Um novo método numérico de extração da raiz quadrada

por Ruy Madsen Barbosa

Por ocasião do Curso de Férias de Verão, do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, em Janeiro de 1964, em São Paulo, apresentamos, numa palestra para professôres secundários de matemática, um novo método numérico de extração da raiz quadrada, não só como um trabalho de cálculo numérico, mas especialmente com finalidades didáticas.

Julgávamos que o método apresentava sôbre o procedimento tradicional, baseado na expansão quadrática de um binômio, a vantagem importante de ser muito mais fàcilmente entendida as suas razões.

Hoje, já possuimos os primeiros resultados, os quais vêm confirmando o nosso julgamento a priori; temos recebido comunicações de vários mestres que o têm empregado, e todas favoráveis.

Com o intuito de divulgar mais amplamente o método, para utilização, ou mesmo para novas experimentações, cujos resultados, se comunicados, agradecemos as atenções, publicamos nas páginas da Gazeta de Matemática, a cópia do trabalho mimeografado pelo G. E. E. M.

Preliminares

Dois tópicos do nosso curso secundário têm sempre suscitado indagações: a radiciação e as progressões; o primeiro pelas dificuldades didáticas em se expor as razões do algorítmo usual de extração da raiz quadrada; o segundo pelo fato de muitos mestres julgarem de pouca importância.

O presente trabalho que apresentamos; fruto de idéias de meu irmão Newton Ataliba Madsen Barbósa, cremos, vem de encontro aos dois problemas, conciliando-os.

Procuramos nestas linhas, apresentar, sucintamente, a introdução no curso ginasial de elementos sôbre as sucessões de ímpares e pares no que diz respeito às suas somas; depois, raciocinando sôbre essas *particulares progressões aritméticas* obter o *novo processo de extração da raiz quadrada.*

No final do trabalho acrescentou-se a parte algébrica, o que poderia ser ministrado no primeiro científico (*), após as progressões, ou então, simultâneamente como simples aplicações.

A. Sucessões de ímpares.

A. 1. Os alunos já conhecem desde o curso primário a sucessão de números ímpares:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

Nós vomos estudar algumas propriedades curiosas desses números e bastante fáceis.

A. 2. *Somas.*

Façamos as somas seguintes:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

(*) Correspondente ao High School.

Observem os estudantes que 4 é o quadrado de 2, que 9 é o quadrado de 3, que 16 é o quadrado de 4; justamente o quadrado do número de ímpares considerados.

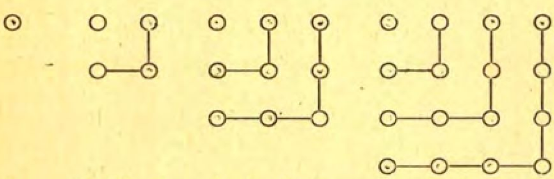
Esta é uma propriedade verdadeira para qualquer número de ímpares; verifiquemos por exemplo na sucessão seguinte de 5 ímpares:

$$1+3+5+7+9=25$$

25 é o quadrado de 5.

Verifiquem em suas casas, para obter outras sucessões de ímpares, por exemplo, para 6, para 7, etc. para 10 ímpares; aliás observem também que a regra é válida para o primeiro ímpar sòzinho.

Nas figuras abaixo (*) cada bolinha corresponde a uma unidade, e cada ímpar é representado por bolinhas unidas por um traço; verifiquem que a forma de cada figura é de um quadrado, o que nos mostra novamente que a propriedade está certa.



1	$1+3=4$	$1+3+5=9$	$1+3+5+7=16$
1^2	2^2	3^2	4^2

Conclusão: *A soma dos ímpares é igual ao quadrado do número de ímpares considerados.*

A. 3. Ímpar sucessivo.

Consideremos as sucessões de ímpares

1	de 1 ímpar
1, 3	de 2 ímpares
1, 3, 5	de 3 ímpares
1, 3, 5, 7	de 4 ímpares

(*) A disposição utilizada é denominada processo gnomônico.

Observemos que em cada sucessão, para se achar o ímpar seguinte nós *multiplicamos por 2 a quantidade de ímpares que possuímos e adicionamos uma unidade.*

Assim, da primeira para a segunda:
$2\times1+1=3$ que é o ímpar seguinte.

Da segunda para a terceira:
$2\times2+1=5$ que é o ímpar seguinte.

Da terceira para a quarta:
$2\times3+1=7$

Vamos ver se a regra dá certo em seguida:
Temos 4 ímpares: 1, 3, 5, 7.
$2\times4+1=9$ e, 9 é o ímpar seguinte.

Vamos verificar novamente: 1, 3, 5, 7, 9.
$2\times5+1=11$.

Verifiquem em casa até obterem uma sucessão de 10 ímpares.

B. Sucessão de pares.

B. 1. Vamos fazer estudo semelhante com a sucessão de pares:
0, 2, 4, 6, 8, ...

B. 2. Façamos as somas:

$$\begin{aligned} 0+2 &= 2 \\ 0+2+4 &= 6 \\ 0+2+4+6 &= 12 \\ 0+2+4+6+8 &= 20 \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= 2\times1 \\ 6 &= 3\times2 \\ 12 &= 4\times3 \\ 20 &= 5\times4 \end{aligned}$$

isto é:

A soma dos pares é igual ao número de pares considerados, multiplicado pelo número antecessor.

Vamos verificar para a sucessão de 6 pares:

$6 \times 5 = 30$

De fato:

$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 .$

Façamos outro exemplo com 7 pares:

$7 \times 6 = 42$

Está certo:

$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 .$

B. 3. Par sucessivo:

Os alunos vão descobrir a regra para se achar o par seguinte (*).

C. Extração da raiz quadrada.

C. 1. Por separação em intervalos.

C. 1. 1. *Preliminares.*

Como questões preparatórias ao algoritmo de extração da raiz quadrada nós propomos que se forneça aos alunos questões como a seguinte:

— quantos ímpares estão contidos em 27?

E, deixe-os escrever a sucessão de ímpares e a de quadrados, até chegar ao número fornecido:

ímpares	1	3	5	7	9	11
quadrados	1	4	9	16	25	36

27

Resposta: Existem 5 ímpares e sobram 2.

(*) Esta regra não será utilizada no presente trabalho, mas por certo despertará interêsse.

Lembrar aos alunos que o 5 encontrado é na verdade a raiz quadrada aproximada por falta de 27:

$$\sqrt{27} \cong 5 .$$

Na fase seguinte proponha a mesma questão no caso do número ser «grande», por exemplo 1 428, e chame atenção dos alunos para a dificuldade que o processo traria até chegarmos ao 1 428; o que nos obriga a descobrir um processo mais rápido.

C. 1. 2. *Usando as propriedades das sucessões.*

a) Primeiro exemplo estudado:

Consideremos para primeiro exemplo o número 52.

Tomemos um quadrado qualquer conhecido, 9 por exemplo, que é o quadrado de 3, portanto conforme o que nós aprendemos anteriormente: *soma dos 3 primeiros ímpares:* 1, 3 e 5.

Com esta escolha *separamos a sucessão em dois intervalos* como ilustra a esquema abaixo:

	1.º intervalo			2.º intervalo
ímpares	1	3	5	
quadrados	1	4	9	

52

No segundo intervalo, os ímpares devem somar $52 - 9 = 43$ ou, pelo menos quase 43 (*).

O 1.º ímpar do 2.º intervalo, nós também já aprendemos a calcular pela *regra do ímpar seguinte:*

$$2 \times 3 + 1 = 7 .$$

Os ímpares do segundo intervalo são portanto:

7, 9, 11?

(*) Conforme 52 seja ou não um quadrado.

ou

$$7+0,\ 7+2,\ 7+4,\ 7+6?$$

Procuremos agora quantos ímpares existem no segundo intervalo; é fácil, basta dividirmos o 43 por 7.

Vejamos

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

Temos então seis 7, e os pares: 0, 2, 4, etc.?

Devemos ter no segundo intervalo uma sucessão de 6 pares; e nós também já aprendemos a calcular a soma de 6 pares:

$$6 \times 5 = 30\,.$$

Logo, não podem existir seis 7, que quase fornecem os 43.

Reduzamos para cinco 7:

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ \hline 8 & 5 \end{array}$$

Neste caso a soma dos pares seria:

$$5 \times 4 = 20$$

que é também maior que o resto 8, portanto também não serve.

Reduzamos, novamente, para quatro 7.

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ \hline 15 & 4 \end{array}$$

e, agora, a soma dos pares é:

$$4 \times 3 = 12$$

menor que o resto 15 e ainda sobram 3, pois:

$$\begin{array}{r} 15 \\ -12 \\ \hline 3 \end{array}$$

Concluímos, finalmente, que no segundo intervalo existem 4 ímpares e sobra o número 3.

Como no primeiro intervalo tínhamos 3 ímpares, temos ao todo $3+4=7$ ímpares e sobra o número 3; ou que:

$\sqrt{52} \cong 7$ aproximado por falta, resto 3.

b) Segundo exemplo estudado:

Seja extrair a raiz de 38.

1. Tomemos o quadrado de 4, que é 16 (1.º intervalo)

$$\begin{array}{r} 38 \\ -16 \\ \hline 22 \end{array}$$

Sobram 22 para o segundo intervalo.

2. O primeiro ímpar do segundo intervalo é:

$$\begin{array}{r} 2 \times 4 = 8 \\ +1 \\ \hline 9 \end{array}$$

3. Vejamos quantos ímpares existem em 23:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 9 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

4. A soma dos pares é:

$$2 \times 1 = 2$$

mas 2 é menor que o resto 4, logo é possível, e sobram ainda:

$$\begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array}$$

Concluímos que no segundo intervalo de fato existem 2 ímpares.

5. Total de ímpares:

$$4+2=6\,.$$

6. Conclusão

$\sqrt{38} = 6$ aproximada por falta, resto 2.

C. 2. *Exercícios:*

1. Determine a raiz quadrada dos números seguintes, escrevendo as sucessões de ímpares e de quadrados:

a) $\sqrt{45}$ *b*) $\sqrt{69}$ *c*) $\sqrt{88}$.

2. Determine a raiz quadrada dos números seguintes, separando a sucessão em dois intervalos.

$a)$ $\sqrt{87}$ escolhendo o quadrado de 5

$b)$ $\sqrt{62}$ » » de 6

$c)$ $\sqrt{29}$ » » de 4.

Resolva as questões do exercício 2 fazendo Você as escolhas.

4. Calcule a raiz quadrada dos números seguintes:

$a)$ 432 escolhendo o quadrado de 20

$b)$ 986 » » » 30

$c)$ 158 » » » 10

$d)$ 576 » » » 20

5. Resolva os exercícios anteriores escolhendo outros quadrados, compare os cálculos feitos; qual escolha é preferível?

D. Novo algoritmo para extração da raiz quadrada.

D. 1. *Preliminares.*

O professor poderá aproveitar os exercícios exploratórios, como o 4.º e 5.º, para ensinar-lhes que devem separar os números em classes de dois algarismos e buscar a raiz aproximada da 1.ª, e acrescentar os zeros conforme o número de classes para determinar um «bom quadrado» para o primeiro intervalo (*).

Também é importante ensinar-lhes quantos algarismos terá a raiz, o que em alguns casos ajuda a determinação do quociente correto na busca do número de ímpares do segundo intervalo.

D. 2. *Dispositivo.*

Para o novo algoritmo da extração da raiz quadrada nós sugerimos o dispositivo seguinte onde escrevemos ao lado algumas indicações que julgamos úteis.

$\sqrt{87} = ?$ quadrado escolhido $= 25 = 5^2$

	$\sqrt{87}$	$5 \times 2 =$ 10		
(1.º intervalo)	-25	$+1$		
(2.º intervalo)	62	Divisor $=$ 11 (1.º ímpar do 2.º intervalo)		
(1.º resto parcial)	7	(N.º de ímpares) 5 $\times 4$	4 $\times 3$	Raiz $= 5+4 = 9$
(2.º » »)	18	(Soma dos pares) 20	12	
	-12	maior que o 7 corto o 7	menor que o 18 subtraio do 18	
Resto	$= 6$			

(*) Esta escolha como já verificaram não é necessária, mas facilita bastante.

D. 3. Outros exemplos:

a) $\sqrt{374}$ Previsão: 2 algarismos

$\sqrt{3} \cong 1$, logo usamos $10^2 = 100$

$\sqrt{}$ 374	$10 \times 2 = 20$	
-100	$+1$	
274	21	
85	9^*	Raiz $= 10 + 9 = 19$
-72	$\times 8$	
Resto $= 13$	(menor) 72	

* Observar que, com a escolha feita: $10^2 = 100$, já sabemos que o número de ímpares é um número com um só algarismo.

b) $\sqrt{3244}$ Previsão: 2 algarismos

$\sqrt{32} \cong 5$, logo usamos $50^2 = 2500$

$\sqrt{}$ 3244	$50 \times 2 = 100$		
-2500	$+1$		
744	101		
37			
138	7	6	Raiz $= 50 + 6 = 56$
-30	$\times 6$	$\times 5$	
Resto $= 108$	(maior) 42	30 (menor)	
	cancelo o 37		

c) $\sqrt{7365}$ Previsão: 2 algarismos

$\sqrt{73} \cong 8$, usamos $6400 = 80^2$

$\sqrt{}$ 7365	$80 \times 2 = 160$	
-6400	$+1$	
965	161	
160	5	Raiz $= 80 + 5 = 85$
-20	$\times 4$	
Resto $= 140$	(menor) 20	

d) $\sqrt{5973}$

$\sqrt{5973}$	$70\times 2=140$	
4900	$+1$	
1073	141	
86	7	Raiz $=70+7=77$
-42	$\times 6$	
Resto $=44$	(menor) 42	

e) $\sqrt{83526}$

$\sqrt{83526}$	$200\times 2=400$		
40000	$+1$		
43526	401		
7436			
3827	99	89	Raiz $=200+89=289$
11446	$\times 98$	$\times 88$	
7837	(maior) —	712	
-7832		712	
Resto $=0005$		7832 (menor)	

Observações — Nesta raiz previmos 3 algarismos, o primeiro era 2, portanto quando fomos dividir 43526 por 401 separamos o 6 final e procuramos 4352 por 401 para pesquisar o segundo algarismo, e o 6 deixamos para abaixar depois para pesquisarmos o terceiro algarismo.

Para o teste da soma dos pares ganhamos também em cálculo, observando que enquanto tivermos mais que 90 a soma fornecerá mais que $90\times 90=8100$, portanto mais que o próprio resto anterior 7436; logo reduzimos já para 89.

E. Apêndice para o Curso Colegial.

E. 1. Soma de ímpares

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 .$$

Sugestões: *a*) Indução completa.

b) Soma de têrmos da progressão aritmética com: primeiro termo $=1$, razão $=2$, último $=2k-1$.

E. 2. Impar sucessivo

$(2k-1)+2=2k+1$.

E. 3. Soma de Pares (começando com o zero)

$0+2+4+6+\cdots+2(k-1)=k(k-1)$.

Sugestões: *a*) Indução completa.

b) Soma de têrmos em progressão aritmética com: 1.° termo $=0$, razão $=2$, último termo $=2(k-1)$.

E. 4. Demonstração do Algoritmo.

Seja o número $Y=X^2+R$.

Seja Z^2 qualquer quadrado inferior a Y e $D=Y-Z^2$.

Pela E. 1. $1+3+5+\cdots+(2Z-1)=Z^2$.

Pela E. 2. o impar seguinte é $2Z + 1 = m$.

Dividindo-se D por m obtém-se o número q de ímpares do intervalo seguinte.

Seja $D = m \cdot q + r$.

Mas D é a soma de ímpares, portanto tirando-se m de todos obtemos a sucessão de pares: $0, 2, 4, 6, \cdots$, de soma: $q(q-1)$ (pela propriedade E. 3.).

Seja $D' = D - R =$ soma dos ímpares do 2.º intervalo

portanto $D' - m \cdot q = q(q-1)$

mas $r = D - m \cdot q$

portanto:

$$r = D' - m \cdot q + R$$

ou substituindo:

$$r = q(q-1) + R \Rightarrow q(q-1) \leq r .$$

Verificada a condição anterior deveremos ter:

$$Z + q = X$$

ou que

$$\sqrt{Y} = Z + q \text{ com resto } R .$$

Sôbre a origem da Álgebra Moderna [1]

por Otto Endler [2]

O enorme progresso que a Matemática realizou nos últimos cinquenta anos e ainda está realizando hoje, é estreitamente ligado à algebrização da Matemática começada neste século, i. e., a penetração em todas as disciplinas matemáticas dos métodos que foram primeiro aplicados na Álgebra Moderna.

Por esta razão, o estudo de Matemática hoje em dia começa necessàriamente por um curso de introdução à Álgebra Moderna, e todo estudante de Matemática sabe do que trata esta disciplina: É o estudo de grupos, aneis, corpos e outras estruturas algébricas, i. e., estruturas definidas por uma ou algumas operações, internas ou externas, que satisfaçam a certas condições prescritas. Porém, perguntado sobre o que é a Álgebra Clássica, o estudante em geral não saberá responder. Na medida em que é reconhecida a importância da Álgebra Moderna, está sendo esquecida a Álgebra Clássica. Isto é lamentável, pois foi essencialmente a Álgebra Clássica que deu origem á Álgebra Moderna, e acho que um certo conhecimento deste desenvolvimento deveria fazer parte da formação geral de todo matemático.

O que é a Álgebra Clássica? Cem anos atrás, SERRET, um importante algebrista francês, definiu a Álgebra como a «análise de equações». De fato, desde 2000 A. C. até há pouco mais que um século, o problema central da Álgebra era de resolver equações algébricas por radicais, i. e., dada uma equação algébrica

$$X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n = 0 ,$$

(1) Conferência proferida no Instituto de Matemática da Universidade do Ceará, em 24-4-1965, no Instituto Central de Matemática da Universidade de Paraíba, em 3-5-1965 (aula inaugural) e no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, em 5-5-1965.

(2) Instituto de Matemática P. e A., Rio de Janeiro e Mathematisches Institut der Universität Bonn.