La Inducción Matemática

por **Eduardo H. del Busto**

(Conclusão do número anterior)

3. 2. El clérigo Francisco Maurolico, citado bajo las formas latinizadas de sus nombres por Franciscus Maurolicus o Maurolikus (conocido por la dialectización itálica de Marullo o la pronunciación esdrújula de su apellido, originariamente grave) nació en Messina (Sicilia) en 1494 y murió en la misma ciudad, donde había residido, en el año 1575. Era de ascendencia griega.

Por la larga y talentosa labor que desplegó como astrónomo, poeta, historiador, matemático y profesor, sus conciudadanos le tuvieron en gran estima y le dieron el apodo de *Segundo Arquímedes*. En lo que respecta a nuestro ensayo, el apodo es merecido y elocuente de por sí.

Escribió sobre aritmética especulativa, sobre perspectiva (materia donde demuestra conocer el método de la proyección central), sobre óptica (tema que le debe la primera explicación cientifíca de la función que cumplen las gafas), sobre música (ciencia matemática según la tradición pitagórica), sobre álgebra, sobre esférica, sobre el astrolabio y la gnomónica.

Se conoce la nómina de las obras de Maurolico por una carta dirigida al Cardenal Bembo, pero la gran mayoría de los escritos del maestro siciliano se han perdido. Se le adjudican una Cosmografía, 1543, muy citada, y un tratado de álgebra que no se ha conservado. Parte de sus escritos se hallan en el libro intitulado *Opuscula Mathematica*, 2 vol., publicado en Venecia en 1575, obra interesante cuyo primer volumen proviene de una redacción de 1553, y cuyo segundo volumen incluía los *Arithmeticorum libri duo,* escritos en 1557 y publicados en volumen aparte en 1580.

Referente a la aritmética, Maurolico no se salió grandemente del estudio de los neopitagóricos Teón de Esmirna y Nicómaco de Gerasa. Es evidente el profundo conocimiento que tenía de los libros aritméticos euclídeos, según se infiere con facilidad observando su copiosa obra de erudito y crítico traductor. En efecto, examina y considera insuficiente la edición que de los *Elementos* euclídeos había hecho en 1505 el veneciano Bartolomeo Zamberti, uno de los responsables del apelativo erróneo atribuido por largo tiempo a Euclides («Euclides *Megarensis*, philosophi platonici», decía equivocadamente).

Maurolico tradujo al latín los *Phenomena* de Euclides.

Tampoco satisfizo al erudito siciliano la edición de las *Cónicas* de Apolonio, publicada por el veneciano Memo en 1537; edición incompleta, que sólo comprendía los cuatro primeros libros, ya que los restantes aún no habían sido hallados. En una publicación, Maurolico se aventuró a conjeturar el contenido de los libros quinto y sexto. Cuando posteriormente se descubrieron las versiones árabes de aquellos dos libros, se comprobó que Maurolico habia acertado en cuanto a la materia del VI; no así en cuanto al V. El acierto significa la agudeza del siciliano; y el desacierto, con ser tal, prueba, no obstante, que Maurolico es el primer innovador en la teoría de las cónicas, después de Apolonio. En ambas cosas demostraba talento creador.

Realizó otros estudios geométricos como

los correspondientes al geómetra Sereno, y se dedicó a profundas reflexiones sobre las obras astronómicas de Autolico de Pitana, Teodosio de Trípoli y Menelao de Alejandría, todas ellas traducidas al latín por Maurolico.

Así como Regiomontano recomendó el uso de la tangente (con ventajas sobre el seno y el coseno), Maurolico, como después Georg Joachin-aquel discípulo de Copérnico llamado corrientemente Rhaeticus (1514 a 1577) — recomendó el empleo de una nueva línea trigonométrica que definió y tabuló para valores de 0° a 45° en la *Tavola benefica*, 1558. Dicha línea fue bautizada por Fincke con el nombre de *secante*.

Maurolico prestó gran atención a las obras de Arquímedes de Siracusa, el genial geómetra helenístico (también de Sicilia) con quien se lo iba a parangonar. Le interesó el tema concerniente a los centros de gravedad, renovando el impulso de su estudio en Europa donde, por entonces, se desconocían los trabajos árabes en torno a esta ciencia arquimediana. El clérigo de Messina es, pues, el primer europeo que retorna a ella.

Acaso el excesivo celo platónico por menospreciar las cosas tangibles había apartado a los científicos europeos de aquel *método* de Arquímedes, simbiosis de mecánica y arte deductivo, de tantos logros en la teoría del baricentro, en los problemas de cuadraturas y en otras conquistas del famoso defensor de Siracusa. A pesar del veto de los platónicos, Maurolico pone su atención, precisamente, en la determinación de los centros de gravedad, porque cree que por allí pasa el buen camino que le ayudará a resolver el problema de la trisección del ángulo. Estaba equivocado, sí, pero lo que nos importa destacar es que no vacila en echar mano a estudios no muy ortodoxos desde el punto de vista platónico, y que en buena medida — como se ve en «El Método» de Arquímedes —, se basan en la Física más que en la Matemática pura. Sabido es que Arquímedes los empleaba como recursos de descubrimiento, hábiles para sopesar conjeturas de origen empírico.

Los estudios, las ediciones críticas y las traducciones de Maurolico se difundieron en todos los centros cultos de Europa, donde cundió su fama de profundo conocedor de Euclides, Arquímedes, Apolonio, aparte de su reconocida versación en un cúmulo de materias diversas. Por eso sus enseñanzas y sus lecciones se recordaban y alababan mucho tiempo después de su muerte.

La biografía del clérigo siciliano se ha recogido en tres obras fundamentales:

— «Vida de Maurolico escrita por su sobrino», 1613;

— D. Scina, *Elogio di Francesco Maurolico*, Palermo, 1808;

— C. Macrì, *Maurolico nella vita e negli scritti*, Messina, 1901.

Respecto del principio de inducción completa, lo que se ha atribuido a Maurolico merece comentario aparte.

3. 3. En el primero de los *Arithmeticorum libri duo*, Maurolico emplea razonamientos donde se exhiben procesos hereditarios, como hemos venido llámándolos hasta aquí. Al efectuar la demostración de las proposiciones 13, 15, 65, 66 y 67, Maurolico razona sin mayores variantes en la forma, pero dándose perfecta cuenta de que se halla empleando un procedimiento demostrativo especial y diferente de otros muy comunes en la matemática.

Así, al iniciar el tratamiento de un conjunto de proposiciones aritméticas, declara abiertamente que está «anhelando muchas veces demostrarlas por un camino más fácil» y — prosigue — «o bien hacer la demostración de algunas antes descuidadas u olvidadas». El camino *más fácil*, en el decir de Maurolico, es el método de recurrencia.

En efecto, el asunto que preocupaba a Maurolico en las proposiciones antes enumeradas, se refería a ciertas propiedades numéricas. Presentaba una tabla de números en la disposición que sigue, y preguntaba por algunas relaciones entre diversas columnas de enteros positivos.

Observemos primero la tabla.

Números enteros	Pares	Impares	Triangulares	Cuadrados	Números de la forma $n(n-1)$
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
6	10	11	21	36	30
7	12	13	28	49	42
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	e_n	o_n	t_n	s_n	L_n

En la nomenclatura de Maurolico, los números de la misma fila y distinta columna se llaman *colaterales*.

En los subpárrafos *a*), *b*), *c*) y *d*) transcribimos cuatro de los teoremas demostrados por Maurolico de acuerdo con ese camino más fácil que él mencionaba. En *c*) y *d*) vamos a transcribir también la demostración del siciliano; no así en *a*) y *b*), donde rigen los mismos métodos, pero no consideramos necesario dilatar la extensión de este capítulo con simples repeticiones.

a) *Los números impares se obtienen de la unidad por sucesivas adiciones del* 2.

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$o_n + 2 = o_{n+1})$$

b) *Un número cuadrado más el impar colateral del siguiente da el cuadrado siguiente.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$s_n + o_{n+1} = s_{n+1})$$

c) *Todo entero más el entero que le precede iguala al número impar colateral del primer entero.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$n + (n-1) = o_n)$$

Demostración de Maurolico. El entero 2 más el 1 da el entero 3, impar colateral del 2. Además, $2+3=5$, número que en virtud de la proposición *a*) es impar. Pues bien, cuando a 4 le sumamos 3, le estamos sumando un 2 al 5, y esto da 7, colateral del 4. Y así *ad infinitum*.

d) *La suma de los* n *primeros impares es igual al* n*-ésimo número cuadrado.*

(Nosotros podríamos escribir la fórmula:

$$o_1 + o_2 + \cdots + o_n = s_n)$$

Demostración de Maurolico. Vemos que $1+3=4$, segundo número cuadrado. Este 4 agregado al tercer impar, que es 5, da 9: tercer número cuadrado. Análogamente, $9+7=16$, cuarto número cuadrado. Y así sucesivamente. La proposición queda demostrada apoyándosela en un teorema anterior de Maurolico: «Todo número cuadrado más el siguiente impar iguala al cuadrado siguiente».

Fijémonos bien en el procedimiento seguido en la demostración de estas proposiciones. En primer lugar, se hace la verificación de la propiedad para un primer elemento; después se busca convalidar dicha propiedad respecto de un elemento diverso del primero; por fin, se observa que el proceso es hereditario y que continúa, sin modificaciones, indefinidamente. ¿Qué significa este «indefinidamente» sino la *totalidad* de los casos?

La semejanza del método de Maurolico y el de Arquímedes es perfecta. La índole de los teoremas expuestos según este método por el clérigo de Messina, es aritmética; pero el esquema es enteramente igual al empleado por el autor de *Sobre el equilibrio de planos.*

3. 4. Quien primero llamó la atención de los matemáticos sobre el proceso inductivo de Francesco Maurolico fue el historiador italiano Giovanni Vacca, quien, aparte de unas breves notas que había agregado al *Formulaire de Mathématiques* de Peano (el primero de cuyos cinco volúmenes apareció en Turín en 1895) con motivo del principio de inducción matemática, escribió también, en 1903, una investigación más prolija publicada después en el *Bulletin of the American Mathematical Society,* tomo XVI (1909-1910), pág. 70, bajo el elocuente título de.

«Maurolycus, the first discover of the principle of mathematical induction».

Los comentarios de Vacca fueron reproducidos en la *Revue de Métaphysique et de Morale,* año 1911, pág. 30.

No cabe duda que las afirmaciones de estos artículos debían de resultar muy interesantes por entonces, pues hasta ese momento predominaba la opinión de Moritz Cantor, quien atribuía a Pascal el descubrimiento (o el explícito reconocimiento) del método de inducción matemática.

La tesis sostenida por Giovanni Vacca no se remonta a Arquímedes y, además, deja la impresión de que dicho método surge en Maurolico sin precedente ninguno. El retroceso hasta Arquímedes, no obstante, nos parece en la actualidad muy comprensible, atendiendo a la función desempeñada por el clérigo siciliano en su larga trayectoria como erudito crítico y traductor de obras de los clásicos griegos, en los cuales ha inspirado sus mayores éxitos.

W. H. Bussey (de Minesota) es autor de un artículo titulado «The origin of the mathematical induction», *The American Mathematical Monthly,* XXIV, 1917, pág. 199, en donde la tesis de Giovanni Vacca está desarrollada e iluminada con ejemplos oportunos y comentarios sumamente precisos, tan necesarios para comprender mejor el pensamiento de Maurolico, cuyas obras no son de fácil acceso para el lector corriente.

PASCAL, FERMAT Y OTROS, SOBRE EL MISMO TEMA

4. 1. Se admite por lo común que uno de los opúsculos más significativos de Blaise Pascal (1623 a 1662) es el que lleva por título *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.* No se sabe bien cuándo fue escrito, aunque se presume data de 1654 o, a más tardar, de 1658.

Era hacia 1655 cuando Pascal ingresaba al monasterio cirterciense de Port-Royal, cerca de París, el más célebre centro de disputas teológicas y de las más sutiles elucubraciones lógicas de toda Francia. Era hacia 1654 cuando Pascal concluia el *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière.*

Correlacionando las fechas antes citadas, es fácil comprender que el genial francés pasaba por un período particularmente fecundo dentro de su corta vida, sumido en profundas reflexiones acerca de cuestiones lógicas y en los diversos modos de razonamiento.

Por ello no debe extrañarnos que, aún cuando se entretuviese considerando las propiedades del *triángulo aritmético,* se preocupara tanto por poner en plena luz el proceso argumental seguido por él al establecer la verdad de un teorema. El tema es de Combinatoria (si bien esta palabra no estaba en uso todavía) y, al tratarlo con detalle, llega a una proposición — por Pascal denominada *Consecuencia 12* — cuya demostración realiza por inducción completa.

Va de suyo que el autor del *Traité,* movido por su finísimo espíritu lógico, expone las fases del proceso de recurrencia con una justeza, claridad y elegancia que carecen de precedentes.

Por no entretener al lector con comentarios largos (por ejemplo, acerca de la definición y denotación del triángulo aritmético), nos limitamos a glosar la observación que precede a la prueba de la citada Consecuencia 12, donde se ofrece el esquema pascaliano de la inducción completa.

Poco más o menos, dice Pascal: «Aunque esta proposición (la Consecuencia 12) tenga una infinidad de casos, daré de ella una demostración muy corta suponiendo *dos* lemas:

«El primero, evidente por sí mismo, es que la proposición es cierta en un primer caso, como se verifica con sólo observar la disposición del triángulo;

«El segundo, que si la proposición vale en un caso *cualquiera*, valdrá *necesariamente* en el siguiente.

«De donde surge que vale necesariamente en todos los casos, pues vale en el primero por el primer lema; entonces por el segundo lema vale en el segundo caso; entonces, en el tercero, y así hasta el infinito».

Esta certera y luminosa explicación de Pascal precediendo a la famosa Consecuencia 12, indujo a Moritz Cantor a afirmar que en ella se halla el primer empleo completo y sistemático del principio de inducción. En verdad, nadie lo había enunciado antes con tan notable precisión.

Blaise Pascal utiliza el mismo principio en la demostración de varias proposiciones de combinatoria, como son las números 9, 10 y 11 del *Traité des ordres numériques*. Pero nos informa, también puntualmente, que su venerado amigo Pierre de Fermat (1601 a 1665), en ocasión de haberse ocupado de análoga materia, había llegado a una consecuencia similar a la 12 de Pascal, salvo acaso en el enunciado.

En el *Traité du triangle arithmétique* Pascal no cita a Maurolico. Pero conocía bien la obra del siciliano, pues, en una carta dirigida al Consejero del Rey Pierre de Carcavi, fechada en 1658, en la cual da cuenta de sus estudios sobre el centro de gravedad, materia de estirpe arquimediana que le obliga a ciertas digresiones sobre propiedades numéricas, manifiesta textualmente Pascal:

«Cela est aisé par Maurolic et de là paraît la verité de ma proposition».

4. 2. Sin duda, también conocía Pascal la obra de Bachet, según lo deja entrever la copiosa correspondencia mantenida con Pierre de Fermat con relación al Cálculo de Probabilidades y a cuestiones anexas a la teoría de los números, donde ambos franceses habían incursionado — en forma particularmente sobresaliente, Fermat — prosiguiendo la trayectoria marcada por Diofanto de Alejandría trece siglos antes.

Claude-Gaspar Bachet, Señor de Méziriac (1581 a 1638), fue un erudito humanista francés cuya gloria mayor consiste en la edición crítica de la *Aritmética* de Diofanto, obra a la cual enriqueció con notas y comentarios substanciales, característicos de un matemático profundo.

La Historia lo recuerda asimismo por los *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres,* libro donde se reinicia la vía de la matemática recreativa, interrumpida en la *Antología griega*, corriente en la Edad Media. Compuso además unos *Elementos de aritmética,* que no dio a la prensa, pero, sobre todo, se destaca por haber reactivado el interés por las disciplinas algebraicas, hasta entonces tenidas muy en menos en virtud del incuestionable predominio de los estudios geométricos euclídeos.

Se suele citar a Bachet entre quienes hacían uso de la técnica de la inducción completa de Maurolico, antes del mismo Pascal. Por ese conducto acaso, también sea heredero Pascal de Maurolico.

4. 3. Sería injusto e históricamente incorrecto no detenerse un instante en Pierre de Fermat (1601 a 1665) al trazar el desarrollo del razonamiento por recurrencia. Fermat, de quien Pascal había dicho

«celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre».

había estudiado los libros de Diofanto en la edicción de Bachet, utilizando los márgenes del texto para anotar, muy sumariamente, algunos de los más notables resultados de la teoría de los números.

Aparte de esas notas muy poco ha dejado escrito Fermat y menos aún acerca de los métodos de descubrimiento y demostración usados por él. No obstante, existe una carta que le remitió al matemático aficionado Pierre de Carcavi, en la cual se explica el *método del descenso infinito*, por otro nombre, *método de las cascadas*, del que daremos una ligera idea.

Fermat no era un matemático profesional, sino un probo funcionario que en sus momentos de ocio se entretenía con las matemáticas. En uno de esos momentos descubrió que *todo número primo de la forma* $4n+1$ *es la suma de dos cuadrados,* como por ejemplo, $13=3^2+2^2$, $17=4^2+1^2$, $101=10^2+1^2$, etc. La demostración del teorema no fue dejada por Fermat, pero, en el año 1659, en carta a Carcavi, menciona las dificultates que había tenido para procurarse la prueba, a la cual había llegado — dice — utilizando un «nuevo procedimiento» cuya descripción es como sigue:

Parto — nos dice Fermat — suponiendo lo contrario de lo que voy a demostrar y, así, supongo que algún número primo de la forma $4n+1$ no es la suma de dos cuadrados. Entonces *demuestro* que existe otro número primo, *menor que aquél* y también de forma $4n+1$, que tampoco es suma de dos cuadrados. De este caso, a mi vez, desciendo a otro primo menor todavía pero de la misma forma, que tampoco es suma de dos cuadrados. Y contínúo así hasta llegar al 5, el menor de todos los primos de la forma $4n+1$, del cual en virtud de la demostración que vengo siguiendo debo afirmar que no es igual a la suma de dos cuadrados. He aquí, al cabo, una contradición, pues $5=2^2+1^2$.

La contradición proviene de haber supuesto un número primo de la forma $4n+1$ que no sea suma de dos cuadrados. Queda, pues, demostrado por el absurdo el teorema descubierto por Fermat ... Lástima grande que su descubridor no nos explicó cómo se trasladaba de un caso al anterior, para obtener la certeza de que la propiedad erróneamente supuesta se transfería en forma necesaria durante el retroceso. Por ello el talento de Leonhard Euler (1707 a 1783) consumió siete años en búsqueda de la demóstración del teorema de Fermat, hallándola por fin.

El método de las cascadas es de muy difícil aplicación, porque no se halla, por lo general, la manera de retroceder deductivamente y llegar a un primer caso donde se advierta la contradicción. Por esta razón, el método de Fermat no alcanzó la difusión que podía preverse dado lo sencillo que parecía.

El descenso infinito se basa en un principio y en un tipo de razonamiento probablemente conocidos ya por Giovanni Campano de Novara, capellán de Urbano IV y traductor de los *Elementos* de Euclides al latín (1482). En la traducción (que incluye los libros XIV y XV hoy tenidos por apócrifos) Campano anota la necesidad de admitir un *nuevo postulado* para poder fundar la aritmética, a saber: «todo grupo de números admite un mínimo».

Pues bien, en la precitada carta a Carcavi, Fermat explica el descenso infinito partiendo del principio de que *un entero positivo no puede ser disminuído indefinidamente,* cosa que en términos actuales se reseña con el nombre de postulado de la buena ordenación. El método de Fermat incluye, como el principio de inducción completa, un ingrediente hereditario; pero, en lugar de demostrar cómo pasa ese ingrediente de un caso al siguiente, prueba cómo retrocede al anterior hasta arribar al primero de la sucesión, donde la proposición resulta falsa por evidencia inmediata. Como sostiene Giovanni Vacca, el método del descenso infinito es una metamorfosis del principio de inducción completa, pues la buena ordenación de los números naturales permite deducir dicho principio, y recíprocamente, como el lector sabe bien.

Aparte de Euler, fue Joseph-Louis, conde de Lagrange (1736 a 1813) y unos pocos matemáticos más quienes aplicaron el método de Fermat, de cuya dificultad demostrativa hemos hablado.

4. 4. En cambio, el procedimiento demostrativo empleado por Pascal era más sencillo y el principio sustentador estaba enunciado con lucidez sin precedentes en el *Traité du triangle arithmétique*.

Jakob I Bernoulli (1654 a 1705), de honda huella en Probabilidades, en Combinatoria y en muchas otras disciplinas matemáticas, hizo a partir de 1686 el más extenso desarrollo del principio enunciado por Pascal, dejándolo incorporado definitivamente a las técnicas demostrativas. Su *Ars conjectandi* contiene tan notables aplicaciones del procedimiento en el estudio de las series y en la combinatoria, que algunos pensadores (como Ernst Mach, por ejemplo) no han vacilado en llamar método de Bernoulli a la demostración por recurrencia.

TEOREMA O AXIOMA

5. 1. (Julius Wilhelm) Richard Dedekind (1831 a 1916) pretendió fundamentar los números y la aritmética toda a partir de ideas primitivas un tanto remotas respecto del concepto corriente de entero natural. Algo similar intentó también Georg Cantor, aunque en una dirección y con un alcance que no conciernen a nuestro tema.

En el difundido libro de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* (primera edición 1888, segunda edición 1893, tercera edición 1911) se elabora la magistral teoría partiendo de cinco ideas primitivas antepuestas a la de número natural. El propósito es deducir éste de aquellas ideas primitivas.

No menos de cinco definiciones especiales exige el punto de vista de Dedekind: (1) representación o aplicación de una clase, (2) cadena, (3) cadena de un elemento, (4) inducción completa en enunciado muy generalizado, (5) sistema simplemente infinito.

La representación, φ, es una correspondencia biunívoca o plurívoca entre los elementos a de una clase A y los elemetnos $a_{\prime}$ de una clase A'. En caso de ser la correspondencia biunívoca, la representación y las clases respectivas se dicen *semejantes*.

La semejanza es una relación ecuable y, por tanto, posibilita la clasificación de las clases por semejanza con una clase dada.

La representación de una clase *en sí misma* es una correspondencia que se establece entre los elementos de una misma clase. Cuando existe tal tipo de representación en sí misma ocurre que $A' \subset A$.

Si C es una parte de A y es φ una representación de A en sí misma, y si además $\varphi(C) \subset C$, entonces C se llama *cadena de* A *respecto de* φ. (Si φ fuese biunívoca, el lector comprenderá que la cadena de A no podría ser finita).

Siendo a un elemento cualquiera (o una colección cualquiera de elementos) de una clase, pueden existir muchas cadenas respecto de la representación plurívoca φ, que contengan a a. La intersección o parte común de todas esas cadenas se denota por A_0 y se llama *cadena de* a *respecto de* φ (1).

Con el recurso de todas estas nociones previas Dedekind pasa a demostrar la forma generalizada de la inducción completa, con el enunciado:

«Sea a un elemento cualquiera (o una colección cualquiera de elementos) de una clase A. Sea dada φ. Hállese en A la intersección de A' con la cadena de a. Entonces se deduce que la cadena de a está contenida en A».

La proposición anterior, algo abstrusa a primera vista, es análoga al principio de inducción matemática, del cual difiere sólo en dos puntos: no requiere la particularización de un elemento primero y no exige que la representación sea biunívoca. Nos interesa destacar que Dedekind *demuestra* esa proposición como *teorema* dentro de su teoría general.

Con la inducción completa generalizada y con la noción adicional de *clase simplemente infinita* (Clase N que admite una representación semejante φ sobre sí misma, respecto de la cual N resulta cadena de un elemento no contenido en $\varphi(N)$), Dedekind arriba finalmente al concepto de número natural (ordinal).

Se ha reprochado a tan maravillosa construcción el empleo de argumentos extramatemáticos (Se cita, por ejemplo, éste: «Existen clases infinitas porque el espíritu tiene la facultad de hacer objeto de pensamiento a todas las cosas»). Pero aún ello aparte, el principal defecto es no ser clara la concepción. Nada se gana — y, al contrario, mucho se pierde — haciendo descender la idea de número natural, que se posee en forma intuitiva, de una sistematización mental artificiosa y lamentablemente oscura.

5. 2. El italiano Giuseppe Peano (1858 a 1932) se decidió por una actitud más práctica y sencilla: la de considerar al número natural directamente, dando de él una definición implícita por vía axiomática. Este punto de vista se halla expuesto en sus *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* 1889, y reiterado en *Sul concetto di numero* (Riv. mat., 1891), en *Aritmetica generale ed Algebra elementare*, 1902, y, sobre todo en las páginas del muy famoso *Formulaire de Mathématiques* antes citado, libro éste que funda la escuela matemática italiana más importante del siglo XX.

Como se sabe, las ideas primitivas sobre las cuales Peano fundamenta axiomáticamente el número natural, son apenas tres: *número, primer elemento o unidad* y *siguiente;* todas ellas muy próximas a nuestro conocimiento directo y sin apelación a sistemas argumentales especiales, al contrario de lo realizado por Dedekind. Aquellas tres ideas primitivas quedan caracterizadas por los *cinco axiomas de Peano*, el quinto de los cuales constituye el principio de inducción completa: «Si S es una clase de números que contiene a la unidad, y si la clase formada por los siguientes de los elementos de S está contenida en S, entonces todo número está contenido en S».

Pero el quinto postulado de Peano no es tan claro e intuitivo como los cuatro que le preceden. Esto se advierte de inmediato cotejando los enunciados. Peano lo mantiene por su notoria utilidad, pues junto a los demás postulados permite una rápida caracterización de la operación de suma y de la relación de orden, llegando luego a la demostración de un teorema que equivale a declarar que los números naturales gozan de la propiedad de la *buena ordenación*.

Alessandro Padoa (1868 a 1937), en la *Revue de Mathématiques* dirigida por Peano,

(1) Por ejemplo, si a es el número *15*, la *cadena de* 15 *respecto de la relación* «menor que» entre números naturales, será la intersección de todas las clases de números no menores que *15*.

El lugar apropriado de este ejemplo vendría mucho más adelante en la teoría de Dedekind.

elaboró entre 1902 y 1906 una fundamentación más severa, apoyándose solamente en dos ideas primitivas: la de *número* y la de *siguiente*. Necesitó enunciar cuatro axiomas, el último de los cuales es, de nuevo aquí, el principio de inducción completa.

En 1908, Mario Pieri (1860 a 1913) modifica aún más la axiomática de la escuela italiana, movido por la opinión de que el principio de inducción completa es una proposición más complicada que la de los restantes axiomas. Así, empleando como ideas primitivas la de *número* y la de *siguiente*, propone cuatro axiomas, el último de los cuales reemplaza a la inducción completa y es el principio de la *buena ordenación:* «En cualquier clase no nula de números, existe por lo menos uno que no es el siguiente de ningún número de la clase».

Al revés de lo que hacen Peano y Padoa, Pieri sienta como axioma la buena ordenación y deduce luego, como teorema, la inducción completa. El trabajo de Pieri se titula *Sopra gli assiomi aritmetici* y apareció en el Boll. dell'Accademia Gioenia de Scienze Naturali di Catania. La deducción del principio de recurrencia es similar a la que presentamos en el párrafo 5. 3.

5. 3. Por tratarse de una obra que contribuyó a formar buena parte de los matemáticos de la segunda y tercera décadas del siglo XX, vamos a citar el libro de E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.*

El camino seguido parte del postulado de que el conjunto de los números naturales está bien ordenado, es decir, cualquier subconjunto de él, posee un primer elemento.

Esto admitido, se enuncia el

«*Teorema de la inducción completa.*» Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado m, basta verificar:

a) que P se verifica para m;

b) que supuesto que P se verifica para $n \geq m$, se prueba que P se verifica para $n+1$ ».

Demostración por el absurdo. Llamaremos M al conjunto de naturales donde P no se verifique. M tiene un elemento mínimo según el postulado de la buena ordenación; sea p ese elemento mínimo. Digo que debe ser $p < m$.

En efecto, si fuera $p = m$, el enunciado a) nos asegura que p verifica la propiedad P; si fuera $p > m$, el número $p-1$ (que es mayor o igual a m), por ser menor que p, verifica a P; y, por el enunciado b), el siguiente de $p-1$ (es decir, p) verificará también a P, contra lo supuesto.

Entonces, p (y lo mismo vale para los demás elementos de M) debe ser menor que m. O sea, todos los números mayores o iguales a m satisfacen a P.

(5. 3. 1) Si se desea una demostración más elegante y moderna, aconsejaríamos tomar el texto de Lucienne Félix, *Exposé moderne des mathématiques élémentaires,* Dunod, París, 2a. edición. Helo a continuación.

Si se trata de alguna propiedad tal que respecto de un número $a \in N$ no puede sino ser verdadera o falsa, entonces el teorema de la demostración por recurrencia asume la siguiente expresión:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1. & \text{La propiedad es verdadera para } a=1; \\ 2. & [\forall p \in N\text{: verd. para } a=p] \Rightarrow \\ & \Rightarrow [\text{verd. para } a=p+1] \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{verd. } \forall a \in N].$$

Demostración. Repartimos N en dos subconjuntos: el V donde la propiedad es verdadera, y el F, donde es falsa. Como se cumplen 1 y 2, vamos a probar que es imposible que F no sea vacío.

En efecto, si F no es vacío, por la *buena ordenación* de los números naturales debe contener un primer elemento q. Este q no puede ser 1, por la primera condición del enunciado. Entonces, es mayor que 1 y $q-1$ existe.

El número $q-1$ pertence, pues, a V; pero la segunda condición del enunciado impone que $q-1+1=q$ pertenezca a V, lo cual contradice la hipótesis de que q pertenece a F. Luego F es vacío.

5. 4. Queremos sintetizar las observaciones que la lectura de este capítulo nos conduce a formular casi insensiblemente.

El punto de vista de Dedekind logra introducir el principio de recurrencia como un teorema. Pero el precio pagado por esta conquista es muy alto. Por una parte, necesita una construcción demasiado vasta sostenida por ideas primitivas poco claras y alejadas de nuestro conocimiento directo. Por otra parte, dicha construcción queda sin consolidar a su vez; y esto no sería lo peor, sino que se basa en razonamientos extramatemáticos sobre cuya autenticidad no queda más recurso que aceptarlos por actos de fe.

La fundamentación ofrecida por la escuela matemática de Peano es al comienzo más sincera. El método axiomático no discute filosóficamente la cimentación de una teoría matemática. Acepta las cosas tal cual se usan en esa teoría y evita dar definiciones explícitas de aquellos conceptos primordiales sobre los cuales se edifica. Los axiomas revelan el esquema fundamental que enlaza las ideas primitivas y dan lugar a la derivación deductiva de las propiedades subsiguientes. Es claro que no consiguen — ni procuran — dilucidar problemas concernientes a la íntima esencia del quehacer matemático.

Pero aún así, autores como Pieri no se manifiestan insensibles al tipo de axiomas que escogen. Acaso por una actitud cuyas raíces se encuentren rastreando la problemática que dio origen a las geometrías no euclidianas, advierten que algunos postulados son «más complejos» que otros. Pieri nota esta *peculiaridad* en el axioma de la inducción aceptado por Peano y por Padoa, y, para quedar en paz con su conciencia, propone reemplazarlo por el axioma de la buena ordenación. Con este axioma, la inducción completa pasa a ser un teorema···, aunque, fuerza es reconocerlo, un teorema también *muy peculiar*.

¿Se reducirá todo entonces, a gustos?

No. La cuestión pasó a mayores todavía. Históricamente, la afirmación de Henri Poincaré acerca de la lógica y de la matemática (afirmación de la que daremos noticias en el capítulo siguiente) es la primera responsable de una dilatada controversia mantenida por quienes creen que el principio de recurrencia resulta de la aplicación lisa y llana de la lógica ordinaria (y, en particular, del principio de contradicción), en contra de los que creen en la naturaleza extralógica de la inducción matemática.

FILOSOFIA, MATEMATICA E INDUCCION COMPLETA

6. 1. Los filósofos del siglo XIX que se dedicaron al examen de los fundamentos de la inferencia, tuvieron que prestar atención al método de la inducción que los matemáticos venían aplicando en forma más o menos explícita desde muy antiguo, y cuyo esquema habían trazado con claridad Pascal y Bernoulli.

Era notoria la necesidad de distinguir entre la inducción en general, de cuyos frutos se sustenta la ciencia de la naturaleza, y la inducción (axioma o teorema) de que echan mano los matemáticos. Fue el original matemático inglés Augustus de Morgan (1806 a 1870) quien propuso para esta última la designación especial de *inducción sucesiva*, después llamada *inducción matemática* por Poincaré y, posteriormente aún, *inducción completa*.

La obra principal de Augustus de Morgan sobre el particular es *Formal Logic,* 1847.

La palabra *inducción* no es feliz al ser aplicada a argumentaciones matemáticas, predominantemente deductivas. El francés Jacques Hadamard (n. 1865) en la *Encyclopédie Francaise,* por ejemplo, utiliza la denominación de *razonamiento por recurrencia* para el tipo de argumentación que sirve para *cualquier* elemento de una sucesión si se lo basa sobre la idea de *siguiente.* Sin embargo, como la matemática emplea razonamientos que también han sido llamados *de recurrencia* y que valen en el dominio de los números transfinitos, recomiéndase designar por *recurrencia simple* a la inducción matemática de que hemos venido ocupándonos hasta ahora, para distinguirla de la *recurrencia transfinita* (inducción transfinita) aplicable entre los conjuntos infinitos [1]. Como hemos venido haciendo hasta este punto, continuaremos sin embargo empleando la denominación de recurrencia como sinónima de inducción matemática, y sólo haremos el distingo entre recurrencia simple y transfinita cuando lo exija la claridad de la exposición. Lo mismo debe hacer, a muestro parecer, el profesor de enseñanza secundaria, pues él, con toda seguridad, no va a tratar en sus lecciones el tema de los conjuntos transfinitos.

Nos toca ahora completar el panorama que hemos venido rastreando, en un enfoque histórico de cuyos pretendidos alcances hemos hablado en la *Introducción* del presente ensayo. Estamos en posesión de la pista que nos ilumina los orígenes de la inducción completa; conocemos la terminología elaborada a través de luengos años; ¿qué podemos decir, sin salirnos de los límites razonablemente elementales que nos hemos impuesto, acerca de las arduas cuestiones que se suscitaron a partir de fines del siglo XIX?

(1) La diferencia es esencial. El «siguiente» de un número transfinito no puede ser considerado evidentemente como «infinito más uno», pues en este dominio no valen las reglas de la aritmética ordinaria.

6. 2. Para Henri Poincaré (1854 a 1912) el principio de inducción completa, por su naturaleza *típicamente matemática,* constituye la prueba irrefutable de que *el razonamiento matemático no es reducible al razonamiento lógico.* Conforma y condiciona una especie de argumentación comparable a la basada en los juicios sintéticos *a priori,* que transcienden tanto a la pura demostración analítica como a la inducción de origem empírico.

Aceptar el principio de recurrencia equivale a reconocerlo como una capacidad propia del espíritu: la de poder concebir la *repetición indefinida* de un mismo acto, aún cuando dicho acto se haya manifestado una sola vez. De tal específica capacidad, el hombre tiene la intuición directa. Por consiguiente, la inducción matemática se nos manifiesta como una forma del pensamiento, exclusiva y típica de la matemática, que, en el decir de Poincaré, consiste en admitir que «si una propriedad es verdadera para el número 1, y si se establece que es verdadera para $n+1$ siempre que lo sea para n, será verdadera para todos los números naturales».

Característico de esa forma de pensamiento es la facultad de condensar una *infinidad de silogismos* — así se expresa Poincaré — en una sola fórmula. Pretender la demostración del principio de inducción será siempre a la postre tarea vana, porque hemos de recaer necesariamente en la admisión de algún axioma que lo equivalga.

Los puntos de vista de Henri Poincaré están expuestos con brillo excepcional en muchas de sus obras, producidas a lo largo de dieciocho fecundos años, según el detalle cronológico que nos ha recordado E. W. Beth («Poincaré et la Philosophie», conferencia pronunciada en 1954):

1894: *Sur la nature du raisonnement mathématique* (Rev. M. M., vol. 2; reproducido en *La science et l'hypothèse,* 1902);

1905-1906: *Les mathématiques et la logique* (Rev. M. M., vol. *13* y 14; reproducido con modificaciones en *Science et Méthode,* 1908);

1906: *À propos de la logistique* (Rev. M. M., vol. 14);

1908: Les derniers efforts des logisticiens (en *Science et Méthode*, 1908);

1909: *La logique de l'infini* (Rev. M. M., vol. 17; reproducido en *Dernières Pensées,* 1913);

1912: *Les mathématiques et la logistique* (en *Dernières Pensées*).

En los precedentes escritos se hallan los hilos principales de la larga controversia sostenida contra los logicistas. También debe agregarse la referencia al libro *La valeur de la Science*, 1912, muy difundido en nuestros medios, y de lectura amenísima.

La cuestión promovida vigorosamente por Poincaré y sus adversarios es saber si la diferencia entre la lógica y la matemática es insalvable o no lo es. Con sólo atender a las proyecciones que esta cuestión tuvo en la filosofía de la matemática, nos damos cuenta de que centraliza uno de los problemas más arduos y que no estamos todavía en condiciones de encarar con eficacia. Señalemos, sin embargo, un hecho histórico curioso y aleccionador: el tema de la inducción completa tiene hondas raíces en una antigüedad remota y, pese al transcurso del tiempo, mantiene ramificaciones vivas en plena mitad del siglo XX. ¡Nada más elocuente para instar a la reflexión de los profesores de segunda enseñanza!

A la pregunta de si basta la lógica para construir la matemática, la respuesta más cauta en la hora actual debería exponerse, con toda sinceridad, en los siguientes términos:

El análisis elemental (incluso la aritmética) responde a un fundamento lógico *a condición* de que al lado de ciertos postulados de carácter indubitablemente lógicos se admitan asimismo otros postulados, *típicos de la matemática,* cuyo carácter lógico es dudoso. Entre estos últimos corresponde citar: 1) un axioma sobre la existencia de *infinitos* elementos individuales; 2) un axioma que permita afirmar la existência de clases provenientes de definiciones *impredicativas* (así se llaman aquellas en las cuales se hacen intervenir infinitas operaciones); 3) para ciertas cuestiones de análisis superior, agregar todavía el *axioma de elección* («Para todo conjunto M cuyos elementos sean conjuntos E — no nulos y de intersercción nula dos a dos — existe al menos un conjunto N que contiene un elemento y sólo uno de cada conjunto E de M»).

Pues bien, dentro del panorama actual, si se admiten los axiomas 1) y 2), se posibilita la justificación del principio de recurrencia. Pero si se cuestionan esos dos axiomas, la situación se torna sumamente crítica.

El grupo de los Bourbaki, rama francesa del formalismo hilbertiano al cual revitalizan y modifican en gran medida, reconocen francamente la posición que adoptan para edificar la matemática desde sus primeros capítulos. Son suyas estas palabras:

«Se llega así a la conclusión de que un texto matemático suficientemente explícito podría ser expresado con un lenguaje convencional que no contuviera sino un pequeño número de «palabras» invariables, reunidas según una sintaxis constituída por un pequeño número de reglas inviolables: un texto tal se dice *formalizado*».

Mas agregan poco después, como cediendo a una amonestación de Poincaré:

«Como lo verá el lector, la introducción de este lenguaje condensado se acompaña por «razonamientos» de un tipo particular, que pertenecen a la *Metamatemática*»··· «En los casos más sencillos (los razonamientos metamatemáticos) son en verdad perogrulladas··· Pero muy pronto se encuentran ejemplos donde la argumentación toma un sesgo típicamente matemático, con el empleo predominante de los enteros arbitrarios y del razonamiento por recurrencia».

(Cfr. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Primera parte, Libro I, Introducción).

Queremos llamar la atención sobre las palabras «sesgo típicamente matemático», que concuerdan con opiniones largamente sustentadas por Poincaré···

Retrocediendo un poco, hay que citar también algunos pensamientos de Hermann Weyl (1885 a 1955), completamente compenetrados de las ideas de Poincaré. En *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, cuyos primeros capítulos datan de 1927, Weyl explica que la inferencia por inducción completa introduce un *rasgo peculiar y típico de la matemática,* desconocido por la lógica aristotélica, y esencia misma del razonamiento matemático.

Weyl afirma también que la inducción completa es *ordinal* y le «parece incuestionable que el concepto de número ordinal es primario». «La moderna investigación de los fundamentos de la matemática — agrega — que ha destruído la teoría dogmática de los conjuntos, confirma esta opinión» (Sic; véase la edición inglesa de la obra citada, pág. 34-35).

6. 3. Las tesis de Poincaré tuvieron adeptos y adversarios. Hemos citado los adeptos; pasemos a citar los adversarios desde la primera hora, respecto del principio de recurrencia.

En «La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique», artículo publicado en los *Proceedings of the Vth Annual Congress of Mathematicians*, vol. II, pág. 471, Cambridge, 1912, el italiano Alessandro Padoa (1868 a 1937) sostuvo que Poincaré se equivocaba al afirmar que el principio de inducción implica una infinidad de silogismos.

Al contrario, dice, consiste únicamente en una proposición cuya premisa es la afirmación simultánea de *sólo dos condiciones*. Amén de que si implicase una infinidad de silogismos carecería de utilidad, el principio se limita a asegurar la validez de una propiedad para *cualquier* número; y decir *cualquiera* significa *todos* los números. Lo mismo ocurre en las demás demostraciones matemáticas, que se refieren, por ejemplo, a *cualquier* triángulo, o sea, a *todos* los triángulos; etc., etc.

Es erróneo — prosigue Padoa — enunciar el principio como acostumbra a hacerse: «la propiedad es cierta para $n=1$; pero siendo cierta para $n=1$, debe serlo para $n=2$; y siéndolo para $n=2$, ha de serlo para $n=3$; y *así siguiendo*···». La expresión «y así siguiendo», carece de rigor formal. Al contrario de lo que suele creerse, el principio de recurrencia asegura, pues, que el proceso infinito se torna innecesario cuando se conoce la ley de formación de cada etapa, es decir, de cada una de ellas.

Ya Cesare Burali-Forti (1861 a 1931) había rebatido la aserción de Poincaré, demostrando que el razonamiento por recurrencia no se aplica al infinito, sino, por el contrario, a las clases finitas. En «Le classi finite», *Atti R. Acc. di Torino*, vol. XXXII, 1896, y en la *Logica matematica*, 1917 y 1919, explica Burali-Forti cómo las clases de números naturales de que trata la inducción completa, aparte de ser no vacías, son *finitas*, o sea, no pueden ser puestas en correspondencia con una subclase de sí mismas. La conclusión del principio de recurrencia vale para una clase finita cualquiera.

«Place en vez a Poincaré-refuta Burali-Forti — considerarlo (al mencionado principio) característico de las clases infinitas, confundiendo el número de razonamientos necesarios para establecer cierta propiedad, con el número de elementos de una clase particular, y en tal errónea apreciación fue naturalmente seguido por muchos autores».

6. 4. El máximo contendedor de Henri Poincaré ha sido el inglés Bertrand Russell (n. 1872). Mantuvo la tesis logicista de que la matemática no es otra cosa que lógica, contra las punzantes críticas del intuicionismo. Y, en cuanto al principio de inducción se refiere, sostuvo que puede considerárselo una simple *definición*, siendo innecesario otorgarle la jerarquía de axioma fundamental del número natural.

Siguiendo una de sus obras menos técnicas, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, Russell define a los números naturales como aquellos que poseen las *propiedades inductivas*. Son inductivas las propiedades que pertenecen al cero y, además, son hereditarias; entendiendo por hereditarias aquellas que si valen para n también valen para $n+1$.

Precisando lo dicho, he aquí una definición inductiva de los números naturales:

a) O es un número natural;

b) si n es un número natural, $n+1$ es un número natural;

c) los únicos números naturales son los dados por *a*) y *b*).

Al afirmar Russell que la inducción matemática es una definición en el sentido de la lógica ordinaria, recuerda que existen entes que satisfacen esa definición y entes que no la satisfacen. Por ejemplo, los números cardinales infinitos *no* la satisfacen, pues no cambian al serles sumado 1, o al duplicarlos, etc.; razón por la cual exigen la recurrencia transfinita.

Si, pues, la recurrencia simple es una definición en el sentido de la lógica ordinaria «toda la matemática pura, en lo que puede ser deducida de la teoría de los números naturales, es sólo nua prolongación de la lógica» (op. cit., Cap. III).

Partiendo de la definición inductiva cuyo esquema hemos visto, se deduce de inmediato el *teorema* de la inducción completa, enunciando como sigue:

Supongamos una propiedad P *tal que:*

1) *el O tiene la propiedad* P;

2) *Si* n *tiene la propiedad* P, *ello implica que* n + 1 *tiene la propiedad* **P.**

Entonces todo número natural tiene la propiedad **P.**

Después de verificar la condición 1), la demostración es obvia si hemos definido inductivamente los números naturales, pues dar cualquier natural m significa dar su generación inductiva, en virtud de la cláusula *c*), De modo que si P vale para m valdrá necesariamente para $m+1$.

A juicio de Russell esto equivale a subordinar el principio de recurrencia a la definición inductiva, es decir, subordinar la fundamentación de la aritmética a las leyes de la lógica ordinaria.

Semejante resultado es exagerado, como se probó posteriormente. En efecto, basta reemplazar la cláusula *c*) de la definición inductiva por la

c') n queda engendrado partiendo de 0 por aplicación de la operación «sucesivo»,

para que, con ayuda ahora del principio de recurrencia asumido como axioma, la cláusula *c*) misma se transforme en un teorema. En este caso, la subordinación sería al revés de lo querido por Russell. (Ver, por ejemplo, Stephen Cole Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, 1952).

6. 5. Otra conclusión de Russell que merece ser tomada en cuenta es la que surge de una afirmación suya en el sentido de que la esencia de la inducción matemática parece inherente a la idea de «sucesivo» y que, por tanto, es *puramente ordinal.*

Si de esta opinión extraemos la consecuencia de que el fundamento de la recurrencia simple son necesariamente los números ordinales, estaremos incurriendo en un error de apreciación.

Justamente un reciente trabajo de George Kurepa ilustra la tesis contraria. Partiendo de la idea primitiva de *cardinal de un conjunto,* llega a definir los números naturales como cardinales de conjuntos no vacíos y también finitos en el sentido de Dedekind. En palabras más llanas, los números naturales son conjuntos finitos, y *el conjunto* N *de los números naturales es el conjunto de los conjuntos finitos.*

Luego prueba que si n es natural, $n+1$ existe y es natural, y que entre n y $n+1$ no hay número natural alguno. A continuación deduce que el conjunto N es infinito y carente de número natural máximo.

Sobre la base de tales proposiciones demuestra el teorema central del trabajo:

«Si un conjunto S satisface las condiciones:

a) $1 \in S$;

b) las relaciones $n \in N$, $n \in S$ implican $n+1 \in S$;

entonces $N \subseteq S$".

Así presenta Kurepa el principio de inducción completa, desde el punto de vista de la teoría de los conjuntos y apoyándolo en la idea de cardinalidad.

La teoría de los conjuntos de la que parte Kurepa es la axiomática de Fraenkel-Zermelo, para evitar el empleo del axioma de elección; punto de controversia entre cantoristas, logicistas e intuicionistas.

Las precauciones tomadas por Kurepa sirven para soslayar algunas de las dificultades lógicas de la teoría de los conjuntos, pero no todas. A pesar de que no estamos en condiciones de adentrarnos en la discusión de estas apasionattes cuestiones de fundamentación, bástenos recordar que algunas objeciones contemporáneas son de tal calibre que amenazan la estabilidad de toda la teoría de los conjuntos y obligan a formular construcciones de sostén para que esa estabilidad no quede definitivamente dañada.

(Quien se interese por estos temas bebería consultar, en primer lugar, el libro de E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1959).

No obstante el camino emprendido, Kurepa reconoce que renunciar al axioma de elección (por lo menos en el enunciado más objectado por los intuicionistas) proporciona el inconveniente de postergar mucho la presentación del teorema de recurrencia. En cambio, aceptar ese axioma es facilitar el desarrollo deductivo, pues con auxilio del postulado de elección, se demuestra en forma rápida y clara que N es un conjunto bien ordenado y, a continuación, la inducción matemática, como ya sabemos.

El trabajo de Kurepa data de 1949, aunque fue publicado tres años más tarde con el título de «The principle of complete induction», *Bulletin International de l'Académie Yougoslave des Sciences et des Beaux-Arts*, tomo 227, Zagreb, 1952.

Los temas enunciados en el presente capítulo desbordan el nivel que hemos impuesto a este ensayo sobre la inducción matemática. Para el enfoque histórico, empero, constituyen citas valiosas pues nos informan que la problemática cuyos rastros hemos seguido se halla presente en nuestros días, con un vigor tal que parece recién inaugurada.

Con las referências bibliográficas antedichas, preferimos interrumpir aquí esta exposición elemental y poner punto final.