Art. 36.º A Comissão de Redacção do Boletim depois de organizado o original submetê-lo-á à Direcção com uma proposta para a sua publicação da qual constará uma previsão fundamentada da respectiva despesa.

Art. 37.º Depois de aprovada a proposta da Comissão de Redacção do Boletim deverá esta dar início aos trabalhos tipográficos correspondentes, que dirigirá.

Art. 38.º A Direcção da S. P. M. fixará o preço de venda de cada número do Boletim, e autorizará as ofertas que a Comissão de Redacção propuser.

### VIII — Das Reuniões

Art. 39.º As reuniões da S. P. M. terão lugar às segundas e quartas segundas-feiras de cada mês excepto nos meses de Julho, Agosto e Setembro, às 18 horas.

Art. 40.º O sócio que pretenda fazer uma comunicação deverá remeter uma cópia desta ou o seu resumo à Direcção.

Art. 41.º A Direcção só poderá recusar uma comunicação em face do parecer desfavorável da respectiva Comissão Permanente.

Art. 42.º A Direcção dará conhecimento ao sócio da reunião em que terá lugar a leitura da sua comunicação.

Art. 43.º As reuniões para a leitura de comunicações serão presididas pela Direcção.

Art. 44.º Terminada a leitura de cada comunicação será dada a palavra aos sócios presentes que queiram pronunciar-se sobre o assunto.

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

## MATEMÁTICAS GERAIS

**I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Matemáticas Gerais — 1.º ponto de informação e 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 25-2-1966.**

I

**5659** — 1) Sejam $A, B$ e $C$ subconjuntos do conjunto fundamental $U$. Tomando $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, demonstre que $A \Delta B = A \Delta C \Longrightarrow B = C$.

2) Diga qual é o lugar geométrico de $M(x, y)$, afixo do complexo $z$, tal que $z\bar{z} + 5(z + \bar{z}) = 6$.

R: 1) *Fazendo* $p = x \in A$, $q = x \in B$, $r = x \in C$ *a propriedade consiste em provar que* $\{[p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p)]\} \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow r)$ *é uma tautologia.*

| p | q | r | $\{[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p)]\} \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow r)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Etapas | | | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 |

2) *Sendo* $z = x + i y$, *vem* $z \bar{z} = x^2 + y^2$ *e* $z + \bar{z} = 2x$. *A equação proposta é equivalente a* $x^2 + y^2 + 10x = 6$ *ou* $(x+5)^2 + y^2 = 31$ *que é a equação de uma circunferência com centro em* $(-5, 0)$ *e raio igual a* $\sqrt{31}$.

II

**5660** — 1) Mostre que:

*a)* $X_n = ]1/n, 1[\ (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \supset ]0, 1[$ e não existe nenhuma subcolecção finita de $X_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ que cubra $]0, 1[$.

*b)* $X_1 = [-1, 0], X_{n+1} = [1/n+1, 1/n]\ (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \supset [0, 1]$ e não existe nenhuma subcolecção finita de $X_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ que cubra $[0, 1]$.

Que esclarecimentos trazem estes exemplos ao lema de Borel-Lebesgue? Justifique.

2) Discuta a natureza da sucessão cujo termo geral é

$$u_n = \left(\frac{n^2 + a n + b}{n^2 + c n + d}\right)^{\alpha n^2 + \beta n + \gamma}$$

R: 1) *A solução das questões postas nas alíneas a) e b) é imediata. Os exemplos mostram que o lema não é verdadeiro se o conjunto não é fechado ou se a cobertura não é aberta.*

2) $log\, u_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) log \left[1 + \frac{(a-c)n + (b-d)}{n^2 + cn + d}\right] =$

$= \eta\, (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) \cdot \frac{(a-c)n + (b-d)}{n^2 + cn + d} \qquad (\eta \to 1)$

*Se* $\alpha(a-c) > 0$ $\quad log\, u_n \to +\infty$ *e* $u_n \to +\infty$

*Se* $\alpha(a-c) < 0$ $\quad log\, u_n \to -\infty$ *e* $u_n \to 0$

*Se* $\alpha(a-c) = 0$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \wedge a - c \neq 0 & log\, u_n \to \beta(a-c) \text{ e } u_n \to e^{\beta(a-c)} \\ \alpha \neq 0 \wedge a - c = 0 & log\, u_n \to \alpha(b-d) \text{ e } u_n \to e^{\alpha(b-d)} \\ \alpha = 0 \wedge a - c = 0 & log\, u_n \to 0 \qquad \text{ e } u_n \to 1. \end{cases}$$

III

**5661** — 1) Estude a natureza da série $\Sigma \log \left(\frac{n^x + 1}{n^x + 2}\right)$.

2) Considere

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2 & (x > 1). \end{cases}$$

Estude a sua continuidade e represente-a geometricamente.

R: 1) *A série é visivelmente divergente para* $x \leq 0$ *pois nesse caso* $u_n$ *não é evanescente. Com* $x > 0$, *tome-se* $log \left(\frac{n^x + 1}{n^x + 2}\right) = log \left(1 - \frac{1}{n^x + 2}\right) = -\eta \frac{1}{n^x + 2}$ $(\eta \to 1)$. *A natureza da série dada será a da série de termos positivos* $\Sigma\, \eta \frac{1}{n^x + 2}$ *e como* $lim\, \eta \frac{n^x}{n^x + 2} = 1$ *a série converge com* $x > 1$ *e diverge com* $x \leq 1$.

2) *A função é contínua em* $x = -\infty$ *e para todo o* $x < -1$, *descontínua para* $x = -1$, *contínua para* $-1 < x < 1$, *descontínua para* $x = 1$, *contínua para* $x > 1$ *e para* $x = +\infty$.

**I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º ponto de informação e 2.º exame de frequência (1.ª chamada) — Duração — 3 horas — 15-6-1966.**

I

**5662** — 1) Considere $f(x) = \frac{a x^2 + b}{x^2 + 1}$ $(a \neq b)$ e mostre que $f(x)$ é contínua em $Z = ]-\infty, +\infty[$. Verifique neste conjunto que $f(x)$ possui mínimo e máximo (teorema de Weierstrass).

Determine $a$ e $b$, supondo que a oscilação de $f(x)$ em $Z$ é igual a 2 e que $Y = 1$ é assíntota da imagem de $f(x)$.

2) Calcule $P \sqrt{e^x - 1}$.

R: 1) $f(x)$ *é contínua em* $Z$ *pois é o cociente de duas funções contínuas nesse conjunto. Tem-se também* $f(-\infty) = f(+\infty) = a$ *e portanto* $f(x)$ *também é contínua no infinito.*

*Como* $f'(x) = \frac{2(a-b)x}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)$ *anula-se com mudança de sinal em* $x = 0$ *e portanto este ponto é extremante de* $f(x)$. *Os extremos de* $f(x)$ *são pois* $f(0) = b$ *e* $f(-\infty) = f(+\infty) = a$.

*A oscilação em* $Z$ *é* $\Omega = |a - b| = 2$ *e, como* $\lim_{x=\infty} f(x) = a = 1$, *em virtude* $Y = 1$ *ser assíntota da imagem de* $f(x)$, *vem* $|1 - b| = 2$ *o que dá* $b = -1$ *ou* $b = 3$.

2) *Fazendo* $e^x - 1 = t^2$, *vem*

$$P\sqrt{e^x - 1} = P\, t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = 2P\left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) =$$

$$= 2t - 2 \operatorname{arctg} t = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}.$$

II

**5663** — 1) Determine $m$ e $n$ por forma que $\lim\limits_{x=0}\left[\frac{\cos x}{\log(1+x)}-\frac{m}{x}-n\right]=0$.

2) Supondo que as equações $F(x,y,z)=0$ e $G(x,y,z)=0$ definem duas funções diferenciáveis $y(x)$ e $z(x)$, calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Sugestão: derive em ordem a $x$ ambos os membros das duas equações e resolva o sistema obtido em ordem a $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

R: 1) $\lim\limits_{x=0}\left[\frac{\cos x}{\log(1+x)}-\frac{m}{x}-n\right]=$

$$=\lim_{x=0}\frac{x\cos x-m\log(1+x)-n\,x\log(1+x)}{x\log(1+x)}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x-\frac{m}{1+x}-n\log(1+x)-\frac{n\,x}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\frac{1-m}{0}.$$

*Terá de ser* $m=1$ *pois se fosse* $m\neq 1$ *o limite da expressão dada seria* $\infty$.

*Com* $m=1$, *vem*

$$\lim_{x=0}\frac{\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x-\frac{1}{1+x}-n\log(1+x)-\frac{n\,x}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{-\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,x-x\cos x}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}+$$

$$+\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{n}{1+x}-\frac{n}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{n}{(1+x)^2}}=$$

$$=\frac{1-2n}{2}=0$$

*o que dá* $n=1/2$.

2)
$$\begin{cases} F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=0\\ G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{F'_zG'_x-F'_xG'_z}{F'_yG'_z-F'_zG'_y}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{F'_xG'_y=F'_yG'_x}{F'_yG'_z-F'_zG'_y}\end{cases}.$$

III

**5664** — 1) Demonstre que o resto da divisão de um polinómio $P(x)$ pelo polinómio

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

é

$$R(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}P(x_i),\ \text{com}\ \varphi_i(x)=\varphi(x)/(x-x_i).$$

2) Seja $A=\begin{bmatrix}1&3\\4&k\end{bmatrix}$. Determine todas as matrizes $B\neq 0$, de ordem 2, tais que $AB=0$. Indique o valor de $k$ para o qual o problema é possível.

R: 1) $R(x)$ *tem de ser um polinómio de grau inferior a* $n+1$ *que para* $x=x_i$ *toma o valor* $P(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

*A teoria da interpolação (fórmula interpoladora de Lagrange) dá imediatamente o resultado.*

2) *Tomando* $B=\begin{bmatrix}m&n\\p&q\end{bmatrix}$, *vem*

$$AB=\begin{bmatrix}m+3p & n+3q\\ 4m+kp & 4n+kq\end{bmatrix}$$

*e, portanto, terá de ser*

$$\begin{cases}m+3p=0\\4m+kp=0\end{cases}\ e\ \begin{cases}4n+kq=0\\n+3q=0\end{cases},$$

*sistemas homogéneos que deverão possuir soluções não nulas. Então* $\begin{vmatrix}1&3\\4&k\end{vmatrix}=0$, *o que dá* $k=12$; *as soluções dos sistemas serão*

$$m=-3p\ e\ n=-3q$$

$$e\ B=\begin{bmatrix}-3p&-3q\\p&q\end{bmatrix}.$$

**I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º ponto de informação e 2.º exame de frequência (2.ª chamada) — Duração — 3 horas — 18-6-1966.**

I

**5665** — 1) Seja $f(x)$ contínua em $[0,1]$ tal que $\forall x\in[0,1]\ 0\leq f(x)\leq 1$. Prove que $\exists c\in[0,1]$: $f(c)=c$.

Sugestão: Utilize na demonstração a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - x$.

2) Deduza a relação que deve existir entre $m$ e $n$ para que a fracção racional $\psi(x) = \dfrac{m x^2 + n}{(x^2-1)^3}$ admita a decomposição em elementos simples da forma $\dfrac{\lambda}{(x-1)^3} + \dfrac{\mu}{(x+1)^3}$ onde $\lambda$ e $\mu$ são constantes. Qual é nesse caso o valor das constantes $\lambda$ e $\mu$? Calcule $P\psi(x)$.

R: 1) *Tomando* $\varphi(x) = f(x) - x$, *vem* $\varphi(0) = f(0) \geqq 0$ *e* $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqq 0$. *Ora*

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \exists\, 0 : f(0) = 0$$
$$\varphi(1) = 0 \Rightarrow \exists\, 1 : f(1) = 1$$
$$\varphi(0) > 0 \wedge \varphi(1) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in \,]0,1[\, :$$
$$\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in \,]0,1[\, : f(c) = c.$$

2) $$\frac{m x^2 + n}{(x^2-1)^3} = \frac{\lambda}{(x-1)^3} + \frac{\mu}{(x+1)^3} =$$
$$= \frac{(\lambda+\mu)x^3 + 3(\lambda-\mu)x^2 + 3(\lambda+\mu)x + (\lambda-\mu)}{(x^2-1)^3}.$$

*Então,*

$$\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu$$
$$3(\lambda - \mu) = m \Rightarrow 6\lambda = m$$
$$\lambda - \mu = n \Rightarrow 2\lambda = n$$

*donde* $\dfrac{m}{3} = n$ *e* $\lambda = -\mu = \dfrac{n}{2}$.

$$P\psi(x) = \frac{n}{2} P(x-1)^{-3} - \frac{n}{2} P(x+1)^{-3} =$$
$$= -\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}.$$

II

**5666** — 1) Utilize o desenvolvimento em série de Mac Laurin de $\log^2(1+x)$ para calcular

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \log^2(1+x)}{x^3}.$$

2) Sendo $g(x)$ e $h(y)$ diferenciáveis, respectivamente, em $x = a$ e $y = b$, demonstre que $F(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ é diferenciável em $P(a,b)$.

R: 1) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad |x| < 1$$
$$\log^2(1+x) = x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1.$$

*Então,*

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \log^2(1+x)}{x^3} = \lim_{x=0} \frac{x^2 - (x^2 - x^3 + \cdots)}{x^3} = 1.$$

2) *Por hipótese,*

$$g(a+h) - g(a) = h\,A \quad \textit{com} \quad \lim_{h=0} A \quad \textit{finito}$$
$$h(b+k) - h(b) = k\,B \quad \textit{com} \quad \lim_{k=0} B \quad \textit{finito}.$$

*Então,*

$$F(a+h, b+k) - F(a,b) = g(a+h)\,h(b+k) -$$
$$- g(a) \cdot h(b) = h(b)\,[g(a+h) - g(a)] +$$
$$+ g(a+h)\,[h(b+k) - h(b)] = h\,[A\,h(b)] +$$
$$+ k\,[B\,g(a+h)] = h\,M + k\,N$$

*com* $\lim_{h=0} M$ *finito e* $\lim_{\substack{h=0\\k=0}} N$ *finito, o que exprime a diferenciabilidade de* $F(x,y)$ *em* $P(a,b)$.

III

**5667** — 1) Deduza a relação que deve ligar $a$, $b$, $c$, e $d$ para que as raízes $r_1$, $r_2$ e $r_3$ do polinómio $a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d$ satisfaçam à condição $r_1^2 = r_2 \cdot r_3$.

2) Seja $S)\ AX = B$ um sistema de $m$ equações lineares a $n$ incógnitas, com $m > n$.

Indique, justificando as respostas, sob que condições o sistema $S)$ é ($a$) possível determinado, ($b$) possível indeterminado e ($c$) impossível.

R: 1) $$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1^2 = \dfrac{3c}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 (r_1 + r_2 + r_3) = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 \left(-\dfrac{3b}{a}\right) = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

donde $r_1 = -\dfrac{c}{b}$. Substituindo no polinómio, vem

$$-\frac{a\,c^3}{b^3}+\frac{3\,b\,c^2}{b^2}-\frac{3\,c^2}{b}+d=0 \quad \text{ou} \quad d=\frac{a\,c^3}{b^3}.$$

2) *Sendo* $A' = [A \,|\, B]$, *tem-se:*

(a) *possível determinado:* $r = c(A) = c(A')$ *e* $n = r$
(b) *possível indeterminado:* $r = c(A) = c(A')$ *e* $n > r$
(c) *impossível:* $r = c(A) < c(A')$.

**I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 13-7-1966.**

**5668** — 1) Se, num grupo multiplicativo $G$

$$\forall\, a\,,b \in G \quad (a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2\,,$$

mostre que o grupo é comutativo.

R:
$$(a\cdot b)^2 = (a\,b)\,(a\,b) = a\,a\,b\,b$$
$$a\,b\,a\,b = a\,a\,b\,b\,.$$

*Multiplicando à direita ambos os membros desta igualdade por* $b^{-1}$ *vem*

$$a\,b\,a = a\,a\,b$$

*e, multiplicando à esquerda ambos os membros desta por* $b^{-1}$ *vem logo*

$$b\,a = a\,b\,.$$

2) Utilize os conhecimentos sobre derivação e primitivação de séries para calcular a soma da série $x+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots$.

R: *A série das derivadas é* $1+x^4+\cdots+x^{4n}+\cdots$, *progressão geométrica de razão* $x^4$, *cuja soma e* $\frac{1}{1-x^4}$ *para* $|x|<1$.

*A soma da série proposta é*

$$P\frac{1}{1-x^4} = P\frac{1}{(1-x^2)\,(1+x^2)} = -$$
$$-P\frac{1}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)} =$$
$$= -P\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\,.$$

3) Mostre que $f(x) = e^{-x}\sqrt{x}$ é contínua em $[0\,,+\infty[$. Estude a variação (intervalos de monotonia e extremos) de $f(x)$ neste conjunto. A imagem da função tem alguma assíntota? Justifique.

R: *A função é visivelmente contínua em todo o ponto próprio de* $[0\,,+\infty[$. *Como* $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = 0$, *a função também é contínua para* $x = +\infty$.

$$f'\cdot(x) = -e^{-x}\sqrt{x} + e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{-x}\cdot\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 1-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 1-2x < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

*A função é crescente em* $[0\,,{}^1/_2[$, *decrescente em* $]{}^1/_2\,,+\infty[$ *e tem os extremos:*

*Máximo:* $f({}^1/_2) = e^{-1/2}\sqrt{{}^1/_2}$
*Mínimos:* $f(0) = 0$ *e* $f(+\infty) = 0$.

*A imagem da função admite a assíntota* $Y = 0$ *porque* $f(+\infty) = 0$.

4) Sendo $z = x\,y\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)$, mostre que $z$ satisfaz a uma relação da forma

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z\cdot g(x\,,y)\,.$$

Ache $g(x\,,y)$.

R:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) - \frac{y}{x}\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) - \frac{x}{y}\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)$$
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\,y\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) -$$
$$-\,x\,y\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) - x\,y^2 f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) +$$
$$+\,x\,y\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right) = x\,y\,(x-y)\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right).$$
$$g(x\,,y) = x - y\,.$$

5) Utilize a teoria da interpolação para achar o polinómio $P(x)$ de grau mínimo que satisfaz às condições: $P(-2) = -5$, $P(-1) = -1$, $P(1) = 1$ e $P'(0) = -1$.

R:

| x | y | $\delta$ y | $\delta^2$ y |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $-5$ | 4 | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | 1 | |
| 1 | 1 | | |

*O polinómio interpolador é*

$$I(x) = -5 + 4(x+2) - (x+2)(x+1) = $$
$$= -x^2 + x + 1.$$
$$P(x) = I(x) + a(x+2)(x+1)(x-1) =$$
$$= a x^3 + (2a-1)x^2 + (1-a)x - 2a + 1$$
$$P'(x) = 3ax^2 + 2(2a-1)x + 1 - a$$
$$P'(0) = 1 - a = -1 \Rightarrow a = 2$$

*e portanto*

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

**6)** Sejam $A = |a_{ik}|$ e $B = |b_{jk}|$ duas matrizes dos tipos $(m \times n)$ e $(p \times n)$, respectivamente, e considere a matriz $P = A \theta B$ de termo geral $p_{ij} = a_{ih} b_{jh}$ ($h$ mudo corrente de 1 a $n$).

Como se forma a matriz $P$? Qual é o seu tipo? Escreva $P$ sob a forma de um produto de matrizes.

Mostre que a operação $\theta$ não é associativa.

R: *A matriz* P *obtém-se multiplicando linhas de* A *por linhas de* B *e portanto é do tipo* $(m \times p)$.

*Como* $p_{ij} = a_{ih} b^*_{hj}$, *tem-se* $P = A \cdot B^*$.

$(A \theta B) \theta C = (A \cdot B^*) \cdot C^* = A B^* C^*$

$A \theta (B \theta C) = A \cdot (B \theta C)^* = A \cdot (B \cdot C^*)^* = A C B^*$

*e portanto a operação* $\theta$ *não é associativa.*

**I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita — Duração 3 horas — 16-7-1666.**

**5669** — 1) Empregue a fórmula de Taylor para provar que $1 - \cos x = \frac{x^2}{2}\xi$, com $\lim_{x=0} \xi = 1$.

Utilize o resultado para estudar a natureza da série cujo termo geral é $u_n = n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

R: *Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, vem*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cos\theta x \quad (0 < \theta < 1)$$

*e, fazendo* $\xi = \cos\theta x$, *vem imediatamente o resultado.*

$$n\,u_n = n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = n^2\frac{1}{2n^2}\xi \to 1/2 \text{ e portanto}$$

$\Sigma u_n$ *é divergente.*

2) Calcule $P\frac{x^4}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$.

R: *Notando que* $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$, *vem*

$$P\frac{x^4}{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg} x = P\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\operatorname{arctg} x =$$
$$= P x^2 \operatorname{arctg} x - P \operatorname{arctg} x + P\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$$

*Como*

$$P x^2 \operatorname{arctg} x = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}P\frac{x^3}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}P\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) =$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(1+x^2)$$

$$P \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - P\frac{x}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$P\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2},$$

*vem*

$$P\frac{x^4}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x + x \operatorname{arctg} x -$$
$$-\frac{1}{3}\log(1+x^2) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}.$$

3) Estude a variação (intervalos de monotonia e extremos) e a convexidade de $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$.

R: $f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - 2\log x > 0 \Rightarrow \log x < 1/2 \Rightarrow x < \sqrt{e}$

$f'(x) < 0 \Rightarrow 1 - 2\log x < 0 \Rightarrow \log x > 1/2 \Rightarrow x > \sqrt{e}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\log x = 0 \Rightarrow \log x = 1/2 \Rightarrow x = \sqrt{e}$

*A função é crescente em* $]0, \sqrt{e}[$, *decrescente em* $]\sqrt{e}, +\infty[$ *e possui os máximos* $f(\sqrt{e}) = 1/2$ *e* $f(+\infty) = 0$.

*Como*

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\log x}{x^4},$$

$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x > \sqrt[6]{e^5}$$
$$f''(x) \leq 0 \Rightarrow x < \sqrt[6]{e^5}$$

*isto é, a função é convexa em* $[\sqrt[6]{e^5}, +\infty[$ *e côncava em* $]0, \sqrt[6]{e^5}]$. *Existe um ponto de inflexão para* $x = \sqrt[6]{e^5}$.

4) Sendo $z = f(x, y) \cdot e^{mx+ny}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, determine $m$ e $n$ por forma que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0 .$$

R:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} e^{mx+ny} + f(x, y) \cdot e^{mx+ny} m$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} e^{mx+ny} + f(x, y) e^{mx+ny} n$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} e^{mx+ny} n + m \frac{\partial f}{\partial y} e^{mx+ny} + m f(x, y) e^{mx+ny} n .$$

*Logo*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \frac{\partial f}{\partial x}(n-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(m-1) + f(x, y)(1 + mn - n - m)$$

*e a condição proposta implica* $m = n = 1$.

5) **Sendo** $\varphi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, $\varphi_i(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)_{j \neq i}$ e $L_i'(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}$, com $x_i \neq x_j$, prove que:

*a)* $L_i(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi'(x_i)}$     *b)* $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

R: *a)* $\varphi(x) = (x - x_i)\varphi_i(x) \Longrightarrow \varphi'(x) = \varphi_i(x) + (x - x_i)\varphi_i'(x) \Longrightarrow \varphi'(x_i) = \varphi_i(x_i)$.

*Logo* $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi'(x_i)}$.

*b)* $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{\varphi_i(x_i)(x - x_i)}$ *e, multiplicando ambos os membros desta igualdade por* $\varphi(x)$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

6) Determine $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ por forma que o sistema

$$S) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \gamma \end{cases}$$

seja equivalente ao sistema

$$S') \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 . \end{cases}$$

R: *Para* S') *vem* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ *e o sistema é possível indeterminado de grau* 1 *com a solução* $x_1 = 2 - x_3$ *e* $x_2 = 1 + x_3$.

*O sistema* S) *também é possível indeterminado de grau* 1 *e, para que tenha a mesma solução de* S'), *basta substituir* $x_1$ *e* $x_2$ *por* $2 - x_3$ *e* $1 + x_3$, *respectivamente. Obtém-se imediatamente* $\alpha = 9$, $\beta = 5$ *e* $\gamma = 0$.

**I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame final—Época de Outubro—Prova escrita—1-10-1966.**

**5670** — 1) A imagem $M$ do complexo $4 + 3i$ descreve um arco de circunferência de 45° com centro na origem dos eixos coordenados. Qual é o complexo cujo afixo é a nova posição do ponto $M$? Justifique.

R: *Tem-se* $4 + 3i = 5(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, *com* $\cos\alpha = 4/5$ *e* $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$. *O complexo pedido é*

$$z_1 = 5[\cos(\alpha + 45°) + i \operatorname{sen}(\alpha + 45°)]$$

*ou*

$$z_2 = 5[\cos(\alpha - 45°) + i \operatorname{sen}(\alpha - 45°)] .$$

*Tem-se, evidentemente,*

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{7\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad z_2 = \frac{7\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{5} .$$

2) Sendo $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, diga que valor deve atribuir a $f(0)$ para que $f(x)$ fique contínua em $R$. Justifique.

Considerando $f(x)$ já assim definida, prove que $f(x)$ é derivável para todo o valor de $x$ e que a derivada é contínua em $R$. Determine os intervalos de monotonia e os extremos de $f(x)$.

R: *Como* $\lim_{x=0} f(x) = 0$, *deve tomar-se* $f(0) = 0$. *Para* $x \neq 0$ *tem-se* $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}$ *e* $f'(0) = \lim \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$.

*Dado que*

$$f'(x) > 0 \; para \; x > 0$$
$$f'(x) < 0 \; para \; x < 0$$
$$f'(x) = 0 \; para \; x = 0 ,$$

*a função* $f(x)$ *é crescente em* $]0, +\infty[$, *decrescente em* $]-\infty, 0[$ *e possui mínimo local para* $x = 0$: $f(0) = 0$. *Os outros extremos locais (máximos) são* $f(-\infty) = 1$ *e* $f(+\infty) = 1$.

3) Calcule $P \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$.

R: *Fazendo* $\sqrt{x^2 + a^2} = x + t$, *vem* $x = \dfrac{a^2 - t^2}{2t}$, $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{t^2 + a^2}{2t^2}$ *e tem-se*

$$P \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{2} P \frac{1}{\dfrac{a^2 - t^2}{2t} + \dfrac{a^2 - t^2}{2t} + t} \cdot$$

$$\cdot \frac{t^2 + a^2}{t^2} = -\frac{1}{2a^2} P \frac{t^2 + a^2}{t} = -\frac{1}{2a^2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4a^2} t^2 - \frac{1}{2} \log |t| = -\frac{1}{4a^2} (\sqrt{x^2 + a^2} - x)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \log |\sqrt{x^2 + a^2} - x| .$$

4) Suponha $g(x, y)$ contínua no ponto $P(a, b)$. Mostre que, sendo $g(a, b) > C$ (ou $g(a, b) < C$), existe uma vizinhança de $P(a, b)$ na qual $g(x, y) > C$ (ou $g(x, y) < C$).

R: *Sendo, por exemplo,* $g(a, b) > C$, *tome-se* $\delta \leqslant g(a, b) - C$. *Em virtude da continuidade de* $g(x, y)$ *em* $P(a, b)$, *tem-se* $C \leqslant g(a, b) - \delta < g(x, y)$ *para* $(x, y) \in V_\delta(P)$ *o que prova o resultado.*

5) Calcule as raízes do polinómio $8x^3 - x^2 - 24x + 3$, sabendo que ele possui uma raiz da forma $\sqrt{n}$, onde $n$ designa um inteiro positivo que não é quadrado perfeito.

R: *Fazendo no polinómio* $x = \sqrt{n}$, *vem* $8n\sqrt{n} - n - 24\sqrt{n} + 3 = 0$ *ou* $8\sqrt{n}(n - 3) = n - 3$, *relação que só é satisfeita com* $n = 3$.

*Utilizando a regra de Ruffini, vem*

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -1 & -24 & 3 \\ \sqrt{3} & & 8\sqrt{3} & 24 - \sqrt{3} & -3 \\ \hline & 8 & 8\sqrt{3} - 1 & -\sqrt{3} & \underline{|0} \end{array}$$

*e as restantes raízes são as do polinómio* $8x^2 + (8\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$. *Tem-se então* $r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = -\sqrt{3}$ *e* $r_3 = 1/8$.

6) Discuta o sistema

$$\begin{cases} x_1 - k\,x_2 + k^2 x_3 = k \\ k x_1 - k^2 x_2 + k\,x^3 = 1 \\ k x_1 + \phantom{k}x_2 + k^3 x_3 = 1 \end{cases}$$

segundo os valores do parâmetro $k$.

R: *Como* $\begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ k & -k^2 & k \\ k & 1 & k^3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k+1)(k^2+1)$

*o sistema é possível determinado se* $k \neq 0, 1, -1$.

*Verifica-se fàcilmente que o sistema é impossível se* $k = 0$, *possível indeterminado de grau* 1 *se* $k = 1$ *e* $k = -1$.

Enunciados e soluções dos N.os 5659 a 5670
de Fernando de Jesus

# BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

**Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redação**

**161** — A. G. Kurosh — **Algébre Générale** — Dunod — Paris 48 F.

O leitor encontrará nesta obra da Colecção Universitária de Matemática da Editora Dunod—a fisionomia actual da álgebra geral tal como a apresenta o célebre matemático soviético, autor de não menos célebres tratados sobre teorias dos grupos.

O livro destina-se aos estudantes que já adquiriram sólidos conhecimentos sobre álgebra superior e faz uma exposição em que são indicadas as divisões fundamentais da álgebra geral contemporânea e postos