Regras para estratégias mistas de jogos matriciais «2x2»

por Ruy Madsen Barbosa

O pequeno artigo, que apresentamos, leva por intuito aquele de *propagar*, *melhorar e ampliar*, uma regra prática que encontramos na obra de WILLIAMS (ver bib.), referente a jogos matriciais «2×2», para determinação de estratégias ótimas.

Apresentamos, portanto, como contribuição:

1. A demonstração baseada no conceito de esperança matemática de uma matriz;
2. A ampliação da regra à determinação do valor do jogo.

Será interessante observar que WILLIAMS efectua as diferenças em linha, ou em coluna, sem se preocupar com a ordem alternada nas duas subtrações, o que não influi para efeito de cálculo, sòmente das estratégias ótimas; mas sim, na ampliação que fizemos à regra.

Como preliminar à apresentação específica dos resultados, acrescentamos inicialmente alguns dados genéricos sobre o conceito de jogos matriciais para o entendimento da exposição.

Dados gerais sobre o jogo matricial:

De uma maneira geral, podemos dizer resumida e elementarmente, que num jogo de soma nula (*) a dois parceiros P_1 e P_2:

1. P_1 escolhe um ponto $x \in E$ e P_2 escolhe um ponto $y \in F$.
2. As regras iniciais do jogo permanecem após cada escolha.
3. As regras determinam que P_1 receba do parceiro P_2 um total dependente do par $(x; y) \in E \times F$; isto é, uma aplicação f de $(x; y)$ no conjunto dos reais.
4. A aplicação $f(x; y)$ é denominada *função de pagamento*. Assim, se $f(x; y) < 0$, P_2 recebe de P_1 o pagamento $|f(x; y)|$.

Em particular se $E = \{1, 2, 3, \cdots m\}$ e $F = \{1, 2, 3, \cdots n\}$ com $f(i; j) = a_{ij}$; a função de pagamento assume valores de uma matriz retangular $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Neste caso o jogo é denominado *matricial*, e a matriz A é chamada *matriz de pagamento* (ou matriz de jogo).

Os elementos dos conjuntos E e F são chamados *estratégias puras* de P_1 e P_2, respectivamente.

Exemplos:

1. Para esclarecimento do leitor o «jogo de mesma paridade» (com dois dedos), é um exemplo simples de jogo matricial «2×2»:

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ & \begin{array}{cc} (1) & (2) \end{array} \\ P_1 \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(*) A soma dos recebimentos dos parceiros é nula, considerando negativo os pagamentos.

onde, a apresentação, por exemplo, por P_1 de um (1) dedo e por P_2 de dois (2) dedos (paridades diferentes), conduz à obrigatoriedade do primeiro parceiro pagar uma unidade monetária (— 1) ao segundo parceiro, etc.

2. O «jogo de mesma paridade» pode ser assente em outra matriz de pagamento, por exemplo na seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os exemplos escolhidos permitirão ao leitor não inferir que a matriz de pagamento se baseia na probabilidade dos eventos; e, sim, o oposto, a escolha dos eventos está baseada na matriz.

É claro que o parceito P_1 procura eleger o elemento que corresponda à linha «i», desde que assegure para si pelo menos o ganho:

$$\min_j a_{ij}$$

mas, evidentemente a eleição de «i» foi feita para que $\min a_{ij}$ tenha sido o maior possível; assim, P_1 deverá ter escolhido «i» para garantir o ganho de pelo menos:

$$\boxed{\max_i \min_j a_{ij}}$$

A estratégia «i» é então denominada maximinizante, ou simplesmente maximin.

Reciprocamente, para o parceiro P_2, como a matriz deve ser considerada com sinais trocados, deverá eleger o elemento que corresponda à coluna «j», de maneira que tenha assegurado o ganho de pelo menos

$$\max_j \min_i (-a_{ij})$$

que é igual a:

$$-\min_j \max_i a_{ij}$$

ou ainda, que P_2, jogue «j», não permitindo que P_1 ganhe mais que:

$$\boxed{\min_j \max_i a_{ij}}$$

A estratégia «j» é então chamada minimaximizante, ou simplesmente minimax.

Quando se verificar a igualdade do mínimo que P_1 assegurou para si com o máximo que P_2 lhe permite ganhar, a matríz evidentemente conterá um par $(r ; s)$ cujo valor é simultâneamente mínimo da linha r e máximo da coluna s; ao qual denomina-se de *ponto de sela*.

A matriz de pagamento, abaixo, possui o ponto de sela $(1;1)$, de valor 3; portanto, se P_1 eleger 1, assegura para si pelo menos o ganho 3; enquanto que P_2 deverá escolher 1 para assegurar que P_1 não ganhe mais que 3.

As matrizes podem admitir mais de um ponto de sela, ou mesmo não admitir ponto de sela, como são os casos dos exemplos 1) e 2). Em qualquer caso P_1 precisa procurar fazer eleições, sem que P_2 o perceba, de tal modo que após um bom número de jogadas tenha assegurado o maior ganho possível.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

O parceiro P_1 não deverá, em qualquer dos exemplos dados 1. e 2. colocar, continuadamente, por exemplo, dois dedos; pois, se P_2 o percebe, evidentemente colocará um dedo.

Idem, se P_1 colocar continuadamente um dedo, pois então, P_2 colocará dois dedos.

O parceiro P_1, bem como P_2, deverão adotar um sistema alternado de eleições, que lhes sejam favoráveis após um bom número de jogadas, sem que o adversário tenha elementos para descobrir a sua futura escôlha. Disto resulta que os parceiros deverão escolher uma *estratégia mista ótima*, cuja frequência das eleições seja dada por um critério probabilístico.

Genèricamente, P_1 adota uma estratégia mista $X=[x_1, x_2, \cdots x_m]$ (*), e P_2 adota a estratégia mista $Y=[y_1, y_2, \cdots y_n]$ (*), às quais acrescentamos as restrições:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

que facilitam as interpretações como frequências relativas.

A esperança matemática de P_1, do valor v do jôgo, para as estratégias X e Y é dada por:

$$E[(X;Y)] = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} P[v = a_{ij}] = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} x_i y_j$$

Caso X_1 e Y_1 sejam estratégias mistas ótimas teremos:

$$E[(X;Y_1)] \leqq E[(X_1;Y_1)] \leqq E[(X_1;Y)]$$

e, ao par $(X_1;Y_1)$ denominamos *ponto de sela estratégico*, e, a sua esperança matemática correspondente: *valôr do jôgo* de P_1

Para não nos afastarmos mais em considerações teóricas gerais passaremos imediatamente ao estudo do problema particular matricial «2×2».

(*) Vetores de espaços de m e n dimensões; vetores estratégias mistas.

Jôgo matricial «2×2»:

Seja a matriz de pagamento:

$$\begin{array}{cc} & P_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

Sejam as estratégias mistas:

$$\begin{cases} X = [x_1, x_2] \\ Y = [y_1, y_2] \end{cases}$$

que, pelas restrições, poderão ser escritas:

$$\begin{cases} X = [x, 1-x] \\ Y = [y, 1-y] \end{cases}$$

Temos a esperança matemática:

$$E[(X;Y)] = a\,x\,y + b\,x(1-y) + c\,y(1-x) + \\ + d(1-x)(1-y)$$

$$E[(X;Y)] = [(a-b)+(d-c)] \times \\ \times \left[x - \frac{d-c}{(a-b)+(d-c)}\right] \times \\ \times \left[y - \frac{d-b}{(a-b)+(d-c)}\right] - \\ - \frac{(d-c)(d-b)}{(a-b)+(d-c)} + d$$

ou $E[(X;Y)] = S(x-m)(y-n) + K$,

$$\text{com } K = \frac{a\,d - b\,c}{S}$$

Caso possa assumir P_1 a estratégia $x = m$ (*), poderá assegurar que sua esperança será K,

(*) Não havendo ponto de sela.

independente da eleição de P_2:

$$E[(X_1; Y)] = K$$

Anàlogamente, P_2, caso possa assumir a estratégia $y = n$, poderá assegurar que sua esperança matemática será $-K$; ou que, P_1 ganhará só K; independente da eleição de P_1:

$$E[(X; Y_1)] = K$$

de onde fàcilmente, concluimos que a estratégia mista ótima de cada parceiro é:

$$\text{Para } P_1: \quad X = \left[\frac{d-c}{S}, \frac{a-b}{S}\right]$$

$$\text{Para } P_2: \quad Y = \left[\frac{d-b}{S}, \frac{a-c}{S}\right]$$

que fornecem as regras práticas.

Estratégia ótima para P_1: Calcula-se as diferenças em linhas, alternadas, e obtém-se os numeradores trocados das frequências relativas de (1) e (2).

Estratégia ótima para P_2: Calcula-se as diferenças em coluna, alternadas, e obtém-se os numeradores trocados das frequências relativas de (1) e (2).

Valor do Jogo: Observando-se que: $S = [(a-b) + (d-c)]$ ou $[(a-c) + (d-b)]$ temos:

O valor do jôgo é o quociente do determinante da matriz de pagamento, pela soma das diferenças alternadas, em linha, ou em coluna.

Exemplo:

Seja a matriz de pagamento: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Esquema prático:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & \longrightarrow 5 \\ -1 & 2 & \longrightarrow 3 \\ \hline -2 & \longrightarrow & 6 \;=4 \\ \hline 4 & 4 & 8 \end{array}$$

Estratégias ótimas:

$$P_1 \begin{cases} (1) \text{ com frequência rel. } 3/8 \\ (2) \text{ com frequência rel. } 5/8 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} (1) \text{ com frequência rel. } 4/8 = 1/2 \\ (2) \text{ com frequência rel. } 4/8 = 1/2 \end{cases}$$

Valor do Jôgo: $K = 4/8 = 1/2$, isto é, adotando a estratégia $[3/8, 5/8]$, P_1 pode assegurar para si, após um grande número de jogadas, pelo menos um ganho de 1/2 unidade monetária em média por jogada, independente do parceiro adversário. O parceiro P_2 deverá adotar a estratégia $[1/2, 1/2]$ para assegurar que P_1 não ganhe mais do que 1/2 unidade monetária em média por jogada.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERGE, C. et A. GHOUILA-HOURI, *Programmes, jeux et réseaux de transport* Paris – Dunod, 1962.

[2] MANZOLI, F. FAUSTO, *Relações entre o Problema dos Momentos e a Teoria dos Jogos Estratégicos — Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da U. S. P.*, S. Paulo, 1959.

[3] MCKINSEY *Introduccion a la teoria matematica de los juegos* (trad. da Nigar), Madrid, 1960.

[4] SAATY, THOMAS L., *Mathematical Methods of Operations Research*, N. Y. McGraw-Hill Book Co, 1959.

[5] VAJDA, S. *An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games*, London, Methuen & Co, 1960.

[6] WILLIAMS, J. D., *The Compleat Strategyst*, N. Y., McGraw-Hill Book Co, 1954.