Remarque sur le Théorème de Rado

par ***A. S. Gonçalves** et **J. M. S. Simões Pereira***

SOMMAIRE

Dans ce mémoire nous établissons la validité du théorème de RADO *[1, page 18], pour le cas où la loi* E *fait correspondre à un ensemble fini d'entiers I, un ensemble fini d'entiers* E *(I). Pour une telle loi la conclusion du théorème reste valable si le graphe est localement et progressivement fini.*

*

* *

Dans la deuxième édition de [1], BERGE a énoncé le théorème suivant:

THÉORÈME DE RADO: *Considérons un graphe localement fini* (X, Γ), *un ensemble fini d'entiers* K *et une loi* E *qui fait correspondre à tout* $I \subset K$ *un ensemble* $E(I) \subset K$; *si, sur tout sous-graphe fini* (A, Γ_A), *il existe une fonction* $\varphi_A(x)$ *à valeurs entières telle que* $\varphi_A(x) \in E[\varphi_A(\Gamma_A x)]$ $(x \in A)$, *alors il existera sur* X *une fonction* $\varphi(x)$ *à valeurs entières telle que*

$$\varphi(x) \in E[\varphi(\Gamma x)] \quad (x \in X).$$

La loi E qui fait correspondre à un ensemble d'entiers I, un ensemble d'entiers $E(I)$, ne peut pas en effet être énoncée sans restrictions du moins pour la démonstration présentée par BERGE, c'est-à-dire, qu'on doit prendre un ensemble fini d'entiers K auquel tous les nombres entiers, mis en jeu par la loi E, appartiennent. C'est ce fait que BERGE a oublié dans la première édition de [1]; ce faisant, la démonstration qu'il y présente n'est plus valable.

Le but de ce mémoire est de montrer que, si le graphe est localement et progressivement fini, la susdite restriction peut être enlevée.

On utilise dans ce qui suit les notations de [1]. La démonstration de notre résultat étant très semblable à celle donnée dans [1], il faut tout simplement présenter une nouvelle justification du fait que le nombre des restrictions des fonctions φ_n reste fini, quand n varie.

Nous justifierons ce fait en montrant que, quand n varie, sur tout sommet où elles soient définies, les fonctions φ_n elles-mêmes ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes.

En effet, si le graphe est progressivement fini il y a au moins un sommet sans descendants; donc, nous désignerons par $\{a\}$ l'ensemble de ces sommets, par a l'un de ses éléments et nous considérerons une fonction φ_n définie sur un ensemble A_n tel que $a \in A_n$. On aura:

$$\varphi_n(a) \in E[\varphi_n(\Gamma a)] = E[\emptyset].$$

Nous écrivons Γ et non pas Γ_n parce que, pour tout sommet, Γ_n devient identique à Γ pour n suffisamment grand.

Au delà d'une certaine valeur de n on aura toujours $\varphi_n(a) \in E[\emptyset]$ et les fonctions φ_n prendront sur a un nombre fini de valeurs différentes car sinon la loi E ferait correspondre à l'ensemble vide $\emptyset$ un ensemble infini d'entiers ce qui contredirait l'hypothèse.

Considérons maintenant un sommet $x_0 \notin \{a\}$. Pour n suffisamment grand on aura: $\varphi_n(x_0) \in E[\varphi_n(\Gamma x_0)]$.

Si les fonctions φ_n prennent sur x_0, quand n varie, une infinité de valeurs différentes, il y aura parmi les descendants de x_0, un au moins, soit x_1, où les fonctions φ_n prendront aussi une infinité de valeurs différentes.

En effet, s'il n'existait pas un point dans ces conditions, l'ensemble $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ des valeurs prises par les φ_n dans Γx_0 serait un ensemble fini; donc la réunion des ensembles $E(J) - J$ représentant un sous-ensemble quelconque de $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ — serait, elle aussi, finie. Et puisqu'on a $\bigcup_n \varphi_n(x_0) \subset \subset \bigcup_n E[\varphi_n(\Gamma x_0)] \subset \bigcup E(J)$, le nombre des valeurs différentes prises par les fonctions φ_n sur x_0 ne pourrait pas être infini.

Considérons donc le point x_1 ainsi obtenu. On ne pourra pas avoir $x_1 \in \{a\}$ car cela contredit le résultat déjà obtenu pour les sommets de $\{a\}$. Mais si $x_1 \notin \{a\}$, nous raisonnerons pour x_1 d'une façon semblable à celle que nous avons utilisée pour x_0 et nous obtiendrons $x_2 \in \Gamma x_1$. Nous pourrons construire un chemin $[x_0, x_1, x_2, \cdots]$ sur les sommets duquel les fonctions φ_n prendront une infinité de valeurs différentes et, si le graphe est progressivement fini, il se terminera tôt ou tard sur un sommet $x_p \in \{a\}$, ce qui contredit de la même forme, le résultat obtenu plus haut.

De cette façon nous avons montré que, quand n varie, les fonctions φ_n prennent dans tous les sommets du graphe un nombre fini de valeurs différentes; donc leurs restrictions à un ensemble fini sont, elles aussi, en nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, Claude. *Théorie des Graphes et ses applications*. Dunod. Paris (1ère. ed. 1958, 2ème ed. 1963).

Sobre uma Demonstração simples do Lema de Zorn

por J. Marques Henriques

As três proposições que a seguir enunciamos, o Axioma da Escolha (AE), o Lema de Zorn (LZ) e o Teorema da Boa Ordenação (BO), são equivalentes, ou seja, tomando como base uma delas, podem a partir desta demonstrar-se as outras duas.

Em todo este artigo utilizaremos as notações, definições e enunciados que se encontram na obra citada em [3]. E posto isto, passemos aos respectivos enunciados:

(AE) Dado um conjunto não vazio, $M \neq \emptyset$, seja $\mathfrak{P}(M)^* := \mathfrak{P}(M) - \{\emptyset\}$, onde $\mathfrak{P}(M)$ designa o conjunto-potência de M. Então existe uma aplicação f, de $\mathfrak{P}(M)^*$ em M, tal que para todo o conjunto U (não vazio) de $\mathfrak{P}(M)^*$, se tem: $f(U) \in U$ (Zermelo). Em símbolos:

$$\bigvee_f (f: \mathfrak{P}(M)^* \to M) \wedge \bigwedge_{U \in \mathfrak{P}(M)^*} (f(U) \in U).$$

À aplicação f chama-se usualmente *função de escolha*.

(LZ) Seja M um conjunto (totalmente) ordenado e não vazio, tal que todas as cadeias