7. 2. Aplicações da Investigação Operacional à Economia

Como dissémos anteriormente, a reformulação da teoria económica e da econometria por meio dos modelos matemáticos utilizados na I. O. é um dos aspectos que mais deve interessar o economista moderno.

A utilização destes modelos tem provocado o acréscimo de operacionalidade dos modelos económicos e econométricos, permitindo resolver problemas que até há poucos anos não tinham encontrado solução satisfatória.

A teoria dos jogos, por exemplo, veio possibilitar o tratamento de situações de conflito de interesses tão frequentes na economia: monopólio bilateral (monópólio-monopsónio), duopólio e oligopólio, combinações ou coalizações, como, por exemplo, quando os salários são determinados por uniões ou federações de trabalhadores e patrões; etc..

A programação matemática, em especial a programação linear, provocou uma verdadeira revolução na análise económica e na econometria. A teoria da empresa, as relações interindustriais, a teoria do equilíbrio geral e a economia do bem-estar são exemplos de domínios profundamente remodelados com o recurso à programação linear.

Os aperfeiçoamentos da teoria económica e da econometria, no sentido de um acréscimo de operacionalidade, têm-se reflectido, evidentemente, na política económica. Ao nível da macro ou da microeconomia os modelos operacionais têm demonstrado a sua eficácia na tomada de decisões económicas.

BIBLIOGRAFIA

Ackoff, R. L. (ed.), *Progress in operations research*, Vol. I, New Yerk, 1961.

Ackoff, R. L., (C. W. Churchmann e E. L. Arnoff), Introduction to operations research (tradução francesa com o título *Éléments de récherche opérationnelle*) Paris, 1961.

Ackoff, R. L., (S. K. Gupta e J. S. Minas), *Scientific method: optimizing applied research decisions* New York, 1962.

Ackoff, R. L., (P. Rivett), *A manager's guide to operational research* London, 1963.

Faure, R. (J. P. Boss. e A. Le Garff), *La recherche opérationnelle*, Paris, 1961.

Jesus, F., *A investigação operacional na empresa* (curso realizado no CEGOC), Lisboa, 1965.

Shuchmann, A. (ed.), *Scientific decision making in business*, New York, 1963.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação (1.ª chamada) — 15-6-1965.

I

5643 — 1) Considere $\varphi(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ e resolva os seguintes problemas:

a) Trace a imagem de $\varphi(x)$.

b) Calcule $P\varphi(x)$.

c) Prove que $\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ para $|x| < 1$.

2) Demonstre que θ, no termo complementar da fórmula de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a+\theta h),$$

tende para $1/3$ quando $h \to 0$ se $f'''(x)$ é contínua para $x = a$ e $f'''(a) \neq 0$. Generalize este resultado.

Sugestão: Escreva a terceira fórmula de Taylor para $f(x)$ e relacione-a com a segunda.

3) Pode utilizar a regra de CAUCHY para calcular $\lim\limits_{x=0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1}$ e $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$? Existem estes limites? Justifique as respostas.

R: 1) a) Domínio: $]-\infty, 1[,]1, +\infty[$.
Ponto de descontinuidade: $x = 1$
Intersecções com os eixos: $(0,1)$ e $(-1,0)$
Intervalos de monotonia, extremos:

$$\varphi'(x) = \frac{2x + 4}{(1-x)^4}$$

$$\varphi'(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 \geqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq -2$$

cresc. em $[-2, +\infty[$

$$\varphi'(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 \leqq 0 \Longleftrightarrow x \leqq -2$$

decr. em $]-\infty, -2]$

mínimo $(-2, -1/27)$.

Convexidade, concavidade, pontos de inflexão

$$\varphi''(x) = \frac{6x + 18}{(1-x)^5}$$

$\varphi''(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow -3 \leqq x < 1$ *convexa em* $[-3, 1[$

$\varphi''(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x > 1 \vee x < -3$ *côncava em* $]-\infty, -3]$ *e* $]1, +\infty[$

ponto de inflexão $(-3, -1/32)$.

Assíntotas: $X = 1$ *e* $Y = 0$.

b) *Fazendo* $1 - x = t$, *vem*

$$P\frac{1+x}{(1-x)^3} = P\frac{t-2}{t^3} = P\frac{1}{t^2} - 2P\frac{1}{t^3} =$$
$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

c)
$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^3}$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n \quad |x| < 1$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_1^\infty n\, x^{n-1} \quad |x| < 1$$
$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-2} \quad |x| < 1$$
$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} \quad |x| < 1.$$

Então,

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-2} + \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty \binom{n+1}{2} x^{n-1} + \sum_2^\infty \binom{n}{2} x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty \left[\frac{(n+1)\,n}{2} + \frac{n\,(n-1)}{2}\right] x^{n-1} =$$
$$= 1 + \sum_2^\infty n^2 x^{n-1} = \sum_1^\infty n^2 x^{n-1}.$$

2) *Como*

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a + \theta_1 h),$$

vem

$$\frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h) = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a + \theta_1 h)$$

ou

$$f''(a + \theta h) - f''(a) = \frac{h}{3} f'''(a + \theta_1 h),$$

donde

$$\theta \cdot \frac{f''(a + \theta h) - f''(a)}{\theta h} = \frac{1}{3} f''(a + \theta_1 h).$$

Tomando limites para $h = 0$, *vem imediatamente* $\lim\limits_{h=0} \theta = 1/3$.

A generalização é imediata: quando $f^{(n+1)}(x)$ *é contínua e diferente de zero para* $x = a$, $\lim\limits_{h=0} \theta = 1/n+1$.

3) *Como* $\lim\limits_{x=0} \frac{(x^2 \operatorname{sen} 1/x)'}{(e^x - 1)'} = \lim\limits_{x=0} \frac{2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x}{e^x}$ *não existe e* $\lim\limits_{x=\infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'} = \lim\limits_{x=\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ *também não existe, não se pode aplicar a regra de Cauchy.*

Os limites existem porque

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1} = \lim_{x=0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \left(\lim_{x=0} \frac{x}{e^x - 1}\right)$$

e como $\lim\limits_{x=0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ *e*

$$\lim_{x=0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x=0} \frac{1}{e^x} = 1,$$

vem

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{e^x - 1} = 0;$$

e

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x=\infty} \frac{x\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} = 1.$$

II

5644 — 1) Mostre que, se a equação

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$$

tem uma raíz positiva x_0, a equação

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

tem também uma raiz positiva inferior a x_0.

2) Seja $g(x,y) = \dfrac{x y (2x^2 - 3y^2)}{x^2+y^2}$, $g(0,0)=0$. Calcule $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$. Pode concluir do resultado que $g''_{xy}(x,y)$ e $g''_{yx}(x,y)$ não são contínuas em $(0,0)$? Porquê?

R: 1) *Como* $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ *tem as raízes* $x=0$ *e* $x = x_0 > 0$, *o teorema de Rolle ensina que* $n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ *tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* x_0.

2)
$$g'_x(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = 0$$
$$g'_y(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$$
$$g'_x(0,y) = \lim_{x=0} \frac{g(x,y) - g(0,y)}{x} = -\frac{3y^3}{y^2}$$
$$g'_y(x,0) = \lim_{y=0} \frac{g(x,y) - g(x,0)}{y} = \frac{2x^3}{x^2}$$
$$g''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g'_x(0,y) - g'_x(0,0)}{y} = $$
$$= \lim_{y=0} -\frac{3y^3}{y^3} = -3$$
$$g''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g'_y(x,0) - g'_y(0,0)}{x} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$$

As derivadas $g''_{xy}(x,y)$ *não são contínuas em* $(0,0)$ *porque, se o fossem, o teorema de Schwartz garantia a sua igualdade.*

III

5645 — 1) Dada a tabela $\dfrac{x \mid x_0\, x_1 \cdots x_n}{y \mid y_0\, y_1 \cdots y_n}$, com $x_i = x_0 + i h$ e $y_i = F(x_i)$, demonstre que $F^{(n)}(\xi) = \Delta^n y_0 / h^n$, com ξ entre x_0 e x_n.

2) Considere o sistema de m equações lineares a n incógnitas $AX = B$ não homogéneo e suponha que A e $[A \mid B]$ tem a mesma característica $r < n$. Fazendo $d = n - r$, construam-se as soluções $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ que se obtêm tomando para as incógnitas secundárias os elementos das linhas da matriz $(d+1) \times d \begin{bmatrix} O \\ \hline I_d \end{bmatrix}$.

Prove que $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ são linearmente independentes e que $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{d+1} X_{d+1}$ é solução de $AX = B$ se e só se $\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$.

R: 1) *Para a tabela dada, a função* $F(x) - I(x)$, *onde* $I(x)$ *é o polinómio interpolador de Gregory-Newton, anula-se nos* $n+1$ *pontos* $x_i\ (i = 0, 1, \cdots n)$. *A aplicação repetida do teorema de Rolle dá* $F^{(n)}(\xi) - I^{(n)}(\xi) = 0$, *com* ξ *entre* x_0 *e* x_n. *Como* $I^{(n)}(\xi) = \dfrac{\Delta^n y_0}{h^n}$, *vem imediatamente* $F^{(n)}(\xi) = \dfrac{\Delta^n y_0}{h^n}$.

2) *As soluções* $X_1, X_2, \cdots X_{d+1}$ *são visìvelmente independentes pois na matriz*

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{d+1} \end{bmatrix}$$

as linhas $2, \cdots d+1$ *são independentes porque passam pela matriz* I_d *de característica* d. *Como em* X_1 *há pelo menos um elemento significativo nas primeiras* r *colunas, é claro que a característica da matriz é* $d+1$.

Ora

$$AY = B \Rightarrow \lambda_1 A X_1 + \cdots + \lambda_{d+1} A X_{d+1} =$$
$$= B \Rightarrow \lambda_1 B + \cdots + \lambda_{d+1} B = B \Rightarrow \sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$$
$$\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1 \Rightarrow AY = \lambda_1 A X_1 + \cdots + \lambda_{d+1} A X_{d+1} =$$
$$= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{d+1}) B = B$$

o que prova que Y *é solução de* $AX = B$ *se e só se* $\sum_1^{d+1} \lambda_i = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação 2.ª chamada — 18-6-1965.

I

5646 — 1) Dada a função $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x^{2n+1} + x^2}{x^{2n}+1}$, estude a sua continuidade e derivabilidade. Apresente a imagem de $f(x)$.

2) Calcule $P \dfrac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1+x}}$.

3) Supondo que o intervalo de convergência absoluta de $s(x) = \Sigma a_n x^n$ é $]-\lambda, \lambda[$ e que a série converge para $x = \lambda$, pode garantir-se que $S(x) = \Sigma a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ também converge para $x = \lambda$? Tem-se $S'(\lambda) = s(\lambda)$? Justifique as respostas.

A série $\Sigma \dfrac{\text{sen } n^2 x}{n^2}$, convergente para todo o x real, pode derivar-se termo a termo em $]-\infty, +\infty[$? Porquê?

R: 1) *Tem-se*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| < 1) \\ x & (|x| > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (x = -1) \end{cases}.$$

A função é descontínua para $x = -1$, *pois* $f(-1+0) = 1$ *e* $f(-1-0) = -1$, *e é também descontínua para* $x = -\infty$ *e* $x = +\infty$ *pois* $f(-\infty)$ *e* $f(+\infty)$ *não são finitos.*

É claro que $f'(x) = \begin{cases} 2x & (|x| < 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$.

Em $x = 1$ *não há derivada porque*

$$f'_d(1) = \lim_{x=1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x=1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$f'_e(1) = \lim_{x=1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x=1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Em $x = -1$ *vem*

$$f'_d(-1) = \lim_{x=-1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x-1} = \lim_{x=-1+0} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$f'_e(-1) = \lim_{x=-1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x=-1-0} \frac{x}{x+1} = +\infty.$$

2) $$P \frac{\textit{arc sen } x}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x - 2P \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x + 4P \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\,\textit{arc sen } x + 4\sqrt{1-x}.$$

3) *Como a série das derivadas* $s(x) = \Sigma a_n x^n$ *é convergente para* $x = \lambda$, *então ela é uniformemente convergente em* $[0, \lambda]$ *e como neste intervalo a série das primitivas* $S(x) = \Sigma a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ *tem sempre um ponto de convergência ela também é uniformemente convergente em* $[0, \lambda]$. *Tem-se então* $S'(\lambda) = s(\lambda)$.

A série das derivadas é $\Sigma \cos n^2 x$, *divergente. Portanto, a série proposta não pode ser derivada termo a termo.*

II

5647 — 1) Considere uma curva dada pelas equações paramétricas $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Mostre que só pode haver assíntotas não paralelas aos eixos para os valores $t = t_0$ tais que $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = \infty$. Sendo $Y = mX + p$ a assíntota, como calcula m e p neste caso? Como se acham as assíntotas paralelas aos eixos? Justifique as respostas.

2) Seja $g(x, y) = \begin{cases} y & (x = y^2) \\ 0 & (x \neq y^2) \end{cases}$.

Prove que:

a) $g(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$;

b) $g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$;

c) $g(x, y)$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Em face do resultado obtido na alínea *c*), que pode dizer da continuidade de $g'_x(x, y)$ e $g'_y(x, y)$ em $(0, 0)$? Porquê?

R: 1) *Se* $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \lim\limits_{t=t_0} x$ *é finito ou* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = \lim\limits_{t=t_0} y$ *é finito, não pode haver assíntotas oblíquas porque para estas tem de ser* $\lim x = \lim y = \infty$.

$$m = \lim_{t=t_0} \frac{y}{x} = \lim_{t=t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$$

$$p = \lim_{t=t_0} (y - mx) = \lim_{t=t_0} [\psi(t) - m\varphi(t)].$$

Assíntotas paralelas a Oy: $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t)$ *finito e* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t) = \infty$

Assíntotas paralelas a Ox: $\lim\limits_{t=t_0} \varphi(t) = \infty$ *e* $\lim\limits_{t=t_0} \psi(t)$ *finito.*

2) a) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon = \delta : \begin{Bmatrix} |x| < \varepsilon \\ |y| < \varepsilon \end{Bmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow |g(x, y)| < \delta$

o que indica que $\lim\limits_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$.

b) $$g'_x(0, 0) = \lim_{x=0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = 0$$

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y=0} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y} = 0.$$

c) *Se a função for diferenciável em* $(0, 0)$ *verifi-*

ca-se a relação $g(x,y) - g(0,0) = x\,g'_x(0,0) + y\,g'_y(0,0) + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$ *com* $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \varepsilon = 0$ *ou*

$$g(x,y) = \varepsilon\sqrt{x^2+x^2} \quad \textit{com} \lim_{\substack{x=0\\x=0}} \varepsilon = 0\,.$$

Ora

$$\varepsilon = \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x = y^2) \\ 0 & (x \neq y^2) \end{cases}$$

e $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \varepsilon$ *não existe. A função* $g(x,y)$ *não é diferenciável e por isso pode garantir-se que* $g'_x(x,y)$ *e* $g'_y(x,y)$ *não são contínuas em* $(0,0)$ *(se alguma delas o fosse, a função era diferenciável).*

III

5648 — 1) De um polinómio $I(x)$, de grau inferior a $n+1$, conhecem-se os valores $I(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$. Utilize a decomposição da fracção racional $\dfrac{I(x)}{(x-x_0)(x+x_1)\cdots(x-x_n)}$ em elementos simples para deduzir a expressão de $I(x)$. O que é o polinómio $I(x)$ e sob que forma se apresenta?

2) Demonstre que matrizes ortogonais dão produto ortogonal. Sendo A ortogonal, mostre que o sistema de equações $AX = B$ é possível determinado e $x_j = a_{hj}\,b_h$ $(h = 1, \cdots n)$.

Discuta o sistema

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\beta + z = 1 \\ x + y \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + z = \cos\beta \\ x + y\cos\beta + z\operatorname{sen}\alpha = 1\,. \end{cases}$$

R: 1) *Fazendo* $\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ *e* $\varphi_i(x) = \varphi(x)/x - x_i$, *vem* $\dfrac{I(x)}{\varphi(x)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{y_i}{\varphi_i(x_i)(x - x_i)}$, *donde* $I(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}\,y_i$. $I(x)$ *é o polinómio interpolador de* LAGRANGE.

2)
$$|A| = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & cos\,\beta & 1 \\ 1 & sen\,\alpha\,cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & sen\,\alpha \end{vmatrix} = cos\,\beta\,(sen\,\alpha - 1)\,(sen\,\alpha + 2)\,(sen\,\alpha - 2)\,.$$

a) *Quando* $cos\,\beta \neq 0 \wedge sen\,\alpha \neq 1$, *isto é,* $\beta \neq 2\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *o sistema é* possível determinado *e a regra de* CRAMER *fornece a sua solução.*

b) *Quando* $cos\,\beta = 0 \wedge sen\,\alpha = 1$, *isto é,* $\beta = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha = n + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *vem* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *mas, como* $\Delta = |1| \neq 0$, *vem* $r = 1$. *Os determinantes característicos são* $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ *e* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. *O* sistema é impossível.

c) *Quando* $cos\,\beta = 0 \wedge sen\,\alpha \neq 1$, *isto é,* $\beta = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ *vem* $|A| = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & sen\,\alpha \end{vmatrix} = 0$ *mas* $\begin{vmatrix} sen\,\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *e* $r = 2$. *O característico é* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & sen\,\alpha & 1 \end{vmatrix} = 2\,(sen\,\alpha - 1) \neq 0$ *e o* sistema é impossível.

d) *Quando* $cos\,\beta \neq 0 \wedge sen\,\alpha = 1$, *isto é,* $\beta \neq 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \wedge \alpha = 2n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$, *vem* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & 1 \\ 1 & cos\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta = |1| \neq 0$, $r = 1$ *e os característicos são* $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & cos\,\beta \end{vmatrix} = cos\,\beta - 1$ *e* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Com $cos\,\beta = 1$, *o sistema é* duplamente indeterminado *e, com* $cos\,\beta \neq 1$, *o* sistema é impossível.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — MATEMATICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 9-7-1965.

5649 — 1) Designando por $w_0, w_1, \cdots w_{n-1}$ as raízes de índice n da unidade, calcule $w_0^p + w_1^p + \cdots + w_{n-1}^p$, sendo p inteiro positivo múltiplo de n.

R: $w_k = cis\,\dfrac{2k\pi}{n} \Longrightarrow w_k^p = cis\,\dfrac{2kp\pi}{n}$ *e, com* $p = \dot{n}$, *vem* $w_k^p = cis\,2l\pi = 1$, *o que implica* $w_0^p + w_1^p + \cdots + w_{n-1}^p = n$.

2) Dada a fracção racional $u(x) = \dfrac{3x+4}{x(x+1)(x+2)}$, decomponha-a em elementos simples e aproveite o resultado para calcular $P\,u(x)$ e achar a soma da série $\sum\limits_{1}^{\infty} u(n)$.

Sendo f e g dois polinómios reais quaisquer, qual é a condição que garante a convergência da série $\Sigma f(n)/g(n)$? Porquê?

R:

$$\frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a_0}{x} + \frac{b_0}{x+1} + \frac{c_0}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$P\,\frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} = 2\,log\,|x| - log\,|x+1| -$$

$$- log\,|x+2| = log\,\frac{x^2}{|(x+1)(x+2)|}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \sum_1^\infty \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \sum_1^\infty \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$S = \frac{5}{2}.$$

Sendo p *o grau de* $f(n)$ *e* q *o grau de* $g(n)$, *a condição que garante a convergência de* $\Sigma f(n)/g(n)$ *é* $q \geqq p+2$.

3) Considere a função $f_n(x) = \log\left(1+\frac{x}{n}\right) - x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, onde n designa um número natural, e prove que possui apenas um máximo no seu campo de existência.

Sendo M_n o máximo de $f_n(x)$ e x_n o maximizante, calcule $\lim\limits_{n=\infty}(x_n, M_n)$.

R: $$f'_n(x) = \frac{1/n}{1+x/n} - log\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+x} - log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$f'_n(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n+x} - log\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n+x} \geqq log\left(1+\frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \leqq \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$f'_n(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$x_n = \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

$$M_n = log\left[\frac{1}{n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] - \left[\frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right] \times$$

$$\times\, log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n=\infty} x_n = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1 - n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1 - n\left(\frac{1}{n} - \lambda\frac{1}{n^2}\right)}{\eta\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{\eta} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n=\infty} M_n = \lim_{n=\infty}\left\{log\left[\frac{1}{n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] - 1 + \right.$$

$$\left. + n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = 0$$

e portanto $\lim\limits_{n=\infty}(x_n, M_n) = (1/2, 0)$.

4) Ache o termo geral do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $y = x^2\sqrt[4]{1+x}$ e aproveite o resultado para calcular $y^{(5)}(0)$.

R: $$\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{1/4} = \sum_0^\infty \binom{1/4}{n} x^n =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} x^n \quad para\ |x|<1$$

$$y = x^2\sqrt[4]{1+x} = \sum_0^\infty \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} x^{n+2}$$

$$para\ |x|<1$$

$$\frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 \Longrightarrow n+2=5 \Longrightarrow n=3 \quad e,\ portanto,$$

$$\frac{y^{(5)}(0)}{5!} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!} \Longrightarrow y^{(5)}(0) = \frac{105}{16}.$$

5) Sendo $f(x, y, z)$ homogénea de grau m, utilize o teorema de Euler e as operações de Jacobi para provar que

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & \dfrac{mf}{m-1} \end{vmatrix}.$$

R: *O teorema de* Euler *dá*

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f$$
$$x f''_{x^2} + y f''_{xy} + z f''_{xz} = (m-1) f'_x$$
$$x f''_{yx} + y f''_{y^2} + z f''_{yz} = (m-1) f'_y$$
$$x f''_{zx} + y f''_{zy} + z f''_{z^2} = (m-1) f'_z .$$

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{z} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ z f''_{zx} & z f''_{zy} & z f''_{z^2} \end{vmatrix}$$

e, multiplicando a 1.ª linha deste determinante por x, *a segunda por* y *e adicionando à 3.ª, vem*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{z} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ (m-1) f'_x & (m-1) f'_y & (m-1) f'_z \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{m-1}{z^2} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & z f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & z f''_{yz} \\ f'_x & f'_y & z f'_z \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a 1.ª coluna deste determinante por x, *a segunda por* y *e adicionando à 3.ª, vem*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = \frac{m-1}{z^2} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & (m-1) f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & (m-1) f'_y \\ f'_x & f'_y & m f \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{(m-1)^2}{z^2} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & \dfrac{m f}{m-1} \end{vmatrix}.$$

6) Designando ψ o número de inversões da permutação $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ em relação à permutação principal $(1, 2, 3)$, prove que não existe nenhuma matriz real de terceira ordem tal que todos os produtos $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ sejam positivos (sugestão: forme o produto de todas estas expressões e investigue o seu sinal).

Determine a expressão geral das matrizes permutáveis com $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

R: *Os produtos* $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ *são* $a_{11} a_{22} a_{33}$, $a_{12} a_{23} a_{31}$, $a_{13} a_{21} a_{32}$, $-a_{13} a_{22} a_{31}$, $-a_{12} a_{21} a_{33}$ *e* $-a_{11} a_{23} a_{32}$.

O produto de todas estas expressões é

$$-(a_{11}^2 a_{12}^2 a_{13}^2 a_{21}^2 a_{22}^2 a_{23}^2 a_{31}^2 a_{32}^2 a_{33}^2) < 0$$

e, portanto, os produtos da forma $(-1)^{\psi} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3}$ *não podem ser todos positivos.*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a-b & 2b-d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & -a+b \\ 2c+d & -c+d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a-c = 2a+b \\ 2b-d = -a+b \\ a+c = 2c+d \\ b+d = -c+d \end{cases}$$

e este sistema é equivalente a $\begin{cases} b = -c \\ b+a-d = 0 \\ c+d-a = 0 \end{cases}$, *indeterminado de grau 2. A solução é* $\begin{cases} b = d-a \\ c = a-d \end{cases}$ *e, portanto, as matrizes permutáveis com a matriz dada são da forma* $\begin{bmatrix} a & d-a \\ a-d & d \end{bmatrix}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — 13-7-1965.

5650 — 1) Demonstre que $(A - B) \cup B = A \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow A \supseteq B$.

R: *Fazendo* $p = x \in A$ *e* $q = x \in B$, *tem de se provar que*

$$\{[(p \wedge \sim q) \vee q] \Longleftrightarrow p\} \Longleftrightarrow (q \Longrightarrow p)$$

para o que basta construir a seguinte tabela de verdade

p	q	$\{[(p \wedge \sim q) \vee q] \Longleftrightarrow p\}$		$\Longleftrightarrow$	$(q \Longrightarrow p)$
0	0	0	0 0 1 0	1	1
0	1	0	1 1 0 0	1	0
1	0	1	1 0 1 1	1	1
1	1	0	1 1 1 1	1	1

2) Dada a família (C_a) de curvas de equações $y = e^x - a(x+1)$, onde a é um parâmetro real,

mostre que as curvas de (C_a) passam todas por um mesmo ponto. Ache as equações das assíntotas e prove também que estas passam por um mesmo ponto.

Para que valores de a as curvas de (C_a) têm um mínimo m_a? Calcule em função de a o mínimo m_a e o minimizante x_a.

R: *Tomando duas curvas quaisquer de* (C_a), *por exemplo, as que correspondem a* $a = 0$ *e* $a = 1$, *vem*

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^x - (x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^x \\ x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^{-1} \\ x = -1, \end{cases}$$

isto é, as curvas passam todas pelo ponto $(-1, e^{-1})$.

Como $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$, *as assíntotes são as rectas* $Y = -a(X+1)$ *que passam todas pelo ponto* $(-1, 0)$.

Notando que $(y' = e^x - a$, *a função só pode possuir extremos quando* $a > 0$. *Nessa hipótese* $y' = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_a = \log a$ *e, como* $y'' > 0$, *trata-se de um minimizante. Tem-se* $x_a = \log a$ e $m_a = -a \log a$.

3) Sabendo que $4xy'' + 2y' - y = 0$ $(y = f(x))$, ache a série $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ $(a_0 = 1)$ tal que $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n x^n$. Qual é o intervalo de convergência desta série?

R:
$$y = \sum_0^\infty a_n x^n$$
$$y' = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$$
$$4x \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} + 2\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$
$$4 \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-1} + 2\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_0^\infty a_n x^n = 0$$
$$a_{n+1}[2(n+1)(2n+1)] = a_n$$
$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_{n-1}}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{[2(n+1)]!} = \frac{1}{[2(n+1)]!}$$
$$y = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(2n)!}$$

e o intervalo de convergência é $]-\infty, +\infty[$.

4) Calcule: *a)* $P \cos(\log x)$

b) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}}$

R: a) $P \cos(\log x) = x \cos(\log x) + P \operatorname{sen}(\log x) =$
$= x \cos(\log x) + x \operatorname{sen}(\log x) - P \cos(\log x)$

ou

$$2P\cos(\log x) = x\cos(\log x) + x \operatorname{sen}(\log x)$$
$$P\cos(\log x) = \frac{x}{2}[\cos(\log x) + \operatorname{sen}(\log x)]$$

b) *Como* $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ *e*

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen}} = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1 - \cos x} = \infty$$

tem-se uma indeterminação do tipo 1^∞.

Calculemos

$$\lim_{x=0} \log\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}}\right] = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{\log \operatorname{sen} x - \log x}{\frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x=0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$
$$= -\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1.$$

Logo,

$$\lim_{x=0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}} = e^{-1}.$$

5) Quais são as funções $f(x, y)$ que satisfazem à condição $f'_x(x, y) = g(y)$? Mesma questão para $f'_y(x, y) = g(x)$. Justifique as respostas.

As funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x^2 + 2bxy + y^2$ $(b \neq 0)$ têm derivadas idênticas ao longo da curva $C)$ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Ache a equação da curva $C)$ na forma $F(x, y) = 0$.

R:

$$f'_x(x, y) = g(y) \Rightarrow f(x, y) = g(y)x + \varphi(y)$$
$$f'_y(x, y) = g(x) \Rightarrow f(x, y) = g(x)y + \psi(x).$$
$$2x\varphi'(t) + 2y\psi'(t) = (2x + 2by)\varphi'(t) + (2y + 2bx)\psi'(t)$$

ou

$$y\varphi'(t) + x\psi'(t) = 0,$$

isto é,

$$F(x, y) \equiv xy - k = 0.$$

6) Verifique que no sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \\ x+2y=2 \\ 3x+4y=k \end{cases}$$

as três primeiras equações são independentes e mostre que, qualquer que seja k, a quarta equação é composição linear das três primeiras. Ache essa composição linear.

R: *Na matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{bmatrix}$$

tem-se $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ *e portanto, as três primeiras linhas (equações) são independentes. Como a matriz é do tipo* (4×3) *e a sua característica é* 3, *forçosamente a quarta linha é composição linear das três primeiras.*

Para achar essa composição linear tome-se

$$\Delta_{4t} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_{1t} \\ 2 & 3 & 0 & a_{2t} \\ 1 & 2 & 2 & a_{3t} \\ \hline 3 & 4 & k & a_{4t} \end{array}\right| = 0$$

e designemos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *e* $\lambda_4 = \Delta$, *respectivamente, os complementos de* a_{1t}, a_{2t}, a_{3t} *e* a_{4t}. *Tem-se*

$$\lambda_1 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = -k-2,$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = k-2,$$

$$\lambda_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} = -k \text{ e } \lambda_4 = 2$$

$$\begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 + 3\cdot\lambda_4 = 0 \\ 1\cdot\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + 4\cdot\lambda_4 = 0 \\ 0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 2\cdot\lambda_3 + k\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\lambda_1 [1\ 1\ 0] + \lambda_2 [2\ 3\ 0] + \lambda_3 [1\ 2\ 2] + \lambda_4 [3\ 4\ k] = 0$$

donde

$$[3\ 4\ k] = \left(\frac{k}{2}+1\right)[1\ 1\ 0] + \left(1-\frac{k}{2}\right)[2\ 3\ 0] + \frac{k}{2}[1\ 2\ 2]$$

ou

$$f_4 = \left(\frac{k}{2}+1\right) f_1 + \left(1-\frac{k}{2}\right) f_2 + \frac{k}{2} f_3 .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Outubro (prova escrita) — 1-10-1965.

I

5651 — 1) Mostre que o conjunto constituído pelas raízes cúbicas da unidade é um grupo multiplicativo.

R: *As raízes cúbicas da unidade são* $w_0 = 1$, $w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Em relação à operação multiplicação pode construir-se a tabela*

	w_0	w_1	w_2
w_0	w_0	w_1	w_2
w_1	w_1	w_2	w_0
w_2	w_2	w_0	w_1

donde se conclui fàcilmente que se trata de uma lei de composição interna, associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro $(w_0 = 1)$ *e existindo inverso para cada um dos elementos:* $w_0^{-1} = w_0$, $w_1^{-1} = w_2$, $w_2^{-1} = w_1$.

2) Seja $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $(x \geq 0)$, onde n é um número natural.

Compare os máximos M_n e M_{n-1} das duas funções $f_n(x)$ e $f_{n-1}(x)$ e calcule $\lim\limits_{n=\infty} \frac{M_n}{M_{n-1}}$.

R: *Tem-se* $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n!} e^{-x}(n-x)$ *e como*

$$f'_n(x) \geqq 0 \Longleftrightarrow x \leqq n$$
$$f'_n(x) \leqq 0 \Longleftrightarrow x \geqq n$$
$$f'_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = n,$$

e evidente que $x = n$ *é um maximizante e* $M_n = \dfrac{n^n}{n!} e^{-n}$.

Vem então $M_{n-1} = \dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(n-1)}$ *e* $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} =$ $= \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} \dfrac{1}{e}$. *Como* $\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} \uparrow e$ *é* $M_n < M_{n-1}$ *e* $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{M_n}{M_{n-1}} = 1$.

3) Calcule $P \dfrac{1}{x^4 - 5x^2 - 36}$.

R: *Como* $x^4 - 5x^2 - 36 = (x-3)(x+3)(x^2+4)$, *tem-se*

$$\frac{1}{x^4 - 5x^2 - 36} = \frac{a_0}{x-3} + \frac{b_0}{x+3} + \frac{S_0}{x^2+4}$$

$$a_0 = \left[\frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\right]_{x=3} = \frac{1}{108},$$

$$b_0 = \left[\frac{1}{(x-3)(x^2+4)}\right]_{x=-3} = -\frac{1}{108}$$

e, fazendo $\Delta = x^2 + 4$, *tome-se*

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{-13+\Delta}$$

donde resulta $S_0 = -1/13$.

Tem-se então

$$P \frac{1}{x^4 - 5x^2 - 36} = \frac{1}{108} \log \left| \frac{x+3}{x-3} \right| - \frac{1}{26} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

4) A função $f(x)$ definida por $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^4 + x^2}$ é contínua em $]-\infty, +\infty[$? Porquê?

Sendo $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ que se anula para $x = 0$, pode garantir-se que

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$$

em $]-\infty, +\infty[$? Porquê?

R: *Como* $\forall\, x \in\,]-\infty, +\infty[\ \dfrac{1}{n^4 + x^2} \leqq \dfrac{1}{n^4}$ *e* $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^4}$ *é convergente, a série* $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^4 + x^2}$ *é uniformemente convergente em* $]-\infty, +\infty[$ *e portanto pode garantir-se que* $f(x)$ *é contínua.*

A série das primitivas $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n^2}$ *converge para* $x = 0$ *e portanto converge uniformemente em* $]-\infty, +\infty[$. *Pode pois garantir-se que* $F'(x) = f(x)$.

5) Suponha $f(x, y)$ diferenciável no círculo de centro $P(a, b)$ e seja $Q(a+h, b+k)$ um ponto da respectiva circunferência. Tome

$$\varphi(t) = f(a + ht, b + kt)$$

e, utilizando para esta função o teorema dos acréscimos finitos em $[0, 1]$, prove que $f(a+h, b+k) - f(a, b) = h f'_x(a + \theta h, b + \theta k) + k f'_y(a + \theta h, b + \theta k)$ com $0 < \theta < 1$.

R: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ *e portanto* $f(a+h, b+k) - f(a, b) = h f'_x(a + \theta h, b + \theta k) + k f'_y(a + \theta h, b + \theta k)$.

6) Demonstra-se que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^n \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \\ (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (x_n - x_{n-1}). \end{array}$$

Utilize este resultado e a teoria dos sistemas lineares para provar que, dados $n + 1$ pares de valores (x_i, y_i) $(i = 0, 1, \cdots, n)$ com $x_i \neq x_j$, existe um e um só polinómio interpolador $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

Empregando determinantes, indique as fórmulas que permitem obter $a_0, a_1, \cdots a_n$ em funcão dos valores x_i e y_i.

R: *Como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$, *em virtude de se ter* $x_i \neq x_j$, *o sistema de* $n + 1$ *equações a* $n+1$ *incógnitas* $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^n \quad (i = 0, 1, \cdots n)$$

é possível determinado e portanto existe um e um só polinómio interpolador.

Para obter as fórmulas que dão $a_0, a_1, \cdots a_n$ *basta utilizar a regra de Cramer:*

$$a_i = \frac{\Delta(i/y)}{\Delta} \quad (i = 0, 1, \cdots n)$$

onde $\Delta(i/y)$ *se obtém de* Δ *substituindo a sua i-ésima coluna pela coluna dos termos conhecidos* y_i.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — 1.º ponto de informação e 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 16-2-1966.

I

5652 — 1) Prove que é válido o argumento

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow [q \vee (r \vee s)] \\ \underline{\sim [p \wedge (r \vee s)]} \\ \therefore p \Rightarrow q \end{array}$$

2) Sendo a, b, c e d números racionais e admitindo que λ é irracional, prove que

$$a + b\lambda = c + d\lambda \Rightarrow a = c \wedge b = d.$$

R: 1) *Façamos uma demonstração pelo método de redução ao absurdo:*

1.	$p \Rightarrow [q \vee (r \vee s)]$	*prem.*
2.	$\sim [p \wedge (r \vee s)]$	*prem.*
3.	$\sim (p \Rightarrow q)$	*prem. adicional*
4.	$\sim p \vee [q \vee (r \vee s)]$	*1 e equiv.*
5.	$\sim p \vee \sim (r \vee s)$	*2 e equiv.*
6.	$p \wedge \sim q$	*3 e equiv.*
7.	p	*6 e simplif.*
8.	$\sim \sim p$	*7 e equiv.*
9.	$\sim (r \vee s)$	*5,8 e silog. disjuntivo*
10.	$(\sim p \vee q) \vee (r \vee s)$	*4 e equiv.*
11.	$\sim p \vee q$	*9,10 e silog. disjuntivo*
12.	$p \Rightarrow q$	*11 e equiv.*

2) $a + b\lambda = c + d\lambda \Rightarrow (a - c) + (b - d)\lambda = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - c = 0 \wedge (b - d)\lambda = 0 \Rightarrow a = c \wedge b = d.$

II

5653 — 1) Seja A um conjunto linear limitado e designem m e n números reais com $n > 0$. Mostre que $B = \{m + nx : x \in A\}$ é limitado e

$$\sup B = m + n \sup A, \quad \inf B = m + n \inf B.$$

2) Verifique a proposição $\overline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq \leq \overline{\lim}\,(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$, tomando

$$u_n = (-1)^n \frac{1 - 2n}{1 + n} \quad \text{e} \quad v_n = n^2 \log\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right].$$

R:

1) *Sendo* A *limitado, tem-se* $\forall x \in A \quad |x| \leq K$ *e portanto* $\forall x \in A \quad |m + nx| \leq |m| + nK$ *e o conjunto* B *é limitado.*

Com $L = \sup B$ *vem*

$$\forall x \in A \qquad x \leq L$$

$$\forall \delta > 0, \exists x' \in A \qquad x' > L - \frac{\delta}{n},$$

o que implica

$$\forall x \in A \qquad m + nx \leq m + nL$$

$$\forall \delta > 0 \exists x' \in A \qquad m + nx' > (m + nL) - \delta,$$

isto é, $m + nL$ *é* $\sup B$. *Raciocínio idêntico se adopta para mostrar que* $\inf B = m + n \inf A$.

2) $\overline{\lim}\, u_n = 2$, $\underline{\lim}\, v_n = -1$, $\overline{\lim}\, v_n = 1$

$$\overline{\lim}\,(u_n + v_n) = 1$$

e de facto

$$2 + (-1) \leq 1 \leq 2 + 1.$$

III

5654 — 1) Estude, dos pontos de vista da convergência absoluta e da convergência uniforme, a série $\sum \dfrac{x^n}{n\, 3^{n-1}}$.

2) Considere as funções reais de variável real que satisfazem à relação $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos os valores de x e y.

a) Calcule $f(0)$ e mostre que $f(x)$ é ímpar.

b) Mostre que, sendo $f(x)$ contínua para $x = 0$, ela é contínua para todo o valor de x.

R: 1) *Como*

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\, 3^n}}{\dfrac{x^n}{n\, 3^{n-1}}} \right| = \lim \frac{n}{3(n+1)} |x| = \frac{|x|}{3},$$

a série é absolutamente convergente para $|x| < 3$ *e divergente para* $|x| > 3$. *Para* $x = 3$ *a série diverge e para* $x = -3$ *a série converge simplesmente. A série é uniformemente convergente em qualquer intervalo* $[-3, a]$ $(a < 3)$.

2) a) *Fazendo* $x = y = 0$, *vem* $f(0) = 2f(0)$, *donde* $f(0) = 0$. *Então, tomando* $y = -x$, $f(x - x) = f(x) + f(-x)$ *ou* $f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, *o que significa que* $f(x)$ *é ímpar.*

b) *Sendo* $\lim\limits_{x=0} f(x) = f(0) = 0$ *e como* $f(x - a) = f(x) - f(a)$, *tem-se* $x \to a \Rightarrow f(x - a) \to 0 \Rightarrow \Rightarrow f(x) \to f(a)$.

Enunciados e soluções dos N.os 5643 a 5654
de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Exame final de Cálculo Infinitesimal — 11-6-65.

5655 — Enuncie condições que garantam que a equação diferencial $y' = f(x, y)$ tenha uma e uma só solução satisfazendo a condição $y(x_0) = \alpha$. Justifique que são satisfeitas tais condições se f for função de classe C' num conjunto fechado de R^2.

Determine pelo método de Picard (até termos em x^4) a solução da equação $y' = x - y$ que satisfaz a condição $y(0) = 1$. Confronte com o resultado obtido pelos métodos elementares e por desenvolvimento em série de Taylor.

Como aplicaria o método de Picard à pesquisa de uma solução aproximada da equação $\frac{d^2 y}{d t^2} = A \cos y + B \operatorname{sen} y$ (A, B constantes) satisfazendo a condição inicial $y(0) = 0 = y'(0)$?

5656 — Considere a secção feita no elipsóide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ pelo plano $x + y = 1$ e determine o ponto da curva mais próximo e o ponto mais afastado da origem do referencial (suposto ortonormado).

5657 — Diga como se generaliza o conceito de integral-R a domínios não limitados e enuncie e demonstre algum critério de convergência de integrais impróprios que tenha estudado.

Determine o volume do conjunto de R^3 definido por

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + 4z^2 \leqslant \frac{1}{y^2} \wedge y \geqslant 1\right\}.$$

5658 — Dado o campo vectorial $\vec{F} = y\,\vec{e_1} + z\,\vec{e_2} + x\,\vec{e_3}$, calcule, usando a definição de integral de superfície, o fluxo de rot $\vec{F}$ através das superfícies

$$S_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

Seria de prever a relação que existe entre os dois fluxos? Porquê?

Enunciados dos n.os 5655 a 5658 de F. R. Dias Agudo

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

159 — P. L. Hennequin et A. Tortrat — **Théorie des Probabilités et quelques Applications** — Masson et C.ie — Paris.

Este livro escrito com o objectivo de ser utilizado no 3.º ciclo francês e na investigação, é um tratado de introdução à teoria das probabilidades, no sentido em que não pretende cobrir um campo actualmente extremamente vasto, pois que compreende não só o núcleo desta teoria mas também todas as suas múltiplas ramificações e aplicações. Como introdução, o livro limita-se portanto a alguns objectivos fundamentais e a definir algumas vias de progresso.

Nestes termos aqui se encontra um desenvolvimento notável em extensão e em outros aspectos da teoria da medida que está na base de todos estes processos, da teoria da integração das funções de valores reais (ou complexos) sobre o espaço abstracto dos probabilistas e sobre os espaços topológicos.

Dedica em seguida um longo capítulo às leis de probabilidade em R ou R^n e as funções características, a sua unicidade, composição e convergência, apresentando numerosos exemplos assim como o carácter absolutamente contínuo e *singular* de algumas delas. O estudo das probabilidades *condicionadas* desenvolve-se principalmente nos domínios das pro-