MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 4 — 20-7-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 2, 2', *um* dos problemas 5, 5' e os problemas 1, 3, 4 Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5' Pretende-se uma exposição clara e rigorosa

5632 — 1) Para cada par $(a,b)\in R^2$, considere o seguinte sistema de equações lineares

$$S_{(a,b)}\begin{cases} x+\ \ y+\qquad\quad z=1\\ x+a^2y+\qquad\quad z=a^2\\ 2x+\ 2y+(3-a)\,z=b^2\end{cases}\qquad (x,y,z)\in R^3.$$

a) Determine os conjuntos

$A\ =\{(a,b)\in R^2;\ S_{(a,b)}$ é possível$\}$,

$A'\ =\{(a,b)\in R^2;\ S_{(a,b)}$ é simplesmente indeterminado$\}\subset A$,

$A''=\{(a,b)\in R^2;\ S_{(a,b)}$ é duplamente indeterminado$\}\subset A$ e

$A'''=\{(a,b)\in R^2;\ S_{(a,b)}$ é triplamente indeterminado$\}\subset A$,

justificando as suas respostas mediante recurso ao teorema de Rouché.

b) Para $(a,b)\in A'$, determine o conjunto $B_{(a,b)}$ $(\subset R^3)$ das soluções do sistema $S_{(a,b)}$.

2) Sejam A e B conjuntos não vazios, $f:A\to B$ e $g:B\to A$ tais que $f\circ(g\circ f):A\to B$ é uma bijecção. Mostre que f e g também são bijecções.

2') Mostre que se A é uma parte não vazia de R, $a\in A$, $f:A\to R$ e $f'_e(a)\in R^+-\{0\}$, f é contínua à esquerda em a e estrictamente crescente à esquerda em a. (Comece por definir com precisão: derivada à esquerda de f em a — $f'_e(a)$ —, função contínua à esquerda num ponto do domínio e função estrictamente crescente à esquerda num ponto do domínio).

3) Seja $f:R\to R$
$$x\to sh\,(sen\,(sh\,x)).$$

a) Determine a função derivada de f.

b) Determine o contradomínio de f, *justificando.*

(N. B. — Recorde que $sh:R\to R$ tem contradomínio R).

c) Diga em quantos pontos $f\,|\,[-2,2]$ tem extremos relativos estrictos, justificando a resposta.

(N. B. $3<sh\,2<4$).

4) O referencial (I) $(0,\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ é ortonormado. O referencial (II) $(Q,\overline{I},\overline{J},\overline{K})$ é fixado, relativamente a (I), da forma seguinte:

$$Q-0=\overline{i},\ \overline{I}=\overline{i},\ \overline{J}=\overline{j},\ \overline{K}\ \text{é unitário},$$
$$\sphericalangle(\overline{i},\overline{K})=\sphericalangle(\overline{j},\overline{K})=\sphericalangle(\overline{k},\overline{K})$$

e (I) e (II) têm a mesma orientação.

a) Escreva as «fórmulas de transformação de coordenadas» que permitem determinar as coordenadas de P em (II) conhecidas as coordenadas de P em (I).

b) Deduza a equação do cilindro de geratrizes paralelas a $\overline{K}$ e tendo por directriz a circunferência do plano $0xy$ de raio 1 e centro Q:

1.º) no referencial (II);

2.º) no referencial (I).

5) Decomponha a fracção racional

$$\frac{X^4-2X^3+6X^2-8X+7}{X^3-2X^2+X-2}$$

numa soma de elementos simples de $C(X)$, sabendo que 2 é um zero de X^3-2X^2+X-2.

5') Sobre $A=]-\infty,1[$ considere a seguinte operação:

$$f:\ A^2\to A$$
$$(x,y)\to x+(1-x)\cdot y.$$

(Notação: $f(x,y)=x\#y$).

a) *Mostre* que $[0,1[$ é estável para a operação $\#$.

b) *Mostre* que $(A,\#)$ é um grupo comutativo;

c) $[0,1[$ com a operação induzida é um grupo comutativo? Porquê?

Resolução do exame 4

1. a) *Designemos por* M_a *a matriz*

$$M_a = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-a \end{matrix} \right\| ; \; det(M_a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$= (a^2-1)(1-a)$. *Se* $a \notin \{-1,1\}$, *a característica de* M_a *é* 3 *e* $S_{(a,b)}$ *é um sistema de Cramer, logo possível e determinado. Se* $a=1$, *a característica de* M_a *é* 1. *Escolhendo para principais a 1.ª linha e a 1.ª coluna de* M_a, *as matrizes características da 2.ª e 3.ª equações são* $\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|$ *e* $\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & b^2\end{matrix}\right\|$. $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & b^2\end{vmatrix} = 0$ *se e só se* $(b=\sqrt{2} \vee b=-\sqrt{2})$. *Portanto, para* $(a=1) \wedge (b=\sqrt{2} \vee b=-\sqrt{2})$, $S_{(a,b)}$ *é duplamente indeterminado; para* $(a=1) \wedge (b \neq \sqrt{2} \wedge \wedge\, b \neq -\sqrt{2})$, $S_{(a,b)}$ *é impossível. Se* $a=-1$, *a característica de* M_a *é* 2 *e podemos escolher para principais a 1.ª e 3.ª linhas e a 1.ª e 3.ª colunas:* $\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 3+1\end{matrix}\right\|$. *A matriz característica da 2.ª equação será, então,* $\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & b^2\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$, *cujo determinante é nulo qualquer que seja* $b\ (\in R)$, *por existirem duas linhas iguais.*

R: *Em conclusão:*

$A = \{(a,b) \in R^2;\ (a \neq 1) \vee [a=1 \wedge (b=\sqrt{2} \vee \vee\, b=-\sqrt{2})]\}$,

$A' = \{(a,b) \in R^2;\ a=-1\}$,

$A'' = \{(a,b) \in R^2;\ (a=1) \wedge (b=\sqrt{2} \vee b=-\sqrt{2})\}$,

$A''' = \emptyset$.

b) *Se* $(a,b) \in A'$, *i. e., se* $a=-1$, *o sistema* $S_{(a,b)}$ *é equivalente ao sistema* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+4z=b^2 \end{cases}$ $(x,y,z) \in R^3$. *Ora as soluções deste são:*

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ b^2-2y & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}, y, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 2 & b^2-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \right), y \in R, \ ou$$

$$\left(\frac{4-4y-b^2+2y}{2}, y, \frac{b^2-2y-2+2y}{2} \right) y \in R;$$

$$R: \ B_{(1\ b)} = \left\{ \left(-y - \frac{b^2-4}{2}, y, \frac{b^2-2}{2} \right); y \in R \right\}$$

2. *Sejam* $\varphi = g \circ f$ *e* $\psi = f \circ \varphi$ *e designemos por* $cd\,(h)$, *para toda a função* h, *o contradomínio de* h. *É evidente que* $cd\,(\psi) \subset cd\,(f)$; *como, por hipótese,* $cd\,(\psi) = B$, *tambem* $cd\,(f) = B$, *i. e.,* f é sobrejectiva. f é injectiva: *senão,* $\exists\ (\alpha,\beta) \in A^2$, *tal que* $\alpha \neq \beta$ *e* $f(\alpha)=f(\beta)$, *logo* $\psi(\alpha) = f(g(f(\alpha))) = f(g(f(\beta))) = \psi(\beta)$, *o que é absurdo por* ψ *ser injectiva. Está, pois, provado que* f *é uma bijecção. Seja* $h = f^{-1}$ *a bijecção inversa. É evidente que* $g = h \circ (\psi \circ h)$; *como a composta de 2 bijecções é uma bijecção, fica provado que* g é uma bijecção.

2'. *(Ver apontamentos das aulas teóricas).*

3. a) *A função derivada é*

$$f' : R \to R$$
$$x \to ch\,[sen\,(sh\,x)] \cdot cos\,(sh\,x) \cdot ch\,x .$$

b) *De* $cd\,(sh) = R$ *e* $cd\,(sen) = [-1,1]$, *concluímos que* $cd\,(sen \circ sh) = [-1,1]$ *e, portanto,* $cd\,(f) = cd\,[sh \circ (sen \circ sh)] = sh\,([-1,1])$. *Por outro lado, como* $(sh)' = ch$ *e,* $\forall\, x \in R$ $ch\,x \in R^+ - \{0\}$ *sh é uma função contínua estrictamente crescente e, então* $sh\,([-1,1]) = [sh\,(-1), sh\,1]$.

R: $cd\,(f) = [sh\,(-1), sh\,(1)]$.

c) *Designando por* g *a função* $f\,|\,[-2,2]$, *teremos* $g' = f'\,|\,[-2,2]$. *Como,* $\forall\, x \in R$, $ch\,x > 0$, *podemos concluir que a equação* $g'(x) = 0$ *é equivalente à equação* $cos\,(sh\,x) = 0$, $x \in [-2,2]$.

$$De \ \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < 3 < sh\,(2) < 4 < \dfrac{3\pi}{2} \\ -\dfrac{3\pi}{2} < -4 < sh\,(-2) < -3 < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

resulta que $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset sh\,([-2,2]) \subset \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$; *portanto, as únicas soluções da equação* $g'(x) = 0$ *são* $x_0 = Arg\,sh\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *e* $x_1 = Arg\,sh\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *Para* $x \in]-2, x_0[\cup]x_1, 2[$ $g'(x) < 0$ *e* g *é estrictamente decrescente em* x; *para* $x \in]x_0, x_1[$ $g'(x) > 0$ *e* g *é estrictamente crescente em* x. *Portanto,* g *tem extremos relativos estrictos em* -2, x_1, x_0 *e* 2 *(máximos nos 2 primeiros e mínimos nos 2 últimos).*

R: $f\,|\,[-2,2]$ *tem extremos relativos estrictos em 4 pontos.*

4. a) *Para todo o ponto* P, *temos* $P - O = (P - Q) + (Q - O)$, *de onde* $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = X\bar{I} + Y\bar{J} + Z\bar{K} + \bar{i}$; *mas* $\bar{K} = \alpha(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$, *com* $\alpha \in R$, *tal que* $\alpha^2 \cdot 3 = 1$ *e* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} > 0$, *isto é*

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Portanto,* $\overline{k} = \sqrt{3}\,\overline{K} - \overline{I} - \overline{J}$, *e a igualdade anterior permite escrever:*

$$(x-1)\overline{I} + y\overline{J} + z(-\overline{I} - \overline{J} + \sqrt{3}\,\overline{K}) = X\overline{I} + Y\overline{J} + Z\overline{K},$$

que é equivalente a (F) $\begin{cases} X = x - z - 1 \\ Y = y - z \\ Z = \sqrt{3}\,z. \end{cases}$

R: *São estas ((F)) as «fórmulas de transformação» pedidas.*

b) 1.º) *A equação do cilindro no referencial* (II) *é* $X^2 + Y^2 = 1$, $(X, Y, Z) \in R^3$. *Com efeito, como as geratrizes são paralelas a* $\overline{K}$, *basta notar que* $Oxy = QXY$ *e, como* $\overline{I} \mid \overline{J} = 0$ *e* $\overline{I}$ *e* $\overline{J}$ *são unitários, a distância de* $P(X, Y, 0)$ *a* Q *é* $\sqrt{X^2 + Y^2}$; *portanto as equações da circunferência directriz são (em* (II)) $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Z = 0, \end{cases}$ $(X, Y, Z) \in R^3$.

2.º) *No referencial* (I) *a equação do mesmo cilindro será:* $(x - z - 1)^2 + (y - z)^2 = 1$, $(x, y, z) \in R^3$.

5. *Podemos escrever*

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = X + \frac{5X^2 - 6X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7 & X^3 - 2X^2 + X - 2 \\ \cline{2-2} -X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X & X \\ \hline 5X^2 - 6X + 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & X^2+1 & & & \end{array}$$

Os zeros de $(X^3 - 2X^2 + X - 2) \in C[X]$ *são* 2, $-i$, $+i$. *Pelo «teorema de decomposição», existem* $\alpha \in C$, $\beta \in C$, *tais que*

$$\frac{5X^2 - 6X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = \frac{\alpha}{X - 2} + \frac{\beta}{X - i} + \frac{\overline{\beta}}{X + i}.$$

Esta igualdade é equivalente à seguinte:

$$5X^2 - 6X + 7 = \alpha(X^2 + 1) + \\ + \beta(X - 2)(X + i) + \overline{\beta}(X - 2)(X - i).$$

Atendendo a que 2 polinómios de $C[X]$ *são iguais se e só se as funções polinomiais associadas são iguais, podemos calcular* α *e* β *da seguinte forma:*

$$x = 2 \qquad 20 - 12 + 7 = \alpha \cdot 5 \rightarrow \alpha = 3$$
$$x = i \qquad -5 - 6i + 7 = \beta(i - 2) \cdot 2i$$

$$\beta = \frac{2 - 6i}{-2 - 4i} = \frac{-1 + 3i}{1 + 2i} = \\ = \frac{-1 + 6 + 5i}{5} = 1 + i.$$

R: *A decomposição pedida é:*

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = \\ = X + \frac{3}{X - 2} + \frac{1 + i}{X - i} + \frac{1 - i}{X + i}.$$

5′. a) *Seja* $(x, y) \in ([0, 1[)^2$; *então, como* $x < 1$, $1 - x > 0$ *e, como* $0 \leqslant y < 1$, $0 \leqslant x \mathbin{+\!\!\!+} y = x + (1 - x)y < x + 1 - x = 1$, *i. e.,* $x \mathbin{+\!\!\!+} y \in [0, 1[$. $[0, 1[$ *é, pois, estável para* $\mathbin{+\!\!\!+}$.

b) $(A, \mathbin{+\!\!\!+})$ é um grupo comutativo *(Notar que* $x \mathbin{+\!\!\!+} y = x + y - xy$).

1) $\mathbin{+\!\!\!+}$ *é associativa, pois,* $\forall (x, y, z) \in A^3$, $x \mathbin{+\!\!\!+} (y \mathbin{+\!\!\!+} z) = x + (y \mathbin{+\!\!\!+} z) - x(y \mathbin{+\!\!\!+} z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - xy - yz - xz + xyz$ *e* $(x \mathbin{+\!\!\!+} y) \mathbin{+\!\!\!+} z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x \mathbin{+\!\!\!+} (y \mathbin{+\!\!\!+} z)$;

2) $\mathbin{+\!\!\!+}$ *é comutativa, pois,* $\forall (x, y) \in A^2$ $x \mathbin{+\!\!\!+} y = x + y - xy = y + x - yx = y \mathbin{+\!\!\!+} x$;

3) $0 \in A$ *é elemento neutro para* $\mathbin{+\!\!\!+}$, *pois,* $\forall x \in A$, $x \mathbin{+\!\!\!+} 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x = 0 + x - 0 \cdot x = 0 \mathbin{+\!\!\!+} x$;

4) *Vamos ver que todo o elemento de* A *é invertível, i. e.,* $\forall x \in A$, *a equação* $x \mathbin{+\!\!\!+} y = 0$, $y \in A$ *é possível (como* $\mathbin{+\!\!\!+}$ *é comutativa, basta analisar a invertibilidade à direita). Ora, se* $x \in A$, $x + y - xy = 0$, $y \in A \Longleftrightarrow y = \dfrac{x}{x - 1}$, $y \in A$. *Temos, pois, de verificar se é válida a proposição* $\left(x \in A \Longrightarrow \dfrac{x}{x - 1} \in A\right)$. *Como* $x < 1$, $x - 1 < 0$ *e, então, a inequação* $\dfrac{x}{x - 1} < 1$ $(x \in A)$ *é equivalente a* $x > x - 1$ $(x \in A)$, *que admite como solução todo o elemento de* A. *Está, pois, demonstrada a invertibilidade de todo o elemento* $x \in A$.

c) $[0, 1[$, *com a operação induzida, não é um grupo comutativo, pois nem todo o elemento é invertível. Só 0 é invertível, porque, se* $0 < x < 1$, $\dfrac{x}{x - 1} < 0$, *logo* $\dfrac{x}{x - 1} \in A - [0, 1[$.

(OBS. — *A operação induzida por* $\mathbin{+\!\!\!+}$ *sobre* $[0, 1[$ *é a habitual «adição de descontos»...*).

Enunciados e soluções de M. Arala Chaves

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Outubro — Prova escrita — 1-10-1964.

5633 — 1) Aplicando o teorema dos acréscimos finitos à função $\log(\log x)$ no intervalo $[n, n+1]$, prove que $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}\right)=\infty$.

Utilize o resultado anterior para indicar a natureza da série $\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$.

R: *De*

$$\log\log(n+1)-\log\log n=\frac{1}{(n+\theta)\log(n+\theta)}\quad(0<\theta<1)$$

vem

$$\log\log(n+1)-\log\log n<\frac{1}{n\log n}$$

e, fazendo $n=2,3,\cdots$ *nesta desigualdade, vem o conjunto de desigualdades*

$$\log\log 3-\log\log 2<\frac{1}{2\log 2}$$

$$\log\log 4-\log\log 3<\frac{1}{3\log 3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\log(n+1)-\log\log n<\frac{1}{n\log n}$$

que, somadas membro a membro, dão

$$\log\log(n+1)-\log\log 2<$$

$$<\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}$$

e

$$\lim\log\log(n+1)=\infty\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\lim\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}\right)=\infty.$$

A série $\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ *é divergente pois a sucessão associada* $S_{n-1}=\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}$ *é divergente.*

2) Estude a continuidade e derivabilidade da função $f(x)=\begin{cases}1/x & (x<0)\\ 2 & (x=0)\\ \cos x & (x>0).\end{cases}$

É aplicável a esta função o teorema de Rolle no intervalo $[-1,\pi]$? Porquê?

R: *A função* $f(x)$ *é contínua para todos os pontos próprios excepto* $x=0$; *é também contínua em* $x=-\infty$ *e descontínua em* $x=+\infty$.

A descontinuidade em $x=0$ *é infinita:* $\omega(0)=+\infty$; *em* $x=+\infty$ *é* $\omega(+\infty)=2$ *e a descontinuidade é finita.*

$$f'(x)=\begin{cases}-1/x^2 & (x<0)\\ \pm\infty & (x=0)\\ -\operatorname{sen} x & (x>0).\end{cases}$$

Embora $f(-1)=f(\pi)$ *o teorema de* Rolle *não é aplicável porque* $f(x)$ *não é regular em* $[-1,\pi]$.

3) Calcule $P\frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}$.

R: *Fazendo* $x=t^6$, *vem*

$$P\frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}=P\frac{t^8-t^5}{t^2+1}=$$

$$=P\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{1-t}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+$$

$$+\operatorname{arctg} t-\frac{1}{2}\log(t^2+1)=\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+$$

$$+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\log(\sqrt[3]{x}+1).$$

4) Discuta a existência de extremantes para a função $g(x,y)=ax^2+by^2+2x+2y\quad(a,b\neq 0)$.

R: $\begin{cases}g'_x=2ax+2=0\\ g'_y=2by+2=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1/a\\ y=-1/b\end{cases}$ *(ponto de estacionaridade). Como* $\begin{cases}r=2a\\ s=0\\ t=2b\end{cases}$, $\Delta=s^2-rt=-4ab$

$$\begin{cases}\Delta>0\Longrightarrow ab<0 & \textit{(não há extremantes)}\\ \Delta<0\Longrightarrow ab>0 & \textit{(há extremante)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0\wedge b>0 & \textit{minimizante}\\ a<0\wedge b<0 & \textit{maximizante.}\end{cases}$$

5) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{bmatrix}$, ache uma matriz quadrada B, de característica 2, tal que $AB=0$.

Sugestão: escolha as colunas de B entre as soluções de $AX=0$.

R: *O sistema* $AX = 0$ *é duplamente indeterminado porque a característica de* A *é* 1. *Existem então duas soluções independentes que se acham fàcilmente:*

A equação $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ *dá as soluções independentes* $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$ *satisfaz ás condições requeridas desde que a terceira coluna seja composição linear das duas primeiras:* $a_{13} = -\lambda - 2\mu$, $a_{23} = \lambda$ *e* $a_{33} = \mu$.

6) Demonstre, utilizando o método da geometria analítica, que o lugar geométrico das rectas que passam por um ponto e são perpendiculares a uma recta é o plano que passa pelo ponto e é perpendicular à recta.

R: *Dada a recta* $r \equiv \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ *e o feixe de rectas* $\dfrac{x - x_1}{h} = \dfrac{y - y_1}{k} = \dfrac{z - z_1}{l}$ *que passam pelo ponto* (x_1, y_1, z_1), *se estas são perpendiculares à primeira, virá* $ah + bk + cl = 0$.

Fazendo $\dfrac{x - x_1}{h} = \dfrac{y - y_1}{k} = \dfrac{z - z_1}{l} = t$, *obtém-se* $h = \dfrac{x - x_1}{t}$, $k = \dfrac{y - y_1}{t}$ *e* $l = \dfrac{z - z_1}{t}$.

Substituindo em $ah + bk + cl = 0$, *vem a equação do plano que passa por* (x_1, y_1, z_1) *e é perpendicular a* r: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (1.ª chamada) — 24-2-1965.

I

5634 — 1) Considere a seguinte axiomática de *álgebra de Boole*:

Álgebra de Boole é um conjunto $B = \{a, b, c\}$ no qual se encontram definidas duas leis de composição interna, *adição* $(+)$ e *multiplicação* $(\cdot)$, tais que

B_1. Comutatividade: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$

B_2. Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

B_3. Distributividade: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

B_4. Elementos neutros: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$

B_5. Complemento: $a + \sim a = 1$, $a \cdot \sim a = 0$.

Com base nos axiomas B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5, prove os seguintes teoremas:

T_1: $a + a = a$, $a \cdot a = a$

T_2: $a + 1 = 1$, $a \cdot 0 = 0$.

Que observações tem a fazer sobre a relação entre esta axiomática e a que foi apresentada no Curso de Matemáticas Gerais?

2) Considere o conjunto de números complexos $\left\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 16 \wedge 0 < \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$. Como é constituído o conjunto $\{w : w = z^4\}$, caracterizando-o pelo módulo e argumento de w?

Qual é o lugar geométrico das imagens de w no plano complexo?

R: 1) *Demonstração de* T_1:

1. $a + 0 = a$ $\quad B_4$
2. $a + (a \cdot \sim a) = a$ $\quad$ 1 *e* B_5
3. $(a + a) \cdot (a + \sim a) = a$ $\quad$ 2 *e* B_3
4. $(a + a) \cdot 1 = a$ $\quad$ 3 *e* B_5
5. $a + a = a$ $\quad$ 4 *e* B_4.

A relação $a \cdot a = a$ *deriva-se de* $a + a = a$ *por dualidade. Demonstração de* T_2:

1. $a + \sim a = 1$ $\quad B_5$
2. $a + (a + \sim a) = a + 1$ $\quad$ *Substituição*
3. $(a + a) + \sim a = a + 1$ $\quad$ 2 *e* B_2
4. $a + \sim a = a + 1$ $\quad$ 3 *e* T_1
5. $1 = a + 1$ $\quad$ 4 *e* B_5.

A relação $a \cdot 0 = 0$ *deriva-se de* $a + 1 = 1$ *por dualidade.*

A axiomática apresentada no Curso de Matemáticas incluia como axioma, além de B_1, B_2, B_3, B_4, *e* B_5, *o teorema* T_2. *Não se trata pois de uma axiomática independente.*

2) $\{w : 1 \leqq |w| \leqq 16^4 \wedge 0 < \arg w < \pi\}$.

II

5635 — 1) Considere os conjuntos lineares A, B e $C = \{x : x = a + b$ com $a \in A$ e $b \in B\}$. Prove que, sendo A e B majorados, é $\sup C = \sup A + \sup B$.

2) Sendo u_n crescente (decrescente), demonstre que $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)/n$ é crescente (decrescente).

Calcule

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right].$$

R: 1)

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, a\in A \quad a\leq sup\, A\\ \forall\, b\in B \quad b\leq sup\, B\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\, a+b\in C \quad a+b\leq sup\, A+sup\, B$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, \varepsilon>0\,,\exists\, a':\ a'>sup\, A-\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \forall\, \varepsilon>0\,,\exists\, b':\ b'>sup\, B-\dfrac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon>0\,,\exists\, a'+b':\ a'+b'>sup\, A+sup\, B-\varepsilon\,.$$

2) *Suponha-se por exemplo,* $u_1\leq u_2\leq\cdots\leq u_n\leq\leq u_{n+1}\leq\cdots$. *Então*

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}}{n+1}-\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=$$

$$=\frac{n\,u_{n+1}-(u_1+u_2+\cdots+u_n)}{n\,(n+1)}\geq$$

$$\geq\frac{n\,u_{n+1}-n\,u_1}{n\,(n+1)}=\frac{u_{n+1}-u_1}{n+1}\geq 0\,,$$

o que prova o resultado pretendido.

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{n+1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{1-\dfrac{n+1}{n}}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left(-\frac{n+1}{n}\right)\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e-1\,.$$

III

5636 — 1) Sendo p inteiro positivo, mostre que a série

$$S)\ 1+\frac{x}{p+1}+\frac{x^2}{(p+1)\,(p+2)}+\cdots+$$
$$+\frac{x^n}{(p+1)\,(p+2)\cdots(p+n)}+\cdots$$

é convergente qualquer que seja x e a sua soma é

$$S=\frac{p\,!}{x^p}\left[e^x-1-\frac{x}{1\,!}-\cdots-\frac{x^{p-1}}{(p-1)\,!}\right]\ (x\neq 0).$$

2) Supondo a_n decrescente $(a_n\geq 0)$ e $\Sigma\,(a_n\,a_{n+1})^{1/2}$ convergente, prove que $\Sigma\, a_n$ converge. Dê exemplo de uma série $\Sigma\, b_n$ $(b_n\geq 0)$ divergente tal que $\Sigma\,(b_n\,b_{n+1})^{1/2}$ convirja.

R: 1) *Para* $x=0$ *a série é visìvelmente convergente e a sua soma é igual a 1. Para* $x\neq 0$, *vem*

$$\frac{x^p}{p\,!}\left[1+\frac{x}{p+1}+\frac{x^2}{(p+1)\,(p+2)}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{x^n}{(p+1)\,(p+2)\cdots(p+n)}+\cdots\right]=$$
$$=\frac{x^p}{p\,!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)\,!}+\frac{x^{p+2}}{(p+2)\,!}+\cdots+\frac{x^{p+n}}{(p+n)\,!}+\cdots$$

que é precisamente o resto de ordem p *da série exponencial cuja soma é* $e^x-1-\dfrac{x}{1\,!}-\cdots-\dfrac{x^{p-1}}{(p-1)\,!}$.

Portanto,

$$R_p=\frac{p\,!}{x^p}\left[e^x-1-\frac{x}{1\,!}-\cdots-\frac{x^{p-1}}{(p-1)\,!}\right].$$

2) $a_n\geq a_{n+1}\Rightarrow\sqrt{a_n\,a_{n+1}}\geq\sqrt{a_{n+1}^2}=a_{n+1}$ *e portanto*

$$\Sigma\sqrt{a_n\,a_{n+1}}\ C\Rightarrow\Sigma\, a_n\ C\,.$$

Considerando para serie $\Sigma\, b_n$ $1+0+1+0+1+\cdots$ *(divergente), é claro que* $\Sigma\,(b_n\,b_{n+1})^{1/2}=0+0+0+\cdots$ *é convergente.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º Exame de frequência e 1.º ponto de informação — (2.ª chamada) — 5-3-1965.

5637 — 1) O conjunto dos números reais pode ser introduzido axiomàticamente como o conjunto R no qual estão definidas duas leis de composição interna, *adição* $(+)$ e *multiplicação* $(\times)$ tal que

R_1. O conjunto R é um corpo ordenado.

R_2. Todo o subconjunto de R não vazio e majorado tem supremo.

Destes axiomas derivam-se ot teoremas da teoria dos números reais, entre os quais os seguintes:

T_1. Se $R=H\cup K$ e $\forall\, h\in H, k\in K\ h<k$, então H tem máximo ou K tem mínimo.

T_2. Todo o subconjunto de R não vazio minorado tem ínfimo.

Prove-os, recorrendo ao postulado R_2.

2) Entre o conjunto C dos números complexos e o conjunto $\overline{C}$ dos conjugados é possível estabelecer um isomorfismo relativamente às operações de passagem ao conjugado, adição e multiplicação? Justifique.

No caso de C e $\overline{C}$ serem isomorfos em relação a alguma ou algumas das operações mencionadas, tratar-se-á de um isomorfismo ordenado? Porquê?

R: 1) *Demonstração de* T_1:

O conjunto H *é majorado por todos os números*

$k \in K$ *e portanto, de acordo com* R_2, H *tem supremo. É claro que* $\forall h \in H, k \in K \quad h \leqslant sup\, H \leqslant k$ *mas, como* $R = H \cup K$, *forçosamente* $sup\, H \in H$ *ou* $sup\, H \in K$. *Se* $sup\, H \in H$, *então* H *tem máximo; se* $sup\, H \in K, K$ *tem mínimo.*

Demonstração de T_2:

Designe A *o subconjunto de* R *não vazio e minorado e seja* B *o conjunto dos minorantes de* A. *É claro que* B *é não vazio e é majorado pelos elementos de* A. *De acordo com o axioma* R_2, *o conjunto* B *tem supremo. Tem-se* $sup\, B \in B$ *porque se* $sup\, B$ *não fosse um minorante de* A *existiria* $a \in A$ *com* $a < sup\, B$ *e, devido às propriedades do supremo, existiria também* $b \in B$ *tal que* $a < b \leq sup\, B$, *o que é impossível pois* $\forall a \in A, b \in B \quad b < a$.

Portanto $sup\, B \in B$, *isto é, o conjunto dos minorantes de* A *tem máximo que é, por definição,* $inf\, A$.

2) *É possível estabelecer um isomorfismo relativamente às três operações. Não se trata de um isomorfismo ordenado porque não se define relação de ordem em* C.

II

5638 — 1) Seja A um conjunto linear majorado. Demonstre que o conjunto dos majorantes é fechado. Pode este facto servir para justificar que A tem supremo? Porquê?

2) Considere as sucessões u_n e v_n tais que $u_n > 0 > v_n$ e $lim\,(u_n - v_n) = 0$.

Prove que $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Calcule

$$\lim_{n=\infty}\left[n \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \cdots + (n+n)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

R: 1) *Designando por* B *o conjunto dos majorantes de* A, *seja* $k \notin B$.

Então $\exists\, a \in A : a > k$ *e, tomando* ε *suficientemente pequeno, nenhum ponto de* $V_\varepsilon(k)$ *será majorante de* A, *isto é,* k *é isolado de* B.

Como B *é fechado e minorado por* A, *o conjunto* B *tem mínimo que é, por definição, o supremo de* A.

2) *Como* $u_n > 0 > v_n$, *tem-se*

$$u_n + v_n = |u_n| - |v_n| \leqslant |u_n - v_n| = u_n - v_n$$

e, como $lim\,(u_n - v_n) = 0$,

$$n > m \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_n - v_n < \varepsilon \\ u_n + v_n < \varepsilon \end{Bmatrix} \Rightarrow u_n < \varepsilon$$

isto é $lim\, u_n = 0$ *e, portanto,* $lim\, v_n = 0$.

$$\lim_{n=\infty}\left[n\, log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + (n+1)\, log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \cdots + (n+n)\, log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= lim\,[n + (n+1) + \cdots + (n+n)]\, log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[n\,(n+1) + \frac{n\,(n+1)}{2}\right] log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{3\,n\,(n+1)}{2\,n^2}\, \eta = \frac{3}{2}.$$

III

5639 — 1) Sendo $\Sigma\, n\, u_n$ convergente, mostre que $\Sigma\, u_n$ também converge. Estude a convergência e a convergência absoluta de $\Sigma\,(-1)^n\,(\sqrt{n^2+1} - n)$.

2) Dada a série $\Sigma\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)(\log x)^n$, determine o mais amplo intervalo de convergência uniforme.

R: 1) *Tomando* $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, *o teorema de* ABEL *ensina que* $\Sigma\, n\, u_n\, \varepsilon_n = \Sigma\, u_n$ *é convergente.*

Como $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \to 0$ *decrescendo a série* $\Sigma\,(-1)^n\,(\sqrt{n^2+1} - n)$ *é alternada decrescente e portanto converge. A série* $\Sigma\,(\sqrt{n^2+1} - n)$ *é divergente porque* $\lim_{n=\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1} - n} = +\infty$ *e* $\Sigma\,\dfrac{1}{n}$ *diverge. A série dada é pois simplesmente convergente.*

2) *Como* $lim\,\dfrac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n+1}} - 1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}\,\dfrac{|log\, x|^{n+1}}{|log\, x|^n} = |log\, x|$, *a série é absolutamente convergente para* $|log\, x| < 1$ *ou* $\frac{1}{e} < x < e$. *Para* $x = \frac{1}{e}$, *a série converge porque* $\Sigma\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)(-1)^n$ *é alternada decrescente; para* $x = e$, *a série é divergente.*

O mais amplo intervalo de convergência uniforme é pois $\left[\frac{1}{e}, e\right[$.

Enunciados e soluções dos N.os 5635 a 5639 de Fernando de Jesus

F. C. P. — Matematicas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Outubro de 1964.

5640 — I. Seja $E = [0,2] - \{1\} \xrightarrow{f} R$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leqslant x < 1 \\ x \text{ se } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

1) Indique o conjunto

$$\{(\delta,\varepsilon) \in R^+ \times R^+ \mid f(E \cap]1-\delta, 1+\delta[) \subset]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\}.$$

2) Indique os subconjuntos A de E tais que tem sentido falar de $f_{|A} \circ f_{|A}$ e caracterize os prolongamentos g de f a $E \cup \{1\}$ tais que tem sentido falar de $g \circ g$. Justifique.

5641 — II. Sejam: $R \xrightarrow{f} R$, $f(x) = (x(x-3))^2$; $R \xrightarrow{g} R$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) Indique o número de pontos fixos de f e calcule, pelo método das tangentes, os três primeiros termos do desenvolvimento decimal de um dos pontos fixos de f não pertencente a Q.

2) Indique, justificando, os conjuntos:

$\{x \in R \mid g \circ f$ é finitamente derivável no ponto $x\}$;

$\{x \in R \mid g \circ f$ é infinitamente derivável no ponto $x\}$;

$\{x \in R \mid g \circ f$ tem máximo relativo no ponto $x\}$;

$\{x \in R \mid g \circ f$ tem mínimo relativo no ponto $x\}$.

5642 — III. (Geometria analítica no plano). Seja $(O; \vec{i}, \vec{j})$ mètricamente fixado como se indica: $\|\vec{i}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{j}\| = 2$; $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{4}$. Sejam A e B os pontos tais que $A - O = \vec{i}$ e $B - O = \vec{j}$.

1) Determine as coordenadas do ponto U assim caracterizado: pertence à recta que passa por B e é perpendicular à recta OB; $\|U - A\| = \|U - B\|$.

2) Determine os eixos de simetria da elipse $8x^2 + 13y^2 + 4xy - 1 = 0$ *sem prèviamente* a representar num referencial ortonormado.

Enunciados dos n.os 5640 a 5642 de Aníbal Coimbra Aires de Matos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

158 — A. Doneddu — Geometrie Euclidienne Plane. Dunod — Paris.

Não é empreza fácil o desenvolvimento de uma teoría axiomática rigorosa da Geometria euclidiana. Neste livro, em que o Autor toma como via de exposição a que resulta de uma observação directa do nosso espaço físico, destacam-se dois elementos essenciais da geometria: a noção de *espaço* (o plano em geometria plana) e a noção de *grupo* (de transformação).

Para o *espaço*, os axiomas põem em relevo a recta, a semi-recta, a ordem sobre qualquer semi-recta e o semi-plano. Introduz-se uma figura, a que se dá o nome de *drapeau* e que intervem constantemente em todo o resto da teoría.

Na base da noção de «igualdade» de figuras encontra-se o grupo dos isometrías: os axiomas que o definem permitem que a teoria se edifique com uma lógica rigorosa mantendo no entanto contacto permanente com a realidade física.

Apenas de doze axiomas, na totalidade, podem ser extraídas todas as estruturas, quer algébricas quer topológicas, do plano euclideano: a estrutura de semi-grupo ordenado das distâncias e a teoria da sua medida, estrutura de espaço vectorial, produto escalar e estrutura métrica do plano, estrutura topológica de espaço vectorial normado completo (espaço de Banach), estruturas angulares do plano (semi-grupo restrito quasi-arquimediano) e teoria da medida dos ângulos, rotações e medida das rotações (isomorfia com o grupo aditivo das classes de números reais módulo 2π): torna-se assim possível definir as funções seno e coseno e estudar a sua continuidade sem fazer intervir a teoria dos números complexos.

Contribuindo para o esclarecimento da teoria da geometria euclideana plana, este livro que é edificado sobre a noção de grupo das isometrias, e descrito num estilo lógico e moderno sem perder o contacto com a mais elementar experimentação, deverá interessar não apenas o professor e o estudante de geometria elementar como todo aquele que pretende prosseguir estudos menos elementares nos domínios da álgebra e da análise.

J. G. T.