From

$$e_a\, a'_i = a'_i\, e_a\,,$$

it follows

$$e_a\, a'_i\, a = a'_i\, e_a\, a\,,$$

that is to say,

$$e_a\, i_a = a'_i\, a = i_a\,.$$

Analogously, by (iv), one has

$$i_a\, a'_e = a'_e\, i_a\,,$$

for some left inverse a'_e of a, relative to e_a; and from this it follows

$$(1) \qquad i_a\, e_a = e_a\,.$$

Since, by (iii), one has $i_a\, e_a = e_a\, i_a$, one concludes that $i_a = e_a$, as it was claimed.

In particular, from (1) it results

$$(2) \qquad e_a\, e_a = e_a\,.$$

Now, we are going to see that

$$e_a = e_b\,.$$

In fact, from (2) it follows

$$e_a\,(e_a\, e_b) = (e_a\, e_a)\, e_b = e_a\, e_b$$

and

$$e_b\,(e_b\, e_a) = (e_b\, e_b)\, e_a = e_b\, e_a\,;$$

and, from (iii), it follows

$$e_a\,(e_a\, e_b) = e_b\,(e_a\, e_b) = e_a\, e_b\,.$$

This means that both e_a and e_b are local left identities relative to the element $e_a e_b$, and, therefore, $e_a = e_b$, as it was to be proved.

BIBLIOGRAPHY

[1] W. E. Deskins and J. D. Hill, *On the definition of a group*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 795-796

[2] P. J. Sally, Jr., *Problem 5066*, Amer. Math. Monthly, **70** (1963), pp. 96-97.

[3] E. A. Schreiner, *Semigroup with Left Inverses and Identities,* Amer. Math. Monthly, **70** (1963), p. 1113.

Sôbre funções de variação total limitada

por Maria Eulalia Coutinho *

1. Em [1], pg. 602, (teor. 84), mostra-se que, se f é uma função de variação total limitada definida em um intervalo compacto I de R cujos valores são elementos de um espaço métrico, então existem os limites de f à esquerda e à direita de todo ponto x_0 do interior de I.

Em [2], pg. 110, demonstra-se o seguinte teorema: seja $f\colon A = [a, b] \times [c, d] \subseteq R^2 \to R$ uma função de variação total limitada em A tal que, para algum $(x', y') \in A$, as funções $x \to f(x, y')$ de $[a, b]$ em R e $y \to f(x', y)$ de $[c, d]$ em R, são de variação total limitada em $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente. Então, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) do interior de A, existem os quatro limites «angulares» de f quando (x, y) tende para (x_0, y_0). (i. e. existem os limites em cada um dos quadrantes determinados pelas rectas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Para esta demonstração é utilizada a de-

(*) Estudante do 3.º ano do Curso de Matemática e bolsista do Instituto de Física e Matemática, Recife.

composição de Jordan de f em diferença de funções crescentes.

O prof. RUY LUIS GOMES sugeriu-nos estudar a extensão destes resultados ao caso em que f é uma função definida num rectângulo compacto de R^2 com valores num espaço de BANACH.

O objectivo desta nota é, portanto, estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Seja* $f: A = [a, b] \times [c, d] \subseteq R^2 \to F$, *onde* F *é um espaço de* BANACH, *uma função de variação total limitada em* A *tal que, para algum* $(x', y') \in A$, *as funções* $g: [a, b] \to F$ *e* $h: [c, d] \to F$, *definidas por* $g(x) = f(x, y')$ *e* $h(y) = f(x', y)$, *são de variação total limitada em* $[a, b]$ *e* $[c, d]$ *respectivamente* (1). *Então, para todo ponto* (x_0, y_0) *do interior de* A (2) *existem os limites de* f *quando* (x, y) *tende para* (x_0, y_0) *nos casos seguintes:*

I) $(x, y) \in]x_0, b[\times]y_0, d[$

II) $(x, y) \in]x_0, b[\times]c, y_0[$

III) $(x, y) \in]a, x_0[\times]c, y_0[$

IV) $(x, y) \in]a, x_0[\times]y_0, d[$

2. Diremos que a função $f: [a, b] \times [c, d] = A \subseteq R^2 \to F$, onde F é um espaço de BANACH, é de variação total limitada em A, se existe um real $M \geqq 0$ tal que, quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente decrescentes (ou, o que resulta equivalente, quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente crescentes), $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$, $(t_j)_{0 \leq j \leq m}$ de pontos de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente, se tem

$$\sum_{i,j} \| f(s_{i+1}, t_{j+1}) - f(s_{i+1}, t_j) - f(s_i, t_{j+1}) + f(s_i, t_j) \| \leqq M$$

onde a soma é estendida a todos (i, j) tais que $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq m-1$.

Ora, dizer que as funções $g: [a, b] \to F$ e $h: [c, d] \to F$, definidas por $g(x) = f(x, y')$ e $h(y) = f(x', y)$, são de variação total limitada, é dizer que existe $N \geqq 0$ tal que as desigualdades

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_i, y') - f(s_{i+1}, y') \| \leqq N$$

$$\sum_{0 \leq j \leq m-1} \| f(x', t_j) - f(x', t_{j+1}) \| \leqq N$$

são válidas quaisquer que sejam as sequências finitas estritamente decrescentes $(s_i)_{0 \leq i \leq n}$, $(t_j)_{0 \leq j \leq m}$ de pontos de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente.

Utilizaremos no que se segue o seguinte

LEMA: *Sob as hipóteses do teorema, as funções* $x \to f(x, t)$ *de* $[a, b]$ *em* F *e* $y \to f(s, y)$ *de* $[c, d]$ *em* F, *são de variação total limitada em* $[a, b]$ *e* $[c, d]$ *respectivamente quaisquer que sejam* $t \in [c, d]$ *e* $s \in [a, b]$.

Com efeito, $\| f(s_{i+1}, t) - f(s_i, t) \|$ pode escrever-se como

$$\| f(s_{i+1}, t) - f(s_{i+1}, y') - f(s_i, t) + f(s_i, y') + f(s_{i+1}, y') - f(s_i, y') \|,$$

que não excede

$$\| f(s_{i+1}, t) - f(s_{i+1}, y') - f(s_i, t) + f(s_i, y') \| + \| f(s_{i+1}, y') - f(s_i, y') \|.$$

(1) Pode acontecer que f seja de variação total limitada sem que alguma das funções g ou h o seja. Por exemplo, seja $g: [a, b] \to R$ uma função que não é de variação total limitada; ponhamos $f(x, y) = g(x)$ pora todo $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. A variação total de f é nula.

(2) Se (x_0, y_0) é um vértice de A, mostra-se que existe o limite em um dos quadrantes; se (x_0, y_0) pertence ao interior de um lado, existem os limites nos dois quadrantes correspondentes.

Daqui resulta que a soma

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_i, t) \|$$

não excede

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_{i+1}, y') - $$
$$- f(s_i, t) + f(s_i, y') \| + \sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, y') - $$
$$- f(s_i, y') \| \leqq \sum_{i,j} \| f(s_{i+1}, t_{j+1}) - f(s_{i+1}, t_j) - $$
$$- f(s_i, t_{j+1}) + f(s_i, t_j) \| + $$
$$+ \sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, y') - f(s_i, y') \| ,$$

onde os t_j determinam uma partição finita de $[c, d]$ na qual figuram t e y'.

Temos, portanto,

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} \| f(s_{i+1}, t) - f(s_i, t) \| \leqq M + N ,$$

o que prova o lema para a função $x \to f(x, t)$.

Conclusão análoga para a função $y \to f(s, y)$.

3. Vamos agora proceder à demonstração do teorema enunciado.

Seja (x_0, y_0) um ponto do interior de A; mostremos que, sob as hipóteses do teorema, existe $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ no caso I. Para que tal limite exista, é necessário e suficiente que a oscilação de f no ponto (x_0, y_0), com respeito ao rectângulo $]x_0, b[\times]y_0, d[$ seja nula. (ver [3], pg. 52, 3.14.6.).

Suponhamos que esta oscilação é positiva. Isto significa que existe algum $\varepsilon > 0$ tal que,

(1) *em qualquer rectângulo*

$$]x_0, x''[\times]y_0, y''[\subseteq]x_0, b[\times]y_0, d[$$

há pontos (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *para os quais se tem*

$$\| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \| > \varepsilon .$$

Ponhamos (³)

$$f(x_i, y_j) = z_{i,j} ; \quad \Delta_y z_{0,j} = z_{0,j} - z_{0,j+1} ;$$
$$\Delta_x z_{j,0} = z_{j,0} - z_{j+1,0}$$

$$\Delta^2_{yx} z_{0,j} = z_{j,j} - z_{j,j+1} - z_{0,j} + z_{0,j+1}$$
(relativa ao rectângulo 2)

$$\Delta^2_{yx} z_{j,0} = z_{j+1,j} - z_{j,0} - z_{j+1,j+1} + z_{j+1,0}$$
(relativa ao rectângulo 1).

Então de (1) resulta que

$$\varepsilon < \| z_{11} - z_{22} \| = \| (z_{11} - z_{12} - z_{01} + z_{02}) + $$
$$+ (z_{12} - z_{10} - z_{22} + z_{20}) + (z_{01} - z_{02}) + $$
$$+ (z_{10} - z_{20}) \| \leqq \| \Delta^2_{yx} z_{01} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{10} \| + $$
$$\| \Delta_y z_{01} \| + \| \Delta_x z_{10} \| .$$

Consideremos agora o rectângulo

$$]x_0, x'''[\times]y_0, y'''[$$

com

$$x''' \leqq x_2 , \quad y''' \leqq y_2 .$$

De (1) resulta ainda que existem pontos $(x_3, x_3), (x_4, x_4)$ deste rectângulo, tais que

$$\varepsilon < \| \Delta^2_{yx} z_{03} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{30} \| + \| \Delta_y z_{03} \| + \| \Delta_x z_{30} \| .$$

Repetindo o processo, conseguimos $2n$ pontos (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, 2n$, tais que

$$\varepsilon < \| \Delta^2_{yx} z_{0,2k-1} \| + \| \Delta^2_{yx} z_{2k-1,0} \| + $$
$$+ \| \Delta_y z_{0,2k-1} \| + \| \Delta_x z_{2k-1,0} \| ,$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$ e, portanto,

(³) Esta notação nos foi sugerida pelo prof. Rivaldo Alves Corrêa, pelo que agradecemos.

$$n\varepsilon < \sum_{1\le k\le n} \| \Delta^2_{yx} z_{0,2k-1} \| + $$
$$+ \sum_{1\le k\le n} \| \Delta^2_{yx} z_{2k-1,0} \| + \sum_{1\le k\le n} \| \Delta_y z_{0,2k-1} \| + $$
$$+ \sum_{1\le k\le n} \| \Delta_x z_{2k-1,0} \| \leqq M + 2N,$$

em virtude das hipóteses do teorema e do lema demonstrado.

Em resumo, ter-se-ia

$$(2) \qquad n\varepsilon < M + 2N \quad \text{para todo } n,$$

o que é absurdo.

De modo análogo se conclui que existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

em cada um dos casos II, III e IV.

Observação: Se alguns dos pontos tomados (x_i, y_i) têm a mesma abcissa, tem-se, como $z_{i+1,i+1} = z_{i,i+1}$,

$$\| z_{i,i} - z_{i,i+1} \| \leqq \| z_{i,i} - z_{i,i+1} - z_{0,i} + $$
$$+ z_{0,i+1} \| + \| z_{0,i} - z_{0,i+1} \| = \| \Delta^2_{yx} z_{0j} \| + $$
$$+ \| \Delta_y z_{0j} \|$$

e, por consequência, o resultado (2) não é alterado.

Anàlogamente para o caso de alguns dos (x_i, y_i) terem a mesma ordenada.

REFERÊNCIAS

[1] L. Schwartz, «*Cours d'Analyse*», II.º volume.

[2] T. H. Hildebrandt, «*Introduction to the Theory of Integration*» (1963), Academic Press.

[3] J. Dieudonné, «*Foundations of Modern Analysis*», (1960), Academic Press.

Natureza da Investigação Operacional (*)

por ***Fernando de Jesus***

1. Generalidades sobre a natureza da ciência e metodologia

1. 1. Caracterização da ciência

A extensiva bibliografia referente à definição ou caracterização da ciência é de tal modo vasta e abarca pontos de vista tão diversos e não raras vezes contraditórios, que se torna extremamente difícil apresentar uma definição adequada. Verifica-se, no entanto, que grande parte das dificuldades provém do facto de o significado do termo «ciência» não ser constante pois tem-se modificado com o decorrer dos séculos e não temos a certeza de que amanhã a designação tenha o mesmo sentido que hoje possui.

Não se podendo pois apresentar uma definição inatacável de ciência, é preferível mencionar algumas das características essenciais do que se designa por ciência.

Num conceito dinâmico, consideraremos *a ciência como um processo de investigação,* isto é, um processo para: (*a*) responder a questões, (*b*) resolver problemas, (*c*) desenvolver processos mais eficientes para responder a questões e resolver problemas. Posteriormente faremos a distinção entre questões e problemas.

A par da investigação científica é costume

(*) Palestra proferida no dia 8 de Janeiro de 1966 perante o Grupo de Investigação Operacional do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.