Pela E. 2. o impar seguinte é $2Z + 1 = m$.

Dividindo-se $D$ por $m$ obtém-se o número $q$ de ímpares do intervalo seguinte.

Seja $D = m \cdot q + r$.

Mas $D$ é a soma de ímpares, portanto tirando-se $m$ de todos obtemos a sucessão de pares: $0, 2, 4, 6, \cdots$, de soma: $q(q-1)$ (pela propriedade E. 3.).

Seja $D' = D - R =$ soma dos ímpares do 2.º intervalo

portanto $D' - m \cdot q = q(q-1)$

mas $r = D - m \cdot q$

portanto:

$$r = D' - m \cdot q + R$$

ou substituindo:

$$r = q(q-1) + R \Rightarrow q(q-1) \leq r.$$

Verificada a condição anterior deveremos ter:

$$Z + q = X$$

ou que

$$\sqrt{Y} = Z + q \text{ com resto } R.$$

# *Sôbre a origem da Álgebra Moderna* [1]

*por* ***Otto Endler*** [2]

O enorme progresso que a Matemática realizou nos últimos cinquenta anos e ainda está realizando hoje, é estreitamente ligado à algebrização da Matemática começada neste século, i. e., a penetração em todas as disciplinas matemáticas dos métodos que foram primeiro aplicados na Álgebra Moderna.

Por esta razão, o estudo de Matemática hoje em dia começa necessàriamente por um curso de introdução à Álgebra Moderna, e todo estudante de Matemática sabe do que trata esta disciplina: É o estudo de grupos, aneis, corpos e outras estruturas algébricas, i. e., estruturas definidas por uma ou algumas operações, internas ou externas, que satisfaçam a certas condições prescritas. Porém, perguntado sobre o que é a Álgebra Clássica, o estudante em geral não saberá responder. Na medida em que é reconhecida a importância da Álgebra Moderna, está sendo esquecida a Álgebra Clássica. Isto é lamentável, pois foi essencialmente a Álgebra Clássica que deu origem á Álgebra Moderna, e acho que um certo conhecimento deste desenvolvimento deveria fazer parte da formação geral de todo matemático.

O que é a Álgebra Clássica? Cem anos atrás, SERRET, um importante algebrista francês, definiu a Álgebra como a «análise de equações». De fato, desde 2000 A. C. até há pouco mais que um século, o problema central da Álgebra era de resolver equações algébricas por radicais, i. e., dada uma equação algébrica

$$X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot X + a_n = 0,$$

(1) Conferência proferida no Instituto de Matemática da Universidade do Ceará, em 24-4-1965, no Instituto Central de Matemática da Universidade de Paraíba, em 3-5-1965 (aula inaugural) e no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, em 5-5-1965.

(2) Instituto de Matemática P. e A., Rio de Janeiro e Mathematisches Institut der Universität Bonn.

indicar uma solução por meio de uma expressão nos coeficientes $a_1, \cdots, a_n$, utilizando as operações racionais e os radicais $\sqrt{\phantom{x}}$, $\sqrt[3]{\phantom{x}}$, $\sqrt[4]{\phantom{x}}$, etc., possivelmente iterados.

A necessidade de resolver equações algébricas apareceu há muito tempo. Sabe-se que já os Babilônios, aproximadamente 2000 A. C., conheciam, além das operações racionais, a raíz quadrática (i. e., o radical $\sqrt{\phantom{x}}$), e sabiam resolver qualquer equação do segundo grau. Aliás, eles possuiam um sistema de números parecido com o nosso sistema decimal, mas com base 60 em lugar de 10. Deve-se notar, porém, que os Babilônios não conheciam demonstrações; eles calculavam conforme certas regras as quais não justificavam.

Foram os antigos gregos (600 A. C. a 300 D. C., aproximadamente) que primeiro reconheceram a necessidade das demonstrações na Matemática. Já por volta de 500 A. C., PYTHAGORAS demonstrou que $\sqrt{2}$ é irracional. Mas apesar de terem descoberto os números irracionais, encontrados na forma de «razões incomensuráveis» nas construções geométricas, os matemáticos gregos reconheceram como números apenas os números naturais: 1, 2, 3, etc. Este fato atrasou o desenvolvimento da Álgebra que, na época grega, não fez nenhum progresso essencial. Deve-se mencionar, porém, que certos problemas de construção geométrica com régua e compasso (por exemplo, a trisecção de um ângulo, a quadratura do círculo), que foram formulados pelos matemáticos gregos, chamaram a atenção dos algebristas dos séculos subsequentes. Finalmente, já no declínio da Matemática grega, DIOPHANTOS (aproximadamente 250 D. C.) deu uma valiosa contribuição à Álgebra: Ele foi o primeiro a representar incógnitas por letras e a indicar a conhecida «regra dos sinais».

Depois da época grega, começando com o Império Romano, houve uma decadência da Matemática na Europa, que se estendeu à Idade Média. Enquanto isto, por volta de 700 D. C., os Hindus (possìvelmente influenciados pela Matemática babilónica ou chinesa) inventaram o número zero, considerado uma das grandes invenções do mundo. O sistema décimal dos Hindus foi aceito pelos Árabes e, através de guerras e comércio entrou na Europa da Idade Média. Foi principalmente o «Livro de Cálculo» de LEONARDO DE PISA, publicado em 1202, que divulgou a Matemática árabe e converteu a Europa ao sistema decimal.

Passaram ainda mais três séculos até que se verificasse um progresso essencial na Álgebra. Um tal progresso se deu sòmente por volta de 1500, quando SCIPIONE DEL FERRO (1465?-1526) conseguiu resolver a equação $X^3 + a \cdot X = b$, expressando a solução pela fórmula

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}} + \\ + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}}.$$

O costume daquela época de ocultar novos resultados matemáticos, em lugar de publicá-los, causou muitas brigas entre TARTAGLIA (1500?-57) por um lado, e CARDANO (1501-76) e seus discípulos por outro lado. TARTAGLIA redescobriu a fórmula acima em 1535, e CARDANO conseguiu obtê-la dele, sob a promessa de guardar segredo, mas publicou-a em 1545 como sua própria invenção. Entretanto, deve-se mesmo a CARDANO o método de reduzir uma equação arbitrária do terceiro grau a uma equação do tipo acima, como também o resultado que esta possue exatamente três soluções reais no «casus irreducibilis», i. e. no caso em que $(b/2)^2 + (a/3)^3 < 0$. Na mesma época, FERRARI (1522-65), um aluno de

CARDANO, conseguiu resolver a equação do quarto grau. Esses sucessos nutriram a esperança dos algebristas de que fosse possível resolver, por radicais, as equações algébricas de qualquer grau. Veremos mais tarde, que esta esperança foi destruída no século XIX. A respeito do século XVI, deve-se mencionar ainda o nome de VIÈTE (1540-1603), considerado o «pai da Álgebra simbólica», pois ele foi o primeiro a usar letras não sòmente para as incógnitas mas também para os números dados, como é costume na Álgebra atual.

O século XVII é considerado o começo da Matemática Moderna, em virtude da invenção da Geometria Analítica, por DESCARTES (1596-1650), e do Cálculo Infinitesimal, por NEWTON (1643-1727) e LEIBNIZ (1646-1716). A Álgebra, entretanto, progrediu pouco nessa época, apesar de certas contribuições de LEIBNIZ e TSCHIRNHAUS (1651-1708), que tentaram em vão resolver por radicais a equação geral do quinto grau.

Sòmente na segunda metade do século XVIII verificaram-se progressos consideráveis na Álgebra, e precisamente em duas direcções. O primeiro progresso consiste numa extensão da noção de número. Nos séculos anteriores, pouco a pouco, os matemáticos reconheceram como números os números racionais, os negativos, e as expressões obtidas como soluções de equações algébricas, pelo menos quando elas representavam números reais. Eles acostumaram-se também calcular com os números complexos envolvidos nessas expressões (por exemplo, as parcelas na fórmula acima, no «casus irreducibilis»), embora não os reconhecessem como números, chamando-os de números «falsos», «fictícios» ou «imaginários». Pelo facto destes números aparecerem nas soluções de equações do segundo, terçeiro e quarto grau, surgiu a conjetura que eles serviriam também para resolver equações algébricas de qualquer grau, ou mais precisamente, que toda equação algébrica possuiria pelo menos uma raiz na forma de um número real ou complexo. A demonstração desta conjetura, o chamado «teorema fundamental da Algebra», foi tentada primeiro por D'ALEMBERT (1717-83) e completada por GAUSS (1777-1855). Deve-se notar que, diferentemente do problema da resolução de equações por radicais, se trata aqui de demonstrar apenas a existência de uma solução, sem precisar indicá-la numa fórmula explícita. Deve-se também a GAUSS a consolidação dos números complexos (representados por ele pelos pontos no plano), necessária para a demonstração deste teorema. Entretanto, esta consolidação baseou-se numa noção apenas intuitiva dos números reais (que sòmente em 1872 seria tornada precisa por DEDEKIND).

O segundo progresso dessa época refere-se ao problema da resolução de equações algébricas por radicais. Em trabalhos publicados por volta de 1770, LAGRANGE (1736-1813) e VANDERMONDE (1735-96) iniciaram estudos sistemáticos dos métodos de resolução. LAGRANGE investigou, para uma dada equação do n-ésimo grau, expressões racionais nas suas raízes $x_1, \cdots, x_n$ (reais ou complexas, cuja existência é assegurada pelo «teorema fundamental») e, em particular, os «resolventes de Lagrange», e seu comportamento quando se permutam as raízes. VANDERMONDE, cujos estudos correspondem em parte aos de LAGRANGE, dedicou-se principalmente à investigação da «equação de divisão do círculo» $(X^p-1)/(X-1)=0$, sendo $p$ um número primo. Seus resultados foram completados por GAUSS nas «Disquisitiones arithmeticae», publicadas em 1801, onde se encontra também, como aplicação, o famoso resultado de que um polígono regular de $p$ lados pode ser construido com régua e compasso se, e sòmente se, $p$ fôr da forma $2^{2^k}+1$.

Finalmente, o problema da resolução de equações algébricas foi solucionado, no primeiro terço do século XIX, pelos resultados definitivos de dois jovens matemáticos: ABEL (1802-29) e GALOIS (1811-32). Já RUFFINI (1765-1822) tinha tentado mostrar, em 1799, que a equação geral do quinto grau não se pode resolver por radicais, mas a sua demonstração era incompleta. Uma demonstração completa foi dada por ABEL, em 1824. Apesar de trabalhos importantíssimos, ABEL nem sempre obteve reconhecimento; ele viveu em pobreza e morreu de tuberculose na idade de 27 anos. Trágica foi também a vida, ainda mais curta, de GALOIS. Expulso da École Normale Supérieure por motivo de «comportamento irreverente», ele se envolveu em actividades políticas consideradas subversivas, esteve preso durante mêses e finalmente, na idade de 20 anos, foi mortalmente ferido num duelo, ao qual ele não se pôde furtar, produto de uma intriga de inimigos políticos. Na véspera do duelo, já certo de que iria morrer, numa carta dirigida a um amigo ele expôs a hoje famosa teoria de GALOIS. Apesar da extrema importância deste e dos demais trabalhos matemáticos de GALOIS, eles não foram apreciados pelos matemáticos da época e publicados sòmente em 1846.

O resultado essencial da teoria de GALOIS, expressa na linguagem moderna, é o seguinte: Dada uma equação algébrica do grau $n$, com coeficientes num corpo $K$ e raízes $x_1, \cdots, x_n$ distintas, os corpos intermediários entre $K$ e $K(x_1, \cdots, x_n)$ correspondem biunìvocamente aos sub-grupos do «grupo de GALOIS», definido como um determinado sub-grupo do grupo $S_n$ das permutações de $x_1, \cdots, x_n$ (e canònicamente isomorfo ao grupo dos $K$-automorfismos de $K(x_1, \cdots, x_n)$, como foi mostrado, mais tarde, por DEDEKIND). Conclue-se disto que uma equação algébrica será resolúvel por radicais se, e sòmente se, o seu grupo de GALOIS for resolúvel (i. e., possuir uma sequência de composição cujos quocientes são grupos comutativos). A impossibilidade de resolver a equação geral do n-ésimo grau, para $n \geq 5$, resulta então do facto de que o grupo $S_n$ não é resolúvel.

Pela teoria de GALOIS, o problema da resolução de equações algébricas por radicais foi completamente solucionado e reconhecido como um caso especial, até bastante artificial, do problema mais geral de classificar os números algébricos. Com o estímulo da teoria de GALOIS, os algebristas começaram a estender o campo das suas pesquisas. Em primeiro lugar, ela incentivou o estudo dos grupos de permutações, que foi realizado principalmente por SERRET (1819-85) e JORDAN (1838-1922) e que deu lugar, mais tarde, ao estudo dos grupos abstratos (noção introduzida já em 1854, por CAYLEY (1821-95)). Além disto, a teoria de GALOIS deu um forte impulso à Teoria dos Números e, através dela, estimulou o desenvolvimento da teoria dos corpos. Essa teoria foi iniciada por DEDEKIND (1831-1916) e continuada por KRONECKER (1823-91), WEBER (1842-1913) e HILBERT (1862-1943). Entretanto, os corpos estudados na segunda metade do século XIX eram todos «concretos», i. e., seus elementos eram números, funções de variáveis complexas, séries de números, etc.. A axiomatização da teoria dos corpos sòmente foi realizada em 1910 no trabalho de STEINITZ (1871-1928), que se tornou fundamental para a conceituação atual da Algebra. A partir de 1920, seguiu-se ràpidamente a axiomàtização do resto da Algebra, pelos trabalhos de E. NOETHER (1882-1935), ARTIN (1898-1962) e seus alunos, em particular HASSE (1898) e KRULL (1899). O primeiro livro expositório da Algebra Moderna foi publicado por VAN DER WAERDEN (1903), em 1930.

O objectivo desta minha palestra foi o de mostrar, que a teoria de GALOIS, como culminância da Algebra Clássica, deu origem à Algebra Moderna. Porém, não se deve deixar de considerar também as influências provenientes de outras disciplinas matemáticas que foram importantes para a sua formação, as quais, entretanto, não posso analisar aqui. Devo mencionar ainda, que o meu esbôço histórico se refere principalmente à teoria dos grupos e à dos corpos, como disciplinas centrais da Algebra Moderna, deixando de lado as suas outras partes como, por exemplo, a Álgebra Linear e teorias algébricas mais recentes, cujos desenvolvimentos deveriam ser estudados à parte.

Não quero terminar a minha conferência sem mencionar, que o problema antigo da resolução de equações algébricas ainda existe, embora em forma modificada. Como a teoria de GALOIS mostra, os radicais não são suficientes, ou seja, as equações puras, como as únicas equações «resolventes», são demasiadamente especiais, pois servem sòmente no caso de grupos de GALOIS resolúveis. Mas pode-se pensar em admitir, além das equações puras, outros tipos de equações resolventes. Investigações nêste sentido foram realizadas, no século passado, por F. KLEIN (1849-1925) e HERMITE (1822-1905). Uma teoria da resolução de equações algébricas bastante geral, baseada nas ideias de F. KLEIN, foi recentemente desenvolvida por KRULL e encontra-se exposta nas Notas de Matemática no. 24. Apesar desta teoria ser uma interessante continuação da Algebra Clássica e aplicação da teoria de GALOIS, não lhe cabe tanta importância atual como à propria teoria de GALOIS, que tem sido completada e generalizada, em várias direções, até nossos dias. Pretendo expôr essa teoria, como ela se apresenta hoje em dia, num curso a ser realizado no Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática (veja Notas de Matemática no. 30).

## BIBLIOGRAFIA(*)

E. T. BELL, *The Development of Mathematics*. McGraw- Hill Book Co., New York – London, 1945.

N. BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris, 1960.

P. DUPUY, *La vie d'Évariste Galois*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3ème série, vol. **13**, pg. 197-266 (1896).

J. E. HOFMANN, *Geschichte der Mathematik. I-III*. Sammlung Göschen. Berlin 1953-57.

F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. I. Chelsea Publishing Co., New York, 1950.

D. J. STRUIK, *A concise History of Mathematics*. 2nd revised edition. Dover Publications, New York, 1948.

(*) Esta lista contém sòmente as obras históricas que foram consultadas pelo autor.