Si les fonctions φ_n prennent sur x_0, quand n varie, une infinité de valeurs différentes, il y aura parmi les descendants de x_0, un au moins, soit x_1, où les fonctions φ_n prendront aussi une infinité de valeurs différentes.

En effet, s'il n'existait pas un point dans ces conditions, l'ensemble $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ des valeurs prises par les φ_n dans Γx_0 serait un ensemble fini; donc la réunion des ensembles $E(J) - J$ représentant un sous-ensemble quelconque de $\bigcup_n \varphi_n(\Gamma x_0)$ — serait, elle aussi, finie. Et puisqu'on a $\bigcup_n \varphi_n(x_0) \subset \subset \bigcup_n E[\varphi_n(\Gamma x_0)] \subset \bigcup E(J)$, le nombre des valeurs différentes prises par les fonctions φ_n sur x_0 ne pourrait pas être infini.

Considérons donc le point x_1 ainsi obtenu. On ne pourra pas avoir $x_1 \in \{a\}$ car cela contredit le résultat déjà obtenu pour les sommets de $\{a\}$. Mais si $x_1 \notin \{a\}$, nous raisonnerons pour x_1 d'une façon semblable à celle que nous avons utilisée pour x_0 et nous obtiendrons $x_2 \in \Gamma x_1$. Nous pourrons construire un chemin $[x_0, x_1, x_2, \cdots]$ sur les sommets duquel les fonctions φ_n prendront une infinité de valeurs différentes et, si le graphe est progressivement fini, il se terminera tôt ou tard sur un sommet $x_p \in \{a\}$, ce qui contredit de la même forme, le résultat obtenu plus haut.

De cette façon nous avons montré que, quand n varie, les fonctions φ_n prennent dans tous les sommets du graphe un nombre fini de valeurs différentes; donc leurs restrictions à un ensemble fini sont, elles aussi, en nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, Claude. *Théorie des Graphes et ses applications*. Dunod. Paris (1ère. ed. 1958, 2ème ed. 1963).

Sobre uma Demonstração simples do Lema de Zorn

por J. Marques Henriques

As três proposições que a seguir enunciamos, o Axioma da Escolha (AE), o Lema de Zorn (LZ) e o Teorema da Boa Ordenação (BO), são equivalentes, ou seja, tomando como base uma delas, podem a partir desta demonstrar-se as outras duas.

Em todo este artigo utilizaremos as notações, definições e enunciados que se encontram na obra citada em [3]. E posto isto, passemos aos respectivos enunciados:

(AE) Dado um conjunto não vazio, $M \neq \emptyset$, seja $\mathfrak{P}(M)^* := \mathfrak{P}(M) - \{\emptyset\}$, onde $\mathfrak{P}(M)$ designa o conjunto-potência de M. Então existe uma aplicação f, de $\mathfrak{P}(M)^*$ em M, tal que para todo o conjunto U (não vazio) de $\mathfrak{P}(M)^*$, se tem: $f(U) \in U$ (Zermelo). Em símbolos:

$$\bigvee_f (f : \mathfrak{P}(M)^* \to M) \wedge \bigwedge_{U \in \mathfrak{P}(M)^*} (f(U) \in U).$$

À aplicação f chama-se usualmente *função de escolha*.

(LZ) Seja M um conjunto (totalmente) ordenado e não vazio, tal que todas as cadeias

(i. e. sub-conjuntos totalmente ordenados) possuem majorante. Então M possui um elemento máximo.

(BO) Qualquer conjunto pode tornar-se bem ordenado (1).

Se do enunciado de (AE) parece deduzir-se ser o mesmo intuitivo, basta o facto de se demonstrarem as equivalências entre as três proposições, para se concluir da complexidade de cada uma delas, a julgar pela complexidade de (LZ) e de (BO).

Zermelo (1904) demonstrou a implicação (AE) $\Rightarrow$ (BO). Nos tratados modernos da especialidade é vulgar, no entanto, encontrarem-se as demonstrações feitas na ordem seguinte:

$$(AE) \Rightarrow (LZ) \Rightarrow (BO) \Rightarrow (AE).$$

Em [3], Steiner demonstra (LZ) $\Rightarrow$ (BO) e (BO) $\Rightarrow$ (AE), deixando, pela sua maior dificuldade, a terceira demonstração em aberto. (LZ) é uma proposição de importância extraordinária em várias disciplinas da Matemática, e muito especialmente na Álgebra. Apenas para referir alguns dos teoremas que se demonstram a partir de (LZ), citaremos os os seguintes:

— num anel comutativo com unidade, todo o ideal distinto do anel está contido num ideal máximo;

— todo o espaço vectorial possui uma base;

— o teorema de Steinitz, relativo aos corpos.

Neste artigo vamos demonstrar, a título de simples exercício, a implicação (AE) $\Rightarrow$ (LZ).

Para isso, provaremos com base em (AE) um lema intermediário, e deste derivaremos finalmente (LZ). Antes disso, porém, vamos fazer algumas considerações, que nos serão de grande utilidade na primeira das demonstrações.

Def.: *Cadeia máxima* em M é cadeia em M que relativamente à inclusão de conjuntos não é parte própria de nenhuma outra cadeia em M.

Como para qualquer cadeia K em M se tem $K \subset M$, segue-se que *qualquer conjunto* $\mathfrak{K}$ *de cadeias em* M *é elemento de* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$. Num tal conjunto $\mathfrak{K}$ introduziremos uma ordenação mediante a vulgar inclusão de conjuntos:

$$K_1, K_2 \in \mathfrak{K}: \quad K_1 \sqsubseteq K_2 : \Longleftrightarrow K_1 \subset K_2 .$$

No que se segue chamaremos a qualquer cadeia num conjunto $\mathfrak{K}$ (de cadeias em M) *cadeia total* (para assim individualizarmos as cadeias em $\mathfrak{K}$ das cadeias em M).

E, posto isto, passemos à demonstração do

Lema Auxiliar (LA). Toda a cadeia em M (conjunto que satisfaz à hipótese de (LZ)) está contida numa cadeia máxima.

Dem.: Vamos fazer a demonstração por redução ao absurdo, provando que não é possível a existência duma cadeia que não satisfaça (LA). Seja K_0 uma tal cadeia.

1. Seja K uma outra cadeia em M tal que $K_0 \subset K$. Uma tal cadeia existe sempre, pois que por hipótese K_0 não é cadeia máxima, pois se tem sempre $K_0 \subset K_0$. Do mesmo modo K não é cadeia máxima, pois se o fosse, o lema estaria automàticamente demonstrado. Formemos então o sub-conjunto de M:

(1) Em [1], Almeida Costa demonstra (BO) no caso particular de um conjunto não vazio de números naturais, baseando-se apenas nos axiomas de Peano, e usando a ordenação $<$, assim definida:

$$a, b \in \mathbf{N}: \quad a < b : \Longleftrightarrow \bigvee_{c \in \mathbf{N}} (a = b + c).$$

$M_K := \{m \mid m \in M \wedge m \notin K \wedge K \cup \{m\}$ cadeia em $M\}$.

Como K não é cadeia máxima, segue-se que $M_K \neq \phi$. Introduzamos agora uma função de escolha, $f : \mathfrak{P}(M)^* \to M$, nos termos de (AE). De $M_K \subset M \wedge M_K \neq \phi \Rightarrow f(M_K) \in M_K$. E, como se tem (da def. de M_K) $K \cap M_K = \phi$, é igualmente $K \cap \{f(M_K)\} = \phi$.

Deste modo definimos um conjunto $K' := K \cup \{f(M_K)\}$, a que chamaremos o *sucessor* de K. Da def. de K' resultam imediatamente as seguintes propriedades do sucessor de K:

$$K \subset K'\,;\quad K \neq K'\,;\quad K' \text{ é cadeia em } M.$$

2. Consideremos agora o conjunto $\mathfrak{K}^*$ de todas as cadeias K em M, tais que $K_0 \subset K$, onde K_0 é a cadeia fixa que acima consideramos (por não estar contida em cadeia máxima em M).

Def.: Um conjunto $\mathfrak{K}$ de cadeias em M é fechado $:\Leftrightarrow$

(i) $K_0 \in \mathfrak{K}$;

(ii) $K \in \mathfrak{K} \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}$;

(iii) Sendo $\mathfrak{T}$ cadeia total em $\mathfrak{K} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K} \wedge \bigcup \mathfrak{T}$ cadeia total em $\mathfrak{K}$ [1].

Posto isto, verifiquemos que *o conjunto* $\mathfrak{K}^*$, *que acima definimos como:*

$$\mathfrak{K}^* := \{K \mid K \text{ cadeia em } M \wedge K_0 \subset K\},$$

é fechado. De facto, as três condições da def. são de verificação imediata:

(i) $K_0 \subset K_0 \Rightarrow K_0 \in \mathfrak{K}^* \wedge \mathfrak{K}^* \neq \phi$;

(ii) $K \in \mathfrak{K}^* \Rightarrow K_0 \subset K \Rightarrow K_0 \subset K' = K \cup \{f(M_K)\} \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}^*$;

(iii) Seja agora $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{K}^*$. Então é válida a implicação

$$\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (K_0 \subset T) \Rightarrow K_0 \subset \bigcup \mathfrak{T}$$

e daqui se conclui que $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}^*$; resta-nos demonstrar que $\bigcup \mathfrak{T}$ é de novo uma cadeia total em $\mathfrak{K}^*$:

$$\bigcup \mathfrak{T} \ni x, y \Rightarrow \bigvee_{T_1, T_2 \in \mathfrak{T}} (x \in T_1 \wedge y \in T_2)$$

e como $\mathfrak{T}$ é cadeia total, tem-se:

$$T_1 \subset T_2 \vee T_2 \subset T_1 .$$

Como os dois casos são simétricos (por simples troca de índices), suponhamos que se tem $T_1 \subset T_2$. Então é $x, y \in T_2$. Mas como T_2 é por sua vez cadeia (em M) $\Rightarrow x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$. E daqui se conclui que $\bigcup \mathfrak{T}$ é uma cadeia e, como por def. de $\mathfrak{K}^*$ (ver acima), $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{K}^*$, como pretendíamos verificar.

Vamos agora mostrar que *a intersecção de todos os conjuntos (de cadeias) fechados é de novo um conjunto (de cadeias) fechado.*

Designemos esta intersecção por $\mathfrak{S}$. Então é $\mathfrak{S} := \bigcap \mathfrak{K}$.

(i) Como $K_0 \in \mathfrak{K}$ para qualquer $\mathfrak{K}$ fechado $\Rightarrow K_0 \in \mathfrak{S}$;

(ii) $K \in \mathfrak{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (K \in \mathfrak{K})$, com $\mathfrak{K}$ fechado $\Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (K' \in \mathfrak{K}) \Rightarrow K' \in \mathfrak{S}$;

(iii) Seja $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{T} \subset \mathfrak{K})$ e como $\mathfrak{K}$ é fechado $\Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}$ para todos os $\mathfrak{K} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{S}$, e tal como em $\mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é conjunto totalmente ordenado, como pretendíamos mostrar.

---

[1] Esta def. de conjunto (de cadeias) fechado refere-se, evidentemente, às propriedades (i)-(iii) e não tem qualquer parentesco com a noção topológica de conjunto fechado.

Desta demonstração conclui-se ainda que é válida a implicação: $\mathfrak{K}$ conjunto fechado $\Rightarrow \mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$.

3. Def.: Chamaremos a $K_N \in \mathfrak{S}$ *(cadeia) normal* $:\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{S}} (K \subset K_N \vee K_N \subset K).$$

Por hipótese é e. g. K_0 uma cadeia normal, pois tem-se: $\bigwedge_{K \in \mathfrak{S}} (K_0 \subset K)$.

Dada K_N normal, designaremos por $\mathfrak{K}_N$ o conjunto

$$\mathfrak{K}_N := \{K \mid K \in \mathfrak{S} \wedge (K \subset K_N \vee K'_N \subset K)\}.$$

Da def. de $\mathfrak{K}_N$ tira-se que K_N pertence a $\mathfrak{K}_N$ e $\mathfrak{K}_N \subset \mathfrak{S}$. Verifiquemos que *o conjunto $\mathfrak{K}_N$ é fechado, qualquer que seja a cadeia normal K_N*.

(*i*) $K_0 \in \mathfrak{K}_N$, qualquer que seja K_N, pois K_0 é normal e $K_0 \subset K_N$;

(*ii*) Seja $K \in \mathfrak{K}_N$. Pretende-se mostrar que $K'_N \in \mathfrak{K}_N$. De $K \in \mathfrak{K}_N$ tira-se:

$$K''_N \subset K \vee K \subset K_N;$$

— se $K'_N \subset K \Rightarrow K'_N \subset K' \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}_N$;
— se $K \subset K_N$, vamos considerar duas hipóteses:

1.º $K' \subset K_N$ e então $K' \in \mathfrak{K}_N$;
2.º $K' \not\subset K_N$. Como K_N é normal

$$\Rightarrow K_N \subset K' \Rightarrow K \subset K_N \subset K'.$$

Mas como K' apenas contém mais um elemento do que K, deve ter-se:

$$K = K_N \vee K_N = K'.$$

Por ser $K' \not\subset K_N$ não pode ser $K_N = K'$, pelo que é forçosamente $K = K_N \Rightarrow K' = K'_N \Rightarrow K' \supset K'_N \Rightarrow K' \in \mathfrak{K}_N$;

(*iii*) Seja finalmente $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{K}_N$.

Ainda aqui vamos distinguir dois casos:

1.º $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (T \subset K_N) \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \subset K_N \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}_N$;

2.º $\bigvee_{T \in \mathfrak{T}} (T \not\subset K_N) \Rightarrow K'_N \subset T \Rightarrow K'_N \subset \bigcup \mathfrak{T}$
$\Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{K}_N$

e $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{K}_N$ (tal como em 2., no caso de $\mathfrak{K}^*$), como pretendíamos verificar.

Do que acima expusemos, concluímos que:
$\mathfrak{K}_N \subset \mathfrak{S}$, por def. de $\mathfrak{K}_N$, e
$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}_N$, por ser $\mathfrak{S} = \bigcap \mathfrak{K}$, com $\mathfrak{K}$ fechado.
Logo é: $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_N$.

4. Designemos por $\mathfrak{N}$ *o conjunto de todas as cadeias normais, tais que $K_N \in \mathfrak{S}$*. Vamos também aqui mostrar que $\mathfrak{N}$ *é conjunto fechado:*

(*i*) $K_0 \in \mathfrak{N}$;

(*ii*) Se $K_N \in \mathfrak{N}$, tomemos uma cadeia arbitrária $K \in \mathfrak{S}$ tal que $K \not\subset K'_N \Rightarrow K \not\subset K_N \Rightarrow K'_N \subset K$, pois que $\mathfrak{K}_N = \mathfrak{S}$, e da def. de $\mathfrak{K}_N \Rightarrow K'_N$ é cadeia normal e portanto $K'_N \in \mathfrak{N}$;

(*iii*) Seja, finalmente, $\mathfrak{T}$ uma cadeia total em $\mathfrak{N} \wedge K \in \mathfrak{S}$. Mais uma vez vamos distinguir dois casos:

1.º $\bigwedge_{T \in \mathfrak{T}} (T \subset K) \Rightarrow \bigcup \mathfrak{T} \subset K$;

2.º $\bigvee_{T \in \mathfrak{T}} (T \not\subset K)$, e neste caso como $\mathfrak{T}$ é cadeia normal (da def. de $\mathfrak{N}$) $\Rightarrow K \subset T \Rightarrow K \subset \bigcup \mathfrak{T}$;

dos dois casos possíveis tira-se que $\bigcup \mathfrak{T} \in \mathfrak{N}$ e tal como em 2., no caso de $\mathfrak{K}^*$, $\bigcup \mathfrak{T}$ é cadeia total em $\mathfrak{N}$, como pretendíamos mostrar.

Uma consequência importante do facto de $\mathfrak{N}$ ser conjunto fechado é que $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, ou seja: $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_N$. Vejamos agora que: $\mathfrak{N}$ *é um conjunto totalmente ordenado* (relativamente à ordenação «inclusão de conjuntos»). De facto, tem-se:

$$K_{N_1}, \ K_{N_2} \in \mathfrak{N} \Rightarrow K_{N_1} \subset K_{N_2} \vee K_{N_2} \subset K_{N_1},$$

como consequência imediata da def. de cadeia normal K_N.

5. Como $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ é conjunto totalmente ordenado e fechado, a união de todos os conjuntos de $\mathfrak{G}$ é elemento de $\mathfrak{G}$:

$$G := \bigcup \mathfrak{G} \in \mathfrak{G}.$$

Mas, como $\mathfrak{G}$ é fechado $\Rightarrow G' \in \mathfrak{G} \Rightarrow$ $\Rightarrow G' \subset \bigcup \mathfrak{G} = G$. Devido ao facto de ser $G \subset G'$, da def. de G' e também de ser $G \neq G'$ (em 1.) $\Rightarrow G = G' \wedge G \neq G'$. E eis o absurdo a que fomos levados por aceitar a existência duma cadeia K_0 em M que não está contida numa cadeia máxima em M. Logo, (LA) está completamente demonstrado.

Finalmente, demonstremos (LZ) a partir deste (LA): (LA)$\Rightarrow$(LZ).

Dem.: Como por hipótese M é conjunto não vazio, existe um $m \in M$ e portanto $\{m\}$ é cadeia em M, uma vez que $m \sqsubseteq m$. Agora, utilizando (LA) concluímos que $\{m\}$ está contida numa cadeia máxima K, pelo que $m \in K$.

Mas, por hipótese (v. enunciado de (LZ)), K possui um majorante $b \in M$, ou seja, para todos os $k \in K$ é $k \sqsubseteq b$, o que escreveremos abreviadamente, pondo $K \sqsubseteq b$. Resta-nos mostrar que este elemento $b \in M$ é elemento máximo em M. Ainda aqui vamos partir da hipótese contrária, e verificar que se b não fosse elemento máximo em M, isso conduziria a um absurdo.

Se b não é elemento máximo em M, então, por def. de elemento máximo, existe um elemento $b_1 \in M$ tal que se verifica: $b \sqsubseteq b_1 \wedge b \neq b_1$. Ora, b_1 não pode ser elemento da cadeia K, pois que de $b_1 \in K$ se concluiria que $b_1 \sqsubseteq b$, o que, conjuntamente com $b \sqsubseteq b_1$ teria como consequência $b = b_1$. É pois $b_1 \notin K$.

Formemos então o conjunto união de K com b_1: $K^* := K \cup \{b_1\}$. De $b_1 \notin K$ tem-se $K \subset K^*$, com $K \neq K^*$. Como K é cadeia em M, tendo b como majorante e $b \sqsubseteq b_1$, é para todos os $k \in K$:

$$k \sqsubseteq b \sqsubseteq b_1 \Rightarrow k \sqsubseteq b_1.$$

Ora, isto é precisamente a afirmação de que K^* é cadeia em M, o que arrasta a um absurdo, uma vez que por hipótese K é cadeia máxima em M. Logo, a hipótese que havíamos formulado de b não ser elemento máximo em M é falsa, e deste modo o Lema de Zorn está completamente demonstrado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Almeida Costa, A., *Elementos de Algebra Linear e Geometria Linear*, Lisboa, (1958).

[2] Kowalski, H. J., *Lineare Algebra*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1963).

[3] Steiner, H.-G., Mengen-Abbildungen-Strukturen, in: *Das Fischer Lexikon 29: Mathematik I*, Frankfurt/M, (1964).