Introdução a um espaço complexo de fase

por F. Teixeira de Queiroz

Num artigo anterior, (G. M. n.º 96-97), mostrámos algumas propriedades dos operadores $\frac{D}{Dz}$ e $\frac{D}{D\bar{z}}$ que à função $f(z)$, definida nas vizinhanças do ponto z_0, faziam corresponder, sempre que os limites existiam, as funções que tomavam nesse ponto os valores

$$\frac{Df}{Dz}=\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$
$$\frac{Df}{D\bar{z}}=\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}dz$$

em que R era o raio do círculo Γ de centro z_0. Vimos em particular que para uma classe muito geral de funções (Funções de classe C_p) esse limite existia e, com $z=x+iy$ e $f(z)=X(x,y)+iY(x,y)$, era

$$\frac{Df}{Dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$
$$\frac{Df}{D\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Neste artigo aplicaremos duma forma sistemática esses dois operadores mostrando o seu interesse no estudo das variedades simpléticas.

I — O formalismo canónico.

Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ $2n$ variáveis conjugadas e $H(x_1, \cdots, y_n, t)$ uma função de Hamilton que caracteriza um dado sistema mecânico. Como é sabido da mecânica analítica, a evolução do referido sistema é dada pelas $2n$ equações canónicas

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Associemos a todo o par de variáveis conjugadas x_j, y_j uma unidade imaginária i e formemos a variável complexa $z_j=x_j+iy_j$. Em tais condições o sistema de equações canónicas escrever-se-á

$$\frac{dz_j}{dt}=\frac{dx_j}{dt}+i\frac{dy_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_j}-i\frac{\partial H}{\partial x_j}$$

ou seja

$$(2)\qquad \frac{dz_j}{dt}=\frac{2}{i}\frac{DH}{D\bar{z}_j}$$

em que H é agora uma função real das variáveis complexas $z_1, \cdots, z_n$ e da variável real t.

Um outro sistema de equações canónicas é obtido de (2) por passagem às conjugadas:

$$(2')\qquad \frac{d\bar{z}_j}{dt}=-\frac{2}{i}\frac{DH}{Dz_j}.$$

Não o consideraremos distinto do anterior.

A partir dos sistemas de equações deduzidos vemos que

$$(3)\qquad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum\frac{DH}{Dz_j}\,\frac{dz_j}{dt}+ +\sum\frac{DH}{D\bar{z}_j}\cdot\frac{d\bar{z}_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

anulando-se o segundo membro sempre que H não dependa explicitamente de t.

Fazendo depender as n variáveis z_i de n novas variáveis u_i, passará H a ser função das novas variáveis e da variável t. É fácil determinar as condições para que o sistema de equações (2) continue a ser canónico. Seja $z_i=F_i(u_1,u_2,\cdots,u_n,t)$. Será então

$$\frac{dz_j}{dt}=\frac{\partial z_j}{dt}+\sum\frac{Dz_j}{Du_k}\cdot\frac{du_k}{dt}+ +\sum\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{u}_k}{dt}=\frac{2}{i}\,\frac{DH}{D\bar{z}_j}$$

e ainda

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt}=\frac{\partial\bar{z}_j}{dt}+\sum\frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\cdot\frac{du_k}{dt}+ +\sum\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\cdot\frac{d\bar{u}_k}{dt}=-\frac{2}{i}\,\frac{DH}{Dz_j}.$$

Multiplicando a primeira destas equações por $\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}$, e a segunda por $\frac{Dz_j}{Du_r}$ e subtraindo-as virá

$$\sum_j\left(\frac{\partial z_j}{dt}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{\partial\bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)+ +\sum_j\left(\frac{Dz_j}{Du_k}\cdot\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)\frac{du_k}{dt}+ +\sum_j\left(\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\cdot\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)\frac{d\bar{u}_k}{dt}= =\frac{2}{i}\,\frac{DH}{Du_r}$$

o que conduz às condições

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\sum_j\left(\frac{\partial z_j}{\partial t}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{\partial\bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)= =-\frac{2}{i}\,\frac{D\varphi}{Du_r}\\ &\sum_j\left(\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)= =-\delta_{\bar{k}r}\\ &\sum_j\left(\frac{Dz_j}{Du_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r}-\frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)=0\end{aligned}$$

que são equivalentes às deduzidas com colchetes de LAGRANGE, e onde φ é uma função real das variáveis u_i.

Por passagem às conjugadas deduziremos outras relações que serão equivalentes às anteriores. São elas

$$(4')\qquad \begin{aligned}&\sum_j\left(\frac{\partial\bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}-\frac{\partial z_j}{\partial t}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\right)= =\frac{2}{i}\,\frac{D\varphi}{D\bar{u}_k}\\ &\sum_j\left(\frac{Dz_j}{Du_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_r}-\frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_r}\right)=\delta_{k\bar{r}}\\ &\sum_j\left(\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_r}-\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_r}\right)=0.\end{aligned}$$

Duma forma análoga deduzem-se as igualdades que correspondem às obtidas com os parentesis de POISSON. Para isso basta tratarem-se os segundos membros de (2) e (2') duma forma análoga à que usamos com os primeiros membros na dedução das igualdades anteriores. Obtém-se como resultado final

$$\sum_j \left(\frac{D\varphi}{D\bar{u}_j} \frac{Dz_k}{Du_j} - \frac{D\varphi}{Du_j} \frac{Dz_k}{D\bar{u}_j} \right) + \frac{\partial z_k}{\partial t} = 0 .$$

(5)

$$\sum_j \left(\frac{Dz_k}{D\bar{u}_j} \frac{Dz_r}{Du_j} - \frac{Dz_k}{Du_j} \frac{Dz_r}{D\bar{u}_j} \right) = 0$$

$$\sum_j \left(\frac{D\bar{z}_k}{D\bar{u}_j} \frac{Dz_r}{Du_j} - \frac{D\bar{z}_k}{Du_j} \frac{Dz_r}{D\bar{u}_j} \right) = \delta_{\bar{k}r}$$

e três outras igualdades dadas por conjugação.

Por último a condição de POINCARÉ transcrever-se-á da seguinte forma:

É condição necessária e suficiente para que uma dada transformação seja canónica que exista uma função ψ tal que

$$(6) \quad D\psi = \bar{z}_j Dz_j - \bar{u}_j Du_j + \frac{2}{i}(\bar{H} - H)\,dt$$

em que $\bar{H}$ é o novo Hamiltoneano.

Para o verificarmos basta reparar que a condição necessária e suficiente para que exista uma função ψ tal que

$$D\psi = \sum_j (A_j D\bar{z}_j + B_j Dz_j)$$

é que

$$w_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{DA_i}{D\bar{z}_j} - \frac{DA_j}{D\bar{z}_i} = 0$$

$$w_{i\bar{j}} = \frac{DB_i}{D\bar{z}_j} - \frac{DA_j}{Dz_i} = 0$$

$$w_{ij} = \frac{DB_i}{Dz_j} - \frac{DB_j}{Dz_i} = 0 .$$

No nosso caso poderemos dar a (6) a forma

$$(6') \quad D\varphi = \sum_j \left(\bar{z}_j - \sum_r \bar{u}_r \frac{Du_r}{Dz_j} \right) Dz_j - \sum_j \sum_r \bar{u}_r \cdot \frac{Du_r}{D\bar{z}_j} D\bar{z}_j + \frac{2}{i} \left(\bar{H} - H - \bar{u}_r \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) dt$$

e virá portanto

$$w_{jk} = \frac{D\bar{z}_j}{Dz_k} + \sum_r \Bigg(- \frac{D\bar{u}_r}{Dz_k} \cdot \frac{Du_r}{Dz_j} - \bar{u}_r \frac{D^2 u_r}{Dz_j Dz_k} - \frac{D\bar{z}_k}{Dz_j} + \frac{D\bar{u}_r}{Dz_j} \frac{Du_r}{Dz_k} + \bar{u}_r \frac{D^2 u_r}{Dz_k Dz_j} \Bigg) = \sum_r \left(\frac{D\bar{u}_r}{Dz_j} \frac{Du_r}{Dz_k} - \frac{Du_r}{Dz_j} \frac{D\bar{u}_r}{Dz_k} \right)$$

$$w_{j\bar{k}} = \delta_{j\bar{k}} + \sum_r \left(- \frac{D\bar{u}_r}{D\bar{z}_k} \frac{Du_k}{Dz_j} + \frac{D\bar{u}_r}{Dz_j} \frac{Du_r}{D\bar{z}_k} \right)$$

$$w_{\bar{j}\bar{k}} = \sum_r \left(- \frac{D\bar{u}_r}{D\bar{z}_k} \frac{Du_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{D\bar{u}_r}{D\bar{z}_j} \frac{Du_r}{D\bar{z}_k} \right)$$

e, de (6)

$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} + \frac{2}{i} \frac{\partial H}{\partial z_i} = 0 \qquad \frac{d\bar{u}_j}{dt} + \frac{2}{i} \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 .$$

Vê-se que o anulamento de $w_{ij}, w_{i\bar{j}}$, e $w_{\bar{i}\bar{j}}$ é verificado sempre que se verifiquem as condições (4) e (4'). Em tais condições as transformações que verificam (6) são canónicas.

A dedução do método de JACOBI para a integração das equações do movimento (2) não oferece dificuldade. Pelo que vimos anteriormente, o hamiltoneano num espaço complexo de configuração é obtido por meio da substituição $q_i = \frac{z_i + \bar{z}_i}{2}$ e $p_i = \frac{z_i - \bar{z}_i}{2i}$. A partir de H formemos a equação diferencial

$$(7) \qquad H\left(z_i, \frac{\partial S}{\partial z_i} \right) = E$$

ou

$$(7') \qquad H\left(t, z_i, \frac{\partial S}{\partial z_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

conforme H dependa ou não de t e onde $\bar{z}_j$ é substituído por $\frac{\partial S}{\partial z_i}$. Se designarmos por $S(z_i, \alpha_i)$ ou $S(t, z_i, \alpha_i)$ o integral geral da equação, que será uma função holomorfa de z_i e de α_i, vemos de (7), que ele satisfaz às equações

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{DH}{Dz_i} + \sum_j \frac{DH}{D\bar{z}_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_j} = 0 \\ &\sum_j \frac{DH}{D\bar{z}_j} \cdot \frac{\partial S}{\partial \alpha_i \partial z_j} = 0 \end{aligned}$$

ou, por (2), a

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{2}{i} \frac{DH}{Dz_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial z_j \partial z_i} \frac{dz_i}{dt} = 0 \\ &\sum \frac{\partial^2 S}{\partial z_j \partial \alpha_i} \cdot \frac{dz_j}{dt} = 0 \end{aligned}$$

que mostram que

$$(10) \qquad \bar{z}_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}$$

satisfaz às equações (2') e em que α_i são constantes de integração. A demonstração no caso (7') em que H depende explìcitamente de t não difere da anterior.

3) — O espaço Z_n.

Seja $\mathcal{V}_n$ um espaço vectorial sobre o corpo dos números complexos referido a uma base (e_i). Todo o vector de $\mathcal{V}_n$ é determinado por n números complexos $x^1, x^2, \cdots, x^n$. Evidentemente, o mesmo vector ficará igualmente determinado se em vez dos n valores x^i, conhecermos os seus conjugados $\overline{x^i}$.

Dada uma mudança de bases, as novas componentes dos vectores de $\mathcal{V}_n$ estão relacionadas com as antigas por uma transformação da forma

$$(1) \qquad x'^i = \sum_j \alpha^i_j x^j .$$

Por passagem à conjugada, vemos que a mesma transformação dá origem às transformações

$$(1') \qquad \overline{x'^i} = \sum_j \overline{\alpha^i_j}\, \overline{x^j} .$$

entre as conjugadas das componentes. Diremos que tanto os n números complexos x^i como os seus conjugados são componentes do mesmo vector, sendo as primeiras de primeira espécie e as segundas de segunda espécie. Representaremos as primeiras por x^i e as segundas por $x^{\bar{i}}$. As leis de transformação duma e de outras numa mudança de bases são dadas por (1) e (1'). Da definição dada verifica-se a identidade

$$(2) \qquad \overline{x^i} \equiv x^{\bar{i}} .$$

As transformações (1) e (1') não constituem as transformações mais gerais que que conservam o conceito de componentes de primeira e de segunda espécie (ou seja a identidade (2)). Com efeito elas não são mais do que um caso particular das transformações do tipo

$$(3) \qquad \begin{aligned} x'^i &= \sum_j \alpha^i_j x^j + \sum_{\bar{j}} \alpha^i_{\bar{j}}\, x^{\bar{j}} \\ x'^{\bar{i}} &= \sum_j \alpha^{\bar{i}}_j x^j + \sum_{\bar{j}} \alpha^{\bar{i}}_{\bar{j}}\, x^{\bar{j}} \end{aligned}$$

com

$$(3') \qquad \overline{\alpha^i_j} = \alpha^{\bar{i}}_{\bar{j}} \quad \text{e} \quad \overline{\alpha^i_{\bar{j}}} = \alpha^{\bar{i}}_j .$$

Esta última transformação depende de $2n$ parâmetros. Não pode ser identificado com uma mudança de bases do espaço $\mathcal{V}_n$ visto que sempre que algum $\alpha_{\bar{j}}^{i}$ seja diferente de zero, os novos vectores de base não dependem linearmente dos antigos. Apesar disso, as novas componentes $x'^{\bar{i}}$ ou x'^{i} determinam ainda unìvocamente os vectores de $\mathcal{V}_n$.

No formalismo que agora desenvolvemos vamos considerar a família de objectos (a que damos o nome de vectores) determinados por $2n$ números complexos, verificando a igualdade (2), sobre os quais definimos as operações adição de vectores e multiplicação por um escalar real por tal forma que aos vectores x^i, y^i corresponda, por adição o vector $x^i + y^i$ e ao vector x^i, corresponda por multiplicação pelo escalar real α, o vector αx^i e, além disso, que se transformam numa mudança de bases, segundo transformações (3).

Conservaremos para as transformações (3) (3′) o nome de mudança de bases. Como o leitor fàcilmente vê, os conceitos dados de adição de vectores e multiplicação por escalar real são consistentes para uma tal família de transformações.

O conceito de vector pode ser generalizado pelo abandono da propriedade (2). Chamaremos tensores monovalentes aos objectos geométricos determinados por $2n$ complexos sobre os quais são definidas do modo usual a adição e multiplicação por um escalar complexo e que se transforma numa mudança de bases segundo (3).

A partir do conceito de tensor podemos formar o conceito de produto tensorial e o de tensor polivalente. Importa salientar que, no formalismo aqui desenvolvido, um tensor bivalente, além das componentes U_{ij} e $U_{\bar{i}\bar{j}}$, tem ainda as componentes $U_{\bar{i}j}$ e $U_{i\bar{j}}$. Diremos que um tensor bivalente tem quatro folhas de índices.

A partir da lei de transformação das componentes dum tensor monovalente numa mudança de bases podemos deduzir a lei de transformação dum tensor de valência qualquer. Assim, a lei de transformação dum tensor bivalente será

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
'U_{ij} &= \alpha_i^r \alpha_j^s U_{rs} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_i^r \alpha_j^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
'U_{\bar{i}j} &= \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_j^s U_{rs} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_j^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_j^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
'U_{i\bar{j}} &= \alpha_i^r \alpha_{\bar{j}}^s U_{rs} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
'U_{\bar{i}\bar{j}} &= \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^s U_{rs} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}}
\end{aligned}
$$

em que os coeficientes α_i^j, $\alpha_{\bar{i}}^j$, $\alpha_i^{\bar{j}}$ e $\alpha_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ verificam ainda a igualdade (3′). Em consequência um tensor que verifique as igualdades

$$
(5)\qquad U_{ij} = \overline{U}_{\bar{i}\bar{j}} \quad \text{e} \quad U_{i\bar{j}} = \overline{U}_{\bar{i}j}
$$

numa base verificá-las-á em todas as outras. O mesmo se pode dizer dum tensor que verifique em alguma base alguma das coleções de igualdades

$$(6)\qquad U_{ij} = U_{ji}\,,\; U_{\bar{i}\bar{j}} = U_{\bar{j}\bar{i}}\,,\; U_{\bar{i}j} = U_{j\bar{i}}$$

$$(7)\qquad U_{ij} = -\,\overline{U}_{\bar{i}\bar{j}}\,,\; U_{\bar{i}j} = -\,\overline{U}_{i\bar{j}}$$

$$(8)\qquad U_{ij} = -U_{ji}\,, U_{\bar{i}\bar{j}} = -U_{\bar{j}\bar{i}}\,, U_{\bar{i}j} = -U_{j\bar{i}}$$

$$(9)\qquad U_{ij} = \overline{U}_{\bar{j}\bar{i}}\,,\; U_{\bar{i}j} = \overline{U}_{\bar{j}i}\,.$$

Fica ao cuidado do leitor fazer a demonstração da consistência de tais igualdades.

As considerações de natureza algébrica que temos vindo a fazer ser-nos-ão úteis no estudo da variedade Z_n que passamos a fazer.

Em I, referimo-nos a um espaço geométrico em que cada ponto era definido por n números complexos. Vimos também a importância que tinha para nós uma função H, definida nesse espaço, e que aí tomava valores reais. Designemos então por $\mathcal{F}$ a família de funções de classe C_p definidas no espaço referido e que aí tomam valores reais.

Designemos, além disso, por $\mathcal{A}$ a família de aplicações biunívocas e contínuas do intervalo real $(0, T)$ sobre o referido espaço.

A cada função de $f \in \mathcal{F}$ e cada aplicação $a \in \mathcal{A}$ corresponde então uma função real de variável real definida no intervalo $(0, T)$. É a função de função que resulta da composição delas e que designamos por (f, a). Diremos que uma aplicação de $\mathcal{A}$ admite tangente em P_0 (ponto que corresponde ao valor t_0 da variável definida no intervalo $(0, T)$), se e só se existir em t_0 a derivada da função composta (f, a) acima definida, qualquer que seja a função $f \in \mathcal{F}$.

Podemos agora definir dois operadores de grande importância para o estudo da variedade Z_n.

Consideremos a subfamília de $\mathcal{A}_p$ constituida pelas aplicações de $\mathcal{A}$ que têm tangente em P. Podemos introduzir numa tal família uma relação de equivalência $\sim$ tal que dadas $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ será $a_1 \sim a_2$ se e só se for

$$(f, a_1)' = (f, a_2)'$$

para toda a função $f \in \mathcal{F}$. Às classes de equivalência definidas pela relação $\sim$ daremos o nome de vectores contravariantes definidos em P.

Duma maneira idêntica, podemos definir uma relação de equivalência $\doteq$ entre os elementos da família $\mathcal{F}$. Dadas as funções $f_1, f_2 \in F$ será $f_1 \doteq f_2$ se e só se for

$$(f_1, a)' = (f_2, a)'$$

para toda a aplicação $a \sim \mathcal{A}_p$. Às classes de equivalência definidas por $\doteq$ daremos o nome de vectores còvariantes.

Das definições dadas vemos que a todo o par de vectores cò e contravariantes podemos fazer corresponder um número complexo que será o valor da derivada $(f, a)'$ onde f, a são dois elementos quaisquer das classes de equivalência referidas: Diremos que é o producto escalar dos dois vectores.

Vemos ainda das definições dadas que um vector contravariante pode ser considerado um operador que actua nas funções de $\mathcal{F}$ para dar um número complexo e que um vector covariante pode ser considerado como um operador que aplicado a uma aplicação de $\mathcal{A}_p$ dá um número complexo.

Caracterizemos, agora, mais completamente a variedade Z_n, com que temos vindo a lidar. Vimos já que cada ponto da referida variedade era determinado por n números complexos (ou seja por um ponto do espaço $Z^n = Z_1 Z_2 \cdots Z_n$). Definimos então o espaço Z_n como um espaço conexo tal que cada ponto está contido num aberto homeomorfo a um aberto de Z^n (ao qual daremos o nome de carta local de Z_n), por uma forma tal que dadas duas cartas de Z_n de intersecção não vasia entre as coordenadas dos pontos dessa intersecção numa e noutra carta existe uma transformação constituida por n funções de classe não inferior a C_p. A uma tal transformação dá-se o nome de transformação admissível de cartas.

A uma família de cartas que cobre Z_n dá-se o nome de atlas. Entre as cartas de dois atlas duma mesma variedade existem famílias de transformações admissíveis e com uma transformação admissível é sempre possível introduzir uma nova carta local num dado atlas.

Representada uma variedade Z_n com auxílio dum atlas, toda a aplicação de $\mathcal{A}$ será representada localmente por n funções contínuas $Z^j(t) = X^j(t) + i\, Y^j(t)$ em que t é uma variável definida no intervalo real $(0, T)$. Se ao ponto t_0 interior a $(0, T)$ corresponder o ponto P da variedade a aplicação terá tangente nesse ponto se existir $Z^{j\prime}(t)$.

Com efeito, qualquer que seja $f \epsilon F$ será

$$(10)\qquad \frac{df}{dt}=\sum \frac{Df}{Dz_i}\cdot\frac{dz^i}{dt}+\frac{Df}{D\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dt}$$

e, pela definição dada anteriormente, a tangente existe. Além disso, vemos por esta igualdade, que o vector em P definido pela classe de equivalência que corresponde à tangente referida, ficará determinado no sistema de coordenadas local pelos $2n$ operadores

$$\frac{dz^i}{dt}\,\frac{D}{Dz^i} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{z}^i}{dt}\cdot\frac{D}{D\bar{z}^i} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$\frac{dz^i}{dt}$ e $\frac{d\bar{z}^i}{dt}$ serão então as componentes do vector nas bases $\frac{D}{Dz^i}$ e $\frac{D}{D\bar{z}^i}$. Vemos, por t ser real, que as componentes dum vector são duas a duas conjugadas.

Podemos definir adição de dois vectores ao vector cujas componentes são a soma das componentes desses vectores e produto dum escalar real por um vector ao vector que se obtem multiplicando as componentes do vector pelo escalar real.

Utilizando um sistema de coordenadas local, dados o vector v, os escalares reais α e β, qualquer que aeja $f, g \epsilon \mathcal{F}$ vemos que se tem

$$v(\varphi\cdot f)=\varphi\, v(f)+f\, v(\varphi)$$

e que

$$v(\alpha\varphi+\beta f)=\alpha\, v(\varphi)+\beta\, v(f).$$

De (10) e das definições dadas vemos ainda que o vector còvariante, classe de equivalência associado a f, tem por componentes $\frac{Df}{Dz^i}$ e $\frac{Df}{D\bar{z}^i}$. Além disso por f tomar valores reais vemos que as suas componentes são conjugadas duas a duas.

Dadas duas cartas U e V que contenham o ponto P, existirá uma transformação de coordenadas locais nas vizinhanças de P dada por

$$u^i=f^i(z^j) \qquad (i,j=1\cdots u)$$

em que f^i são funções de classe C_p. As componentes do vector còvariante no novo sistema de coordenadas serão dadas por $\frac{Df}{Du^i}$ e $\frac{Df}{D\bar{u}^i}$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{Df}{Du^i}&=\sum\left(\frac{Df}{Dz^j}\,\frac{Dz^j}{Du^i}+\frac{Df}{D\bar{z}^j}\,\frac{D\bar{z}^j}{Du^i}\right),\\ \frac{Df}{D\bar{u}^i}&=\sum\left(\frac{Df}{D\bar{u}^i}\,\frac{Dz^j}{D\bar{u}^i}+\frac{Df}{D\bar{z}^j}\,\frac{D\bar{z}^j}{D\bar{u}^i}\right). \end{aligned}$$

Anàlogamente as novas componentes dum vector contravariante serão

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{du^i}{dt}&=\sum\left(\frac{dz^j}{dt}\,\frac{Du^i}{Dz_j}+\frac{d\bar{z}^j}{dt}\,\frac{Du^i}{d\bar{z}^j}\right),\\ \frac{d\bar{u}^i}{dt}&=\sum\left(\frac{dz^j}{dt}\,\frac{D\bar{u}^i}{Dz^j}+\frac{d\bar{z}^j}{dt}\,\frac{D\bar{u}^i}{d\bar{z}^j}\right). \end{aligned}$$

A partir dos conceitos de vectores cò e contravariante podemos sem dificuldade introduzir o conceito de tensor.

Estudado o conceito de variedade Z_n voltemos agora ao de espaço complexo de configuração.

Um exame das transformações canónicas mostra-nos que um espaço complexo de configuração não é mais do que uma variedade Z_n onde é definido um tensor bivalente

$$\varepsilon_{jk}=\varepsilon_{\bar{j}\bar{k}}=0$$
$$\varepsilon_{j\bar{k}}=\overline{\varepsilon_{\bar{j}k}}=i\,\delta_{jk}$$

invariante nas transformações de coordenadas locais e onde δ_{ij} é o símbolo de KRO-

NEKER. Somos assim conduzidos como era de esperar ao grupo de transformações simpléticas.

Até aqui temos considerado apenas uma colecção de variáveis z_i que tomam valores no corpo dos números complexos. Porém, pode ver-se que a cada par de variáveis canónicas se associa um e_i tal que $e_i^2 = -1$. É portanto possível associar ao conjunto de variáveis canónicas um grupo de quaterniões G e a cada par de variáveis canónicas x_i y_i um elemento e_i tal que

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} \alpha_j \qquad \alpha_j \in G$$

com

$$\sum_{j=1}^{m} k_{ij}^2 = 1 .$$

Desta forma cada uma das variáveis z_i toma valores numa algebra de CLIFFORD e as equações (1) tomam a forma

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{2e_i} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i} .$$

As equações anteriormente estudadas serão então um caso completamente degenerado das agora introduzidas.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Summa Brasiliensis Mathematicae — Trata-se de uma revista especializada, publicada pelo IMPA e destinada exclusivamente à divulgação de trabalhos de pesquisas originais, de nível elevado. O IMPA continuou recebendo cerca de 200 publicações estrangeiras e nacionais por permuta com «Summa Brasiliensis Mathematicae».

Notas de Matemática — Como parte da coleção de monografias «Notas de Matemática» que vêm sendo publicadas pelo IMPA, apareceram em 1965 os seguintes volumes:

1) O. ENDLER, «Teoria de Galois infinita» (n.º 30).

2) L. A. MEDEIROS, «Temporally inhomogeneous non linear wave equations in Hilbert spaces» (n.º 31).

3) E. L. LIMA, «Cálculo tensorial» (n.º 32).

4) L. NACHBIN, «Elements of approximation theory» (n.º 33).

Elementos de Matemática — O IMPA dará início a uma série de livros impressos, com êsse título geral, a serem financiados pelo Conselho Nacional de Pesquisas e pela Diretoria do Ensino Superior do Ministério da Educação e Cultura. Dentro dêsse programa, já foram assinados contratos para a elaboração dos seguintes textos:

1) «Conjuntos e funções», por LEOPOLDO NACHBIN (Rio de Janeiro).

2) «Topologia dos Espaços Métricos», por ÉLON LAGES LIMA (Brasília).

3) «Algebra Moderna», por LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO (São Paulo).

4) «Geometria Diferencial», por MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO (Brasília).

Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática — Teve lugar na cidade de Poços de Caldas, Minas Gerais, no período de 4 a 24 de Julho de 1965, o Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática. Êsse Colóquio, organizado pelo IMPA como todos os demais, foi o que maior movimento apresentou, tendo comparecido ao mesmo mais de 200 pessoas.

A realização do Colóquio foi possível graças às substanciais contribuições do Conselho Nacional de Pesquisas, da CAPES e da Fundação de Amparo à Pesquisa, além dos auxilios dados pelos diversos centros universitários do país.

Foi publicado o volume «Atas do Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática», distribuido pelo IMPA.

J. M. H.