Sobre as aplicações de $\mathscr{P}$(A) em $\mathscr{P}$(B)[1]

por **José Morgado**

Seja $g: B \to A$ uma aplicação de B em A. Se $X \subseteq A$, designa-se por $g^{-1}(X)$ o conjunto dos elementos de B cujas imagens por g são elementos de X, i. e.,

$$a \in g^{-1}(X), \text{ se e só se } g(a) \in X$$

Isto significa que g^{-1} é uma aplicação do conjunto $\mathscr{P}(A)$, formado pelas partes de A, no conjunto $\mathscr{P}(B)$, formado pelas partes de B.

No entanto, dada uma aplicação $f: \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$, pode acontecer que não exista nenhuma aplicação $g: B \to A$ para a qual se tenha $f = g^{-1}$. Por exemplo, sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$; se f é uma aplicação de $\mathscr{P}(A)$ em $\mathscr{P}(B)$ tal que $f(A) = \{1\}$ e $f(\{a\}) = \{1, 2\}$, não existe nenhuma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$, visto que, se X e Y são partes de A, então

$$X \subseteq Y \text{ implica } g^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(Y)$$

para toda aplicação $g: B \to A$.

Surge naturalmente o problema de caracterizar as aplicações $f: \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ para as quais existe alguma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$.

Para que exista uma tal aplicação $g: B \to A$, é evidentemente necessário que f satisfaça às condições:

(I) $$f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i),$$

para toda família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ *de partes de* A;

(II) $$f(A - X) = B - f(X),$$

para todo $X \in \mathscr{P}(A)$.

Isto resulta do facto de que, para toda aplicação $g: B \to A$, se tem

$$g^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} g^{-1}(A_i)$$

e

$$g^{-1}(A - X) = B - g^{-1}(X),$$

quaisquer que sejam a família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de A e a parte X de A.

Vejamos que as condições (I) e (II) são também suficientes.

Em primeiro lugar, observemos que

$$f(\emptyset) = \emptyset \text{ e } f(A) = B.$$

Com efeito, das condições (I) e (II) resulta

$$f(\emptyset) = f(\emptyset \cap (A - \emptyset)) = f(\emptyset) \cap f(A - \emptyset) = \\ = f(\emptyset) \cap (B - f(\emptyset)) = \emptyset$$

e, utilizando novamente a condição (II), obtém-se

$$f(A) = f(A - \emptyset) = B - f(\emptyset) = B.$$

Para estabelecermos a suficiência das condições (I) (II), basta mostrar que para todo $b \in B$ existe um e um só elemento $a \in A$ tal que $b \in f(\{a\})$, porque, pondo então $g(b) = a$, obtém-se uma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$.

Vejamos então que:

---

(1) Nota de aula.

1) *Existe pelo menos um elemento* $a \in A$ *tal que* $b \in f(\{a\})$.

De facto, se para nenhum $a \in A$ se tem $b \in f(\{a\})$, então tem-se

$$b \in B - f(\{a\}) \text{ para todo } a \in A,$$

donde

$$b \in \bigcap_{a \in A} (B - f(\{a\})) = \bigcap_{a \in A} f(A - \{a\}), \text{ por (II)}$$
$$= f(\bigcap_{a \in A}(A - \{a\})), \text{ por (I)}.$$

Mas

$$\bigcap_{a \in A}(A - \{a\}) = \emptyset,$$

porque

$$x \in \bigcap_{a \in A}(A - \{a\}) \text{ implica } x \in A - \{x\},$$

o que é absurdo.

Quer dizer, se para nenhum $a \in A$ se tivesse $b \in f(\{a\})$, ter-se-ia $b \in \emptyset$.

2) *Não existe mais que um elemento* $a \in A$ *tal que* $b \in f(\{a\})$.

Com efeito, se

$$b \in f(\{a\}) \text{ e } b \in f(\{a'\})$$

onde $a, a' \in A$ e $a' \neq a$, então resultaria

$$b \in f(\{a\}) \cap f(\{a'\}) = f(\{a\} \cap \{a'\}) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

o que é absurdo.

Por consequência, é válido o seguinte

Teorema: *Seja* f *uma aplicação de* $\mathscr{P}(A)$ *em* $\mathscr{P}(B)$. *Para que exista uma aplicação* g *de* B *em* A *tal que se tenha* $f = g^{-1}$, *é necessário e suficiente que* f *satisfaça àsc condições* (I) *e* (II).

É imediato que a condição (I) pode ser substituída pela condição

$$\text{(I')} \qquad f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

para toda família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ *de partes de* A.

Na verdade, se as condições (I) e (II) são satisfeitas, então

$$f(\bigcup_{i \in I} A_i) = f(A - \bigcap_{i \in I}(A - A_i)) =$$
$$= B - f(\bigcap_{i \in I}(A - A_i)) = B - \bigcap_{i \in I}(f(A - A_i)) =$$
$$= \bigcup_{i \in I}(B - f(A - A_i)) =$$
$$= \bigcup_{i \in I}(B - (B - f(A_i))) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

o que mostra que (I) e (II) implicam (I') e (II). Anàlogamente se vê que (I') e (II) implicam (I) e (II).

Recordemos que, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são álgebras de Boole completas e f é uma aplicação de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$ tal que

$$f(\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} f(a_i),$$

para toda família $\{a_i\}_{i \in I}$ *de elementos de* $\mathfrak{A}$

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)},$$

para todo elemento $a \in \mathfrak{A}$, *onde por* $\overline{x}$ *se designa o complemento de* x,

então diz-se que f é um *homomorfismo completo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$.

Ora, se A e B são conjuntos não vazios, então os conjuntos $\mathscr{P}(A)$ e $\mathscr{P}(B)$ constituem álgebras de Boole, relativamente à intersecção, união e complementação de conjuntos.

Podemos, por consequência, afirmar que, *se* A *e* B *são conjuntos não vazios e* f *é uma aplicação de* $\mathscr{P}(A)$ *em* $\mathscr{P}(B)$, *então existe uma aplicação* g *de* B *em* A *tal que* $f = g^{-1}$, *se e só se* f *é um homomorfismo completo da álgebra de* Boole $\mathscr{P}(A)$ *na álgebra de* Boole $\mathscr{P}(B)$.