions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **4** 294-315 (1966).

[9] KINNEY, J. R., *Note on a singular function of Minkowski*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 788-94, (1960).

[10] LÉVI, P., *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, (1937).

[11] PERRON, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, **1**, 3. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, (1954).

[12] RICHTER, H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, (1966).

[13] ROOS, P. *Iterierte Resttransformationen von Zahldarstellungen*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **4** 45-63, (1965).

[14] VICENTE GONÇALVES, J., *Curso de Álgebra Superior*, **1**, 3.ª edição, Lisboa, (1953).