ANO XXVII – N.os 101-102 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO – 1966

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

O problema de Cauchy para a equação não linear das ondas em espaços de Hilbert

por *Luis Adauto Medeiros*

§ 1 – Introdução

O objectivo dêste artigo é fazer um resumo dos resultados sûbre o problema de CAUCHY para a equação das ondas, que obtivemos nos dois últimos anos, nos Departamentos de Matemática das Universidades de Yale e de Chicago. Nesta introdução, faremos um breve histórico do problema a resolver, das dificuldades obtidas, assim como dos problemas surgidos.

Tomaremos como ponto de referência o trabalho [1](*) de BROWDER, aonde encontra-se um método abstrato para a integração da equação não linear das ondas. O trabalho de BROWDER tem como origem o de JÖRGENS [4], que estuda um problema análogo, limitando-se ao espaço Euclidiano R^3 e usando métodos analíticos concretos para a obtenção de seus resultados. Em suma, podemos sintetizar as idéias como segue. Nas aplicações dos Métodos Matemáticos à Física, surge a necessidade de resolver o problema de CAUCHY para a equação não linear das ondas, como por exemplo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + k u^3 = 0 \,,$$

aonde Δ é o operador de LAPLACE, t o tempo, k é uma constante e u uma função numérica real, definida no $R^3 \times [0, T]$. Com o objetivo de abranger uma classe mais vasta de equações do tipo (1), JÖRGENS em [4], estudou o problema de CAUCHY para equações da forma

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F'(|u|^2) u = 0 \,,$$

sendo F uma função numérica real com derivada F'.

Tomando as equações da forma (2) como modêlo, BROWDER em [1], deu uma formulação abstrata do problema de CAUCHY para equações do tipo (2). De maneira mais explícita, demonstrou a existência e unicidade da solução do problema de CAUCHY, para a classe de equações operacionais

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{d t^2} + A u + M(u) = 0$$

(*) Números entre colchetes referem-se à bibliografia.

Resumo da tèse de doutoramento apresentada ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas do Brasil, Rio de Janeiro, GB.

em um espaço de HILBERT H. Em (3), A é um operador de H, com domínio $D(A)$ denso em H, limitado inferiormente por $k > 0$ e self adjunto. O têrmo $M(u)$ é uma aplicação, não necessariamente linear, de $D(A^{1/2})$ em H, satisfazendo a certas restrições (cf. § 4, $M1$, $M2$, $M3$, $M4$). BROWDER aplicou o cálculo operacional para operadores self adjuntos em espaços de HILBERT, para obter os seus resultados. As derivadas que aparecem em (3), são no sentido da topologia definida pela norma de H. Como aplicação de seus resultados abstratos, considerou o caso em que $H = L^2(R^N)$, (espaço de HILBERT das classes de funções integráveis à LEBESGUE no espaço euclidiano real R^N, de dimensão N), A é uma realização self adjunto em $L^2(G)$ de um operador diferencial parcial do tipo elítico e $M(u) = F'(|u|^2)u$. Quando êstes resultados são particularizados para $N = 3$, A é o operador de LAPLACE no R^3, obtém-se os resultados de JÖRGENS.

Tomaremos como modêlo para o nosso trabalho, as equações do tipo (3) e apresentaremos, nesta fase de nosso estudo, como única inovação, a perturbação no coeficiente de (3), isto é, estaremos interessados em equações da forma

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{d t^2} + A(t)u + M(u) = 0$$

onde $A(t)$, para t em R^+, (coleção dos números reais não negativos), é uma família de operadores de H, satisfazendo a certas condições que fixaremos a seguir (cf. § 2). No parágrafo 5 será dada uma aplicação para o caso em que A é uma realização autoadjunta em $L^2(G)$, (G uma região limitada do R^N) de um operador elítico de segunda ordem, com coeficientes variáveis. Note-se que o resultado pode ser aplicado a operadores de ordem $2m$, trazendo um pouco mais de trabalho nos cálculos de verificação de algumas hipóteses.

O método usado por BROWDER em [1], não se adapta naturalmente ao caso de coeficientes dependendo do tempo. Por esta razão, procuramos transformar a equação (4) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, mediante as mudanças de variáveis $v = \dfrac{du}{dt}$ e a seguir $x = A(t)^{1/2}u$ $y = v$. Consequentemente, uma primeira etapa do problema seria a de precisar as condições a serem assumidas sôbre a família $A(t)$ para que êste método tivesse sucesso. Nos casos mais frequentes de realização de operadores diferenciais parciais, com condições de DIRICHLET nulas sôbre a fronteira de G, sabe-se que o domínio de $A(t)$, o qual representaremos por $D(A(t))$, não varia com $t \in R^+$. Daí resulta que, do ponto de vista das aplicações, é natural supormos que $D(A(t))$ não varia com o tempo t. Além desta observação, notemos que a mudança de variáveis mencionada anteriormente, envolve a raiz quadrada positiva de $A(t)$. Consequentemente, impondo a $A(t)$ as necessárias condições que assegurem a existência da sua raiz quadrada positiva $A(t)^{1/2}$, apresentam-se como problemas naturais, os seguintes:

1. Caracterizar o domínio da raiz quadrada positiva $A^{1/2}$ de um operador self adjunto A, limitado inferiormente por uma constante positiva,

2. Dada uma família $\{A(t)\}$, $t \in R^+$, de operadores de H, determinar as condições a serem impostas a $A(t)$, de tal modo que se $D(A(t))$, fôr constante, então $D(A(t)^{1/2})$ também será constante.

3. Se para cada $t \in R^+$ a função $v = A(t)u$ de $D(A(t)) \rightarrow H$ fôr fortemente diferenciável para todo $u \in D(A(t))$, resultará daí que

$\omega(t) = A(t)^{1/2} z$ será diferenciável, no mesmo sentido, para todo $z \in D(A(t)^{1/2})$?

No parágrafo 2 encontram-se as respostas às questões 1 e 2 enquanto no parágrafo 3 encontra-se a resposta à questão 3.

De posse dos resultados obtidos nos parágrafos 2 e 3, voltaremos no parágrafo 4 ao problema de CAUCHY para a equação (4). Através da mudança de variáveis mencionada anteriormente, reduz-se o problema de CAUCHY para (4) ao caso de uma equação de primeira ordem, em um espaço de HILBERT $\mathcal{H}$, soma direita de H com H. Para integrar a equação transformada de (4) em $\mathcal{H}$, usamos os métodos de KATO [5], BROWDER [7] e o teorema do ponto fixo de PICCARD-BANACH.

O parágrafo 5 contém um exemplo não trivial de uma equação das ondas com têrmo não linear, com operadores de segunda ordem com coeficientes dependendo do tempo.

É importante observar que equações operacionais de segunda ordem do tipo (3), também foram estudadas por SEGAL [7], BROWDER e STRAUSS [8]. Recentemente, MAMEDOV, [6], anunciou certos resultados sôbre as soluções das equações do tipo (4) com diferentes hipóteses sôbre $A(t)$ e sôbre a parte não linear.

Aproveitamos esta oportunidade para agradecer ao Prof. FELIX E. BROWDER, da Universidade de Chicago, por nos ter proposto esta questão e por suas valorosas sugestões nas fases decisivas dêste trabalho.

Ao Prof. LEOPOLDO NACHBIN, do Conselho Nacional de Pesquisas e da Universidade do Brasil, desejamos deixar explícita a nossa gratidão pessoal por sua constante assistência e encorajamento, particularmente quando fomos estagiário no Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, durante os anos 1959-1961.

Também agradecemos ao Prof. FRANK J. HAHN da Yale University, pelas discussões estimulantes que tivemos.

§ 2 — Sôbre o domínio da raiz quadrada de um operador

Neste parágrafo fixaremos a notação, certas hipóteses sôbre a família $\{A(t)\}$, $t \in R^+$ e responderemos as questões 1 e 2 sôbre a raiz quadrada $A(t)^{1/2}$, propostas anteriormente. Não faremos as demonstrações, pois uma exposição completa será publicada em Notas de Matemática, coleção publicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas.

Seja H um espaço de HILBERT complexo, com produto escalar (1) e norma $\| \ \|$. Consideremos uma família $\{A(t)\}$. $t \in R^+$, de operadores $A(t)$ de H. Inicialmente assumiremos o seguinte:

Hipótese I — Para cada t em R^+, o operador $A(t)$ possui domínio $D(A(t))$ denso em H, é self adjunto e limitado inferiormente por uma função contínua positiva $k(t)$, isto é, $(A(t)u \mid u) \geqq k(t)(u \mid u)$ para cada u em $D(A(t))$.

Pela Hipótese I, o inverso $A(t)^{-1}$ de $A(t)$ existe para cada t, é definido em H e limitado por $k(t)^{-1}$. No que segue, necessitaremos considerar o produto $A(s)A(t)^{-1}$, para $t, s \in R^+$, o que será possível sòmente se $A(t)$ tiver domínio constante relativamente a t, isto é, $D(A(t)) = D(A(0))$ para cada $t \in R^+$.

Hipótese II — Quando $t \in R^+$, o domínio de $A(t)$ é constante.

Daí resulta que $A(t)A(s)^{-1}$ é sempre definido e limitado para todo par t, s em R^+.

Hipótese III — Os operadores limitados $A(t)A(s)^{-1}$ serão supostos uniformemente limitados, isto é, existe uma constante M tal que $\| A(t)A(t_0)^{-1} \| \leqq M$ para todo $t, t_0 \in R^+$.

Hipótese IV — Os operadores limitados $A(t)A(t_0)^{-1}$ satisfazem a uma condição de LIPSCHITZ, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\| A(t)A(t_0)^{-1} - A(s)A(t_0)^{-1} \| \leqq k \mid - s \mid$$

para todo t, t_0, $s \in R^+$.

Pela Hipótese I, para cada $t \in R^+$, existe a raiz quadrada positiva $A(t)^{1/2}$ de $A(t)$, que é self adjunta e limitada inferiormente por $k(t)^{1/2}$ onde $k(t)$ é o limite inferior de $A(t)$ o que é uma simples consequência do teorema espectral. Também como consequência do teorema espectral, tem-se que $D(A(t)) \subseteq D(A(t)^{1/2})$, para cada t. Da Hipótese I, resulta que $(A(t)u|u) = \|A(t)^{1/2}\| \geqq k(t)(u|u)$ para todo u em $D(A(t))$. Portanto, $(A(t)u|u)$ induz em $D(A(t))$ uma estrutura métrica mais fraca do que a original de H, dada por $(|)$. Por um argumento análogo ao usado por FREDERICKS para obter extensões self adjuntas dos operadores simétricos semi limitados, nós podemos obter o domínio de $A(t)^{1/2}$ a partir do domínio de $A(t)$, mais precisamente, demonstra-se que $D(A(t)^{1/2})$ é o completado de $D(A(t))$ com relação a métrica induzida em $D(A(t))$ pelo produto escalar $[u|v] = (A(t)u|v)$, para $u, v \in D(A(t))$. Desta forma, demonstramos os seguintes fatos:

PROPOSIÇÃO 1. *Suponhamos que* $\{A(t)\}$ *satisfaz às Hipóteses I e II.*

Então, se existirem duas funções contínuas positivas $c(t)$ *e* $c'(t)$, *para* $t \in R^+$, *de tal modo que*

$$c'(A(0)u|u) \leqq (A(t)u|u) \leqq \leqq c(t)(A(0)u|u) \tag{5}$$

para todo $u \in D(A(0))$, *daí resulta que* $D(A(t)^{1/2})$ *será constante.*

TEOREMA 1. *Suponhamos que* $\{A(t)\}$ *seja uma família de operadores de* H, *satisfazendo as condições I, II, III e IV. Daí resulta que* $D(A(t)^{1/2})$ *é constante.*

§ 3 — Diferenciabilidade da raiz quadrada de $A(t)$

Seja $A(t)$, $t \in R^+$, uma família de operadores de um espaço de BANACH B, com domínio constante $D(A(0))$. Diz-se que $A(t)$ é fortemente continuamente diferenciável com relação a t, quando o vetor $v(t) = A(t)u$ for contìnuamente diferenciável em relação a norma de B, para todo u em D, isto é, quando

$$\lim_{\substack{t \to \xi \\ t \neq \xi}} (t - \xi)^{-1} (A(t)u - A(\xi)u)$$

existe no sentido da norma de B.

Seja $A(t)$ uma família satisfazendo às I, II, III, IV, V. Então pelo Teorema 1, segue-se que $A(t)^{1/2}$ possui domínio constante. Se considerarmos a família $\{A(t)^2\}$ em lugar de $\{A(t)\}$ com hipóteses semelhantes sôbre $A(t)^2$, concluiriamos que $A(t)$ possui domínio constante. Nas aplicações, temos a seguinte situação: $A(t)$, $A(t)^2$ e $A(t)^{1/2}$ possuem domínio constante e $A(t)$ é fortemente continuamente diferenciável. Representando por $A'(t)$ a derivada forte de $A(t)$ e por $C(t)$ o comutador de $A(t)$ e $A'(t)$ isto é, $C(t) = A(t)A'(t) - A'(t)A(t)$ também nas aplicações êste operador possui domínio constante e satisfaz a certas condições (cf. γ_1, γ_2), as quais tomaremos como hipóteses no caso abstrato. Desta forma, admitiremos que os operadores $A(t)^2$ e $C(t)$ satisfaçam às seguintes condições:

γ_1) $C(t)$ possui domínio constante e $D(C(t)) \supseteq D(A(t)^2)$, isto é, o domínio do quadrado de $A(t)$ está contido no domínio do comutador de $A(t)$ e $A'(t)$.

γ_2) Existe uma constante $\gamma, 0 \leqq \gamma < 1$ e nma função contínua positiva $h(t)$, tal que

$$\| C(t)\, u \| \leqq h(t) \{ \| A(t)^2 u \|^\gamma \| u \|^{1-\gamma} + \| u \| \}$$

para todo $u \in D(A(t)^2)$.

Daí resulta que quando $A(t)$ satisfaz à à Hipótese I e $A(t)^2$, $A(t)^{1/2}$, $A(t)$, $C(t)$ possuem domínio constante, então, vale o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se* $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ *for fortemente contìnuamente diferenciável para* $\mathrm{t} \in \mathrm{R}^+$ *e o comutador* $\mathrm{c}(\mathrm{t})$ *de* $\mathrm{A}'(\mathrm{t})$ *e* $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ *satisfaz às condições* γ_1) *e* γ_2), *daí resulta que* $\mathrm{A}(\mathrm{t})^{1/2}$ *é também fortemente contìnuamente diferenciável.*

A demonstração do Teorema 1 baseia-se essencialmente em uma representação integral da potência fracionária de $A(t)$, isto é, na representação

$$A(t)^\alpha u = \frac{\cos(\pi \alpha/2)}{\pi} \int_0^\infty x^\alpha \{ (A(t) + i x I + \\ + (A(t) - i x I)^{-1} \} u\, dx$$

que é válida para todo $0 < \alpha < 1$ e u em $D(A(t)^\alpha)$. As Hipóteses γ_1 e γ_2, aparecem como condições suficientes para demonstrarmos a convergência de certa integral que aparece nos cálculos.

§ 4 — O problema de Cauchy

Seja $A(t)$ a família de operadores fixada no parágrafo 2. Vamos representar por $C^2(R^+, H)$ o conjunto das funções vetoriais, i. e., $u: R^+ \to H$, que são duas vezes fortemente contìnuamente diferenciáveis em H, com relação a t. Suponhamos $D(A(0)^{1/2})$ topologizado pela norma $\|u\|_{W_0} = \|A(0)^{1/2} u\|$. Seja $M(u)$ uma aplicação de $D(A(0)^{1/2})$ em H, (não necessariamente linear) satisfazendo as seguintes condições:

M_1) Para cada constante positiva C, existe uma constante positiva $k(C)$ tal que

$$\| M(u) \| \leqq k(C), \| M(u) - M(v) \| \leqq \\ \leqq k(C) \| u - v \|_{W_0}$$

para todo par $u, v \in D(A(0)^{1/2})$ e tal que $\|u\|_{W_0} < C$, $\|v\|_{W_0} < C$.

M_2) Existe um número real k_0 tal que para tôda $u: R^+ \to D(A(0)^{1/2})$ fortemente contìnuamente diferenciável com $\dfrac{du}{dt}$ uniformemente contínua, tem-se

$$Re \int_0^t (M(u)) \mid \frac{du}{dt}(s))\, ds \geqq \\ \geqq -k_0 \left(1 + \int_0^t \| A(s)^{1/2} u(s) \|^2 ds \right)$$

para todo $t > 0$, onde $Re\ z$ significa a parte real de z.

M_3) Para qualquer constante $C > 0$, $k(C) > 0$ tal que para tôda função $v: R^+ \to D(A(0)^{1/2})$ contìnuamente diferenciável tem-se:

$$\left\| \frac{d}{dt} M(v(t)) \right\| \leqq k(C) \left\| A(t)^{1/2} \frac{dv}{dt}(t) \right\|$$

desde que $\| A(0)^{1/2} v(t) \| < C$.

M_4) Para qualquer constante positiva $C > 0$, existe $k(C) > 0$ tal que para qualquer par de funções u, v de R^+ em $D(A(0)^{1/2})$, contìnuamente diferenciável, tem-se:

$$\left\| \frac{d}{dt} \{M(u(t)) - M(v(t))\} \right\| \leq k(C)$$
$$\{\| A(t)^{1/2} u(t) - A(t)^{1/2} v(t) \|\} + \| A(t)^{1/2} u'(t) - - A(t)^{1/2} v'(t) \|\}$$

para todo t em $[0, T]$, sendo

$$\| u'(t) \|^2 + \| A(0)^{1/2} u(t) \|^2 < C, \quad \| v'(t) \|^2 + + \| A(0)^{1/2} v(t) \|^2 < C$$

Quanto ao comportamento de $A(t)^{1/2}$, assumiremos o seguinte:

Hipótese V — O operador $A(t)^{1/2}$ é fortemente contìnuamente diferenciável para todo $t \in R^+$ e $\dfrac{d\,A(t)^{1/2}}{dt}\, A(t)^{-\frac{1}{2}}$ é limitado por uma função contínua positiva.

Denomina-se equação não linear das ondas, com coeficientes dependendo do tempo, a tôda equação operacional que pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + A(t) u + M(u) = 0 \tag{6}$$

onde $u \in C^2(R^+; H)$, $A(t)$ e $M(u)$ como fixados anteriormente.

Nós consideraremos o problema de Cauchy

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + A(t) u + M(u) = 0 \tag{7}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \Psi \tag{8}$$

para $t \in R^+$.

Diz-se que $u : R^+ \to H$ é uma solução estrita do problema de Cauchy $(7) + (8)$, se $u = u(t) \in D(A(0))$, $u' = u'(t) \in D(A(0)^{1/2})$ para todo $t \in R^+$ e $A(t) u(t)$, $u''(t)$, $A(t)^{1/2} u(t)$ e $A(t)^{1/2} u'(t)$ forem contínuas sôbre todo intervalo $[0, T]$ de R^+ e as equações $(7) + (8)$ são satisfeitas.

O Teorema 1 que segue, garantirá a existência de soluções estritas para o sistema $(7) + (8)$ e os Teoremas 2 e 3 garantirão a dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais e consequentemente a unicidade da solução.

Teorema 1. *Seja* $\{A(t)\}$, t *em* R^+, *uma família de operadores em um espaço de* Hilbert H, *satisfazendo as Hipóteses I, II, III, IV, V, e* $M(u)$ *uma aplicação de* $D(A(0)^{1/2})$ *em* H, *satisfazendo as hipóteses* M_1, M_2, M_3, M_4. *Então, o sistema* $(7) + (8)$ *possui uma solução estrita* $u = u(t)$ *definida sôbre o* R^+, *para todo* $\varphi \in D(A(0))$ *e* $\Psi \in D(A(0)^{1/2})$ *tais que*

$$\| \varphi \|^2_{W_0} + \| \Psi \|^2 < C \tag{9}$$

onde $C > 0$ é uma constante.

Teorema 2. *Admitindo as hipóteses do Teorema 1, para cada* $T > 0$, *se* u, u_1 *forem soluções de* $(7) + (8)$, *correspondentes aos dados iniciais* $[\varphi, \Psi]$, $[\varphi_1, \Psi_1]$, *respectivamente, satisfazendo a condição (9), então*

$$\| A(t)^{1/2} u(t) - A(t)^{1/2} u_1(t) \|^2 + \| u'(t) - - u_1'(t) \|^2 \leq k(T, C) \{\| \varphi - \varphi_1 \|^2_{W_0} + \| \Psi - \Psi_1 \|^2\}$$

para todo t em $[0, T]$.

O teorema que segue dará o comportamento da derivada segunda em relação aos dados iniciais. Na demonstração dêste teorema, há necessidade de restringir mais a família $\{A(t)\}$. De maneira mais precisa, vamos admitir que $A(t)$ seja duas vezes contìnuamente diferenciável e que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) $(A'(t) u \mid u) < 0$ para todo $t \in R^+$ e $u \in D(A'(t))$.

b) $\left| \dfrac{d}{dt} (A'(t) u \mid v) \right| \leq c(t) E(u, v)$

c) $|(A''(t) u \mid v)| \leq k(t) E(u, v)$

para todo $t \in R^+$, $u \in D(A'(t))$, $u \in D(A''(t))$, sendo $c(t)$, $k(t)$ funções contínuas positivas e

$$E(u, v) = \| A(t)^{1/2} u \|^2 + \| A(t)^{1/2} v \|^2 .$$

TEOREMA 3. *Admitindo as hipóteses do Teorema 1 sôbre* $\mathrm{A}(t)$ *e mais as hipóteses a), b), c) anteriores, se* $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{A}(0))$ *e* $\psi \in \mathrm{D}(\mathrm{A}(0)^{1/2})$ *forem tais que*

$$\| \mathrm{A}(0)\varphi \|^2 + \| \varphi \|^2_{\mathrm{W}_0} + \| \psi \|^2 < \mathrm{C} ;$$
$$\| \mathrm{A}(0)\varphi_1 \|^2 + \| \varphi_1 \|^2_{\mathrm{W}_0} + \| \psi_1 \|^2 < \mathrm{C}$$

então as soluções u *e* u_1 *do sistema* $(7)+(8)$ *correspondentes a* $[\varphi, \psi]$, $[\varphi_1, \psi_1]$ *respectivamente, satisfazem à condição seguinte:*

$$\| \mathrm{u}''(t) - \mathrm{u}_1''(t) \|^2 + \| \mathrm{A}(t)^{1/2}\mathrm{u}'(t) - \mathrm{A}(t)^{1/2}\mathrm{u}_1'(t) \|^2 \leqq$$
$$\leqq \mathrm{k}(\mathrm{C}, \mathrm{T}) \{ \| \varphi - \varphi_1 \|^2_{\mathrm{W}_0} + \| \mathrm{A}(0)\varphi - \mathrm{A}(0)\varphi_1 \|^2 +$$
$$+ \| \psi - \psi_1 \|^2 + \| \psi - \psi_1 \|^2_{\mathrm{W}_0} .$$

Como um corolário do Teorema 2, resulta que as soluções do sistema $(7)+(8)$ com a condição (9) são unìvocamente determinadas pelos dados iniciais $[\varphi, \psi]$.

§ 5 — Aplicações

Seja G um domínio limitado do espaço euclidiano real R^N de dimensão N, cuja fronteira ∂G suporemos regular. Suponhamos que H seja o espaço de HILBERT $L^2(G)$ das classes de equivalença de funções integráveis à LEBESGUE sôbre G. Seja $A(t)$ o operador diferencial formal

$$A(t) = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + c(x, t)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Supõe-se os coeficientes suficientemente regulares com relação a x e t. Admite-se, ainda mais, que existam duas funções contínuas positivas $c_0(t)$ e $c_1(t)$, $t \in R^+$, tais que

$$c_1(t) | \xi |^2 \geqq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geqq c_0(t) | \xi |^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$ onde $|\xi|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_N|^2$.

Vamos representar por $A_2(t)$ a realização de $A(t)$ em $L^2(G)$, sob condições de DIRICHLET nulas sôbre a fronteira de G, isto é, o domínio de $A_2(t)$ é o conjunto das funções $u \in W^{2,2}(G)$ (espaço de SOBOLEV das funções de $L^2(G)$ cujas derivadas generalizadas de ordem $|\alpha| \leqq 2$ pertencem a $L^2(G))$, tais que $D^\alpha u|_{\partial G} = 0$ para todo $|\alpha| < 2$ (cf. BROWDER [2]). Desta forma, $D(A_2(t)) \subseteq W^{2,2}(G)$ e como uma aplicação de $D(A_2(t))$ em $L^2(G)$, o operador $A_2(t)$ satisfaz às hipóteses dos Teoremas 1, 2, 3 do parágrafo 4.

Consequentemente, os Teoremas 1, 2, 3 do parágrafo 4 generalizam os resultados contidos em BROWDER [1], para o caso de equações não lineares com coeficientes variáveis.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. BROWDER *On non linear wave equations.* Math. Zeitschrift **80** (1962) 249-264.

[2] F. E. BROWDER *On spectral theory of elliptic differential operators* I. Math. Annalen **142** (1961) 22-130.

[3] F. E. BROWDER and W. A. STRAUSS *Scattering for non linear wave equations* Pacif. J. of Math. **13**, n.° 1 (1963) 23-43.

[4] K. JÖRGENS *Das Afangswertproblem in Grössen fur eine Klasse nichlinearen wellengleichungen*, Math. Z. **77** (1961) 295-308.

[5] T. KATO *Integration of the equations of evolution in Banach spaces,* J. M. S. of Japan, **5** (1953) 208-304.

[6] Jo D. MAMEDOV *Certain properties of solutions of non linear hyperbolic equations in Hilbert spaces.* Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (English Translation) **5** n.° 5 Sept. Oct. 1965.

[7] I. SEGAL *Non linear semi groups.* Annals of Math. **78** n.° 2 (1963) 339-364.

[8] W. A. STRAUSS *Scattering for hyperbolic equations.* Trans. Am. Math. Soc. **108**, n.° 1 (1963) 13-37.