ANO XXV — N.º 96-97 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JULHO/DEZ. — 1964

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

# Sobre uma generalização da fórmula de Taylor

*por* **F. Teixeira de Queiroz**

O estudo das funções de variável complexa reduz-se, quase exclusivamente, ao das funções holomorfas. Em consequência, um tal estudo, abandona, quase por completo, funções tão simples como $|z|$ ou tão importantes como as funções reais de variável complexa. A razão de ser dum tal abandono reside na impossibilidade de derivação, e na ausência dum método que substitua esta no estudo do comportamento de funções nas vizinhanças dum ponto.

Procuraremos nesta nota mostrar uma maneira simples de abordar o estudo das funções duma variável complexa de forma a permitir o estudo duma classe de funções muito mais geral que a das funções holomorfas. Reservamos para um artigo ulterior a apresentação duma aplicação à física matemática da matéria aqui desenvolvida.

## 1. O operador $\dfrac{D}{Dz}$.

Seja $z = x + iy$ (com $x$ e $y$ reais) uma variável complexa e $f(z) = X(x, y) + i\,Y(x, y)$ uma função dessa variável, definida num domínio ou em todo o campo complexo.

Seja $z_0$ um ponto interior a esse domínio. Designemos por $\dfrac{D}{Dz}$ o operador

$$(1) \qquad \frac{Df(z)}{Dz} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\uparrow} \frac{f(z)\cdot dz}{(z-z_0)^2}$$

em que $\Gamma$ é o círculo de centro $z_0$ tal que $|z - z_0| = R$.

O operador $\dfrac{D}{Dz}$ assim introduzido faz corresponder, sempre que o limite exista, a toda a função $f(z)$ uma nova função de variável complexa. Além disso a fórmula de CAUCHY garante-nos que

$$\frac{Df(z)}{Dz} = f'(z)$$

qualquer que seja a função holomorfa $f(z)$.

Desta forma, o operador acima introduzido é uma extensão do operador de derivação. Vê-se também, duma forma imediata que ele é não só linear como iterativo, e, que, se designarmos por $\dfrac{D^2}{Dz^2}$ o operador resultante dessa iteração, será

$$\frac{D^2 f(z)}{Dz^2} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\uparrow} \frac{\dfrac{Df(z)}{Dz}\cdot dz}{(z-z_0)^2}.$$

Da mesma forma, como quando $z \to z_0$ $\bar{z} \to \bar{z}_0$, pode-se definir o operador

$$(2)\qquad \frac{Df(z)}{D\bar{z}} = \lim_{R \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\downarrow} \frac{f(z)\cdot d\bar{z}}{(z-\bar{z}_0)^2}\,.$$

Por iteração dos operadores (1) e (2) definem-se os operadores de ordem superior. Em particular, tem sentido falar no operador $\dfrac{D^2}{Dz\,D\bar{z}}$, que não tem correspondente nas derivadas de funções holomorfas visto exigir destas propriedades contraditórias que só podem ser verificadas por constantes.

A definição dos operadores (1) e (2) está dependente duma passagem ao limite. Nada nos garante que tal limite exista quando aplicado o operador a uma dada função. É porém possível definir uma classe de funções na qual tem sentido a aplicação dos operadores $\dfrac{D}{Dz}$ e $\dfrac{D}{D\bar{z}}$. É isso que passamos a fazer:

## 2. Funções de classe $C_n$.

Diremos que, num ponto, uma função é de classe não inferior a $C_n$ se, nesse ponto, a parte real e a parte imaginária da função admitirem derivadas parciais contínuas de ordem $n$ em relação à parte real e à parte imaginária da variável. Diremos que a função é de classe $C_n$ se for de classe não inferior a $C_n$ mas já não for de classe não inferior a $C_{n+1}$.

Dada uma função de classe não inferior a $C_n$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, pode escrever-se nas vizinhanças desse ponto

$$\begin{aligned} f(z) &= X(x,y) + iY(x,y) \\ &= X + \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \cdots + R_n + \\ &\quad + i\left(Y + \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy + \cdots + R'_n\right) \end{aligned}$$

em que as funções do segundo membro são calculadas no ponto $x_0, y_0$.

Será então, fazendo $z - z_0 = Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} &= \frac{i}{R}\int_0^{2\pi}(X+iY)e^{-i\theta}d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial X}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial X}{\partial y}\sin\theta + \right. \\ &\left. + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\sin\theta\right)\right]e^{-i\theta}\,i\,d\theta + R_1 \\ &= \pi i\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] + R_1\,. \end{aligned}$$

Donde

$$(3)\qquad \frac{Df}{Dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

Duma forma análoga se provava ser

$$(4)\qquad \frac{Df}{D\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Destas igualdades tiram-se imediatamente as seguintes propriedades dos operadores introduzidos:

Se $f(z)$ é uma função holomorfa de $z$

$$\frac{Df}{Dz} = f'(z)\,.$$

É condição necessária e suficiente para que $f(z)$ seja uma função holomorfa de $z$ que

$$\frac{Df}{D\bar{z}} = 0\,.$$

Portanto o operador inverso de $\dfrac{D}{Dz}$ só pode ser conhecido a menos duma função holomorfa de $\bar{z}$.

Sendo $dz = dx + i\,dy$, verifica-se, para toda a função de classe $C_1$, que

$$(5)\quad \frac{Df}{Dz}dz+\frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z}=\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy+ \\ +i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right).$$

Se $Z=f(z)$ e $z=\varphi(u)$ são funções de classe $C_1$ será

$$(6)\qquad \frac{DZ}{Du}=\frac{DZ}{Dz}\frac{Dz}{Du}+\frac{DZ}{D\bar{z}}\frac{D\bar{z}}{Du}.$$

Tem-se

$$\frac{DZ}{D\bar{z}}=\frac{\overline{D\bar{Z}}}{Dz}.$$

Todas estas igualdades são de fácil dedução, para o que basta substituir nos primeiros membros os valores tirados de (3) e (4).

De (3) e (4) obtemos por iteração que

$$(7)\quad \frac{D^2f}{Dz^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2X}{\partial x^2}-\frac{\partial^2X}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2Y}{\partial x\partial y}\right)+ \\ +\frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2X}{\partial x\partial y}\right)$$

$$(8)\quad \frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2X}{\partial y^2}\right)- \\ -\frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}\right)$$

$$(9)\quad \frac{D^2f}{D\bar{z}^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2X}{\partial x^2}-\frac{\partial^2X}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2Y}{\partial x\partial y}\right)- \\ -\frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2X}{\partial x\partial y}\right)$$

conjunto de igualdades este que conduz à identidade

$$(10)\quad \frac{D^2f}{Dz^2}dz^2+2\frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}}dz\,d\bar{z}+ \\ +\frac{D^2f}{D\bar{z}^2}d\bar{z}^2=\frac{\partial^2X}{\partial x^2}dx^2+ \\ +2\frac{\partial^2X}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2X}{\partial y^2}dy^2+ \\ +i\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2Y}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}dy^2\right).$$

Esta identidade pode ser generalizada para os operadores de ordem $n$. A demonstração faz-se por recorrência. Se admitirmos que a igualdade é válida para os operadores de ordem $n$, será, com $j+k=n$

$$(11)\qquad \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^nf}{Dz^jD\bar{z}^k}dz^jd\bar{z}^k= \\ =\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^nX}{\partial x^j\partial y^k}dx^jdy^k+ \\ +\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^nY}{\partial x^j\partial y^k}dx^jdy^k.$$

Se a função for de classe não inferior a $n+1$, tal igualdade aplica-se às funções $\frac{Df}{Dz}$ e $\frac{Df}{D\bar{z}}$, podendo então escrever-se

$$\frac{Df}{Dz}dz+\frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z}= \\ =\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^{n+1}f}{Dz^{j+1}D\bar{z}^k}dz^{j+1}d\bar{z}^k+ \\ +\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{D^{n+1}f}{Dz^jD\bar{z}^{k+1}}dz^jd\bar{z}^{k+1}= \\ =\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)}{\partial x^j\partial y^k}dx^jdy^k(dx+i\,dy)+\right. \\ +i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(-\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)}{\partial x^j\partial y^k}dx^jdy^k(dx+i\,dy)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}-\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k(dx-i\,dy)+$$

$$+i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)}{\partial x^j\,\partial y^k}dx^j\,dy^k(dx-i\,dy)\Bigg]$$

Dado que é $\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}=\binom{n+1}{j}$, esta igualdade simplifica-se e mostra que a igualdade (11) ainda é válida para a ordem $n+1$. Como a igualdade é válida para a ordem 1, ela será válida para qualquer ordem inferior ou igual à da classe da função.

Como consequência da identidade (11) podemos escrever que se $f(z)$ é de ordem não inferior a $C_n$ no ponto $z_0$, então

$$(12)\quad f(z_0+dz)=f+\frac{Df}{Dz}dz+\frac{Df}{D\bar{z}}d\bar{z}+$$
$$+\frac{1}{2\,!}\left(\frac{D^2f}{Dz^2}dz^2+2\frac{D^2f}{Dz\,D\bar{z}}dz\,d\bar{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{D^2f}{D\bar{z}^2}d\bar{z}^2\right)+\cdots+R_n$$

onde as funções do segundo membro são calculadas no ponto $z_0$.

Trata-se duma generalização da fórmula de Taylor.

Com efeito, se a função é de classe não inferior a $C_n$, as suas partes real e imaginária podem ser desenvolvidas pela fórmula de Taylor e, aplicando sucessivamente a identidade (11), obtém-se (12).

A igualdade (12) permite fazer o estudo local duma função não holomorfa e a extensão a estas de grande número de propriedades das funções holomorfas.

Como aplicação da fórmula deduzida consideremos os primeiros termos do desenvolvimento de $|z|=X(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, num ponto diferente da origem. Temos

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{x}{|z|},\ \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y}{|z|},\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{y^2}{|z|^3},$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{|z|^3},\quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=\frac{x^2}{|z|^3}$$

ou seja

$$\frac{D|z|}{Dz}=\frac{\bar{z}}{2|z|},\ \frac{D|z|}{D\bar{z}}=\frac{z}{2|z|},$$
$$\frac{D^2|z|}{Dz^2}=-\frac{\bar{z}^2}{4|z|^3},\ \frac{D^2|z|}{Dz\,D\bar{z}}=\frac{|z|^2}{4|z|^3},$$
$$\frac{D^2z}{D\bar{z}^2}=-\frac{|z|^2}{4|z|^3}$$

e portanto

$$|z+dz|=|z|+\frac{\bar{z}}{2|z|}dz+\frac{z}{2|z|}d\bar{z}+$$
$$+\frac{1}{2\,!}\left(-\frac{\bar{z}^2}{4|z|^3}dz^2+2\frac{|z|^2}{4|z|^3}dz\,d\bar{z}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^2}{4|z|^3}d\bar{z}^2\right)+R_3\,.$$

Se considerarmos apenas valores reais e acréscimos reais da função, teremos

$$|x+dx|=|x|+h(x)\,dx+\delta(x)\,dx^2+R_3$$

em que fàcilmente se reconhece serem $h(x)$ e $\delta(x)$ respectivamente a função de Heaviside e a distribuição de Dirac.

Apesar da função considerada não ser de classe $C_1$ na origem, ainda é possível, a partir de (1) e (2), calcular os operadores nesse ponto verificando-se que

$$\frac{Dz}{Dz}=\frac{Dz}{D\bar{z}}=\frac{D^2z}{Dz^2}=\frac{D^2z}{D\bar{z}^2}=0$$
$$\frac{D^2z}{Dz\,D\bar{z}}=+\infty\,.$$