2. 7. Quantidade, categoria e campo

Em relação às quantidades distinguem-se as categorias seguintes: variáveis simples, tabelas, etiquetas e procedimentos.

O campo de uma quantidade é o conjunto das instruções e expressões nas quais é válida a declaração do identificador associado a esta quantidade. Para as etiquetas consulte *4. 1. 3.*

2. 8. Valores e tipos

Um valor é um conjunto ordenado de números (caso particular: um único número), um conjunto ordenado de valores lógicos (caso particular: um único valor lógico) ou uma etiqueta.

Certas unidades sintáticas possuem valores. Em geral estes valores variam ao longo da execução do problema. Os valores das expressões e das suas componentes são definidas na secção 3. O valor de um identificador de tabela é o conjunto ordenado dos valores da tabela correspondente das variáveis com índice (cf. 3. 1. 4. 1).

Os diversos tipos (*integer, real, Boolean*) representam as propriedades fundamentais destes valores. Os tipos associados às unidades sintáticas correspondem aos valores destas unidades. *(Continua)*

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 1 — 8-6-1964.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 1, 1', e os problemas 2, 3, 4, 5. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa, em particular nas demonstrações pedidas no problema 1 (ou 1').

5614 — 1) Sejam A e B duas partes majoradas de R, tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Mostre que $\sup (A \cap B) \leqslant \inf \{\sup A,\ \sup B\}$. Dê dois exemplos, num dos quais se verifique a igualdade e no outro a desigualdade estricta.

1') Sejam $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{F}(A, R)$ e $a \in A$. Indicámos no curso duas condições equivalentes à da continuidade de f em a.
Enuncie uma delas e demonstre essa equivalência.

2) Considere as funções

$$f : R \to R \qquad \text{e} \qquad g : R^+ - \{0, 1\} \to R$$
$$x \to x \cdot |x| \qquad\qquad x \to x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

a) Determine as funções derivadas de f e de g (não esquecendo a indicação dos domínios respectivos). Justifique.

b) Verifique que pode compor g com f; seja $h = f \circ g$. Calcule $h'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)$ e $h'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)$. (Sugestão: aplique o teorema de derivação de uma função composta, nos pontos adequados e utilize a alínea *a*)).

c) Diga se f é estrictamente monótona, justificando a resposta.

3) Dada a família de séries abelianas

$$\left(\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-a\,n^2 - 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n x^n\right)_{a \in R^+},$$

determine, para cada $a \in R^+$, $(R^+ = \{x \in R ; 0 \leqslant x\})$,

a) o raio de convergência r_a da série;

b) o domínio de convergência D_a da série. Justifique.

4) (*Nota:* supõe-se ortonormado o referencial $(0, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ utilizado nas alíneas seguintes).

a) Dada a recta r de equações $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

e a família de rectas $(r_{(a,b)})_{(a,b)\in R^2}$, tal que, para todo o $(a,b)\in R^2$, $r_{(a,b)}$ tem por equações $\begin{cases} y+z=a \\ z=b \end{cases}$, determine o conjunto

$$A=\{(a,b)\in R^2;\ r_{(a,b)} \text{ intersecta } r\}.$$

b) $s=r_{(1,0)}$ é uma recta da família anterior que intersecta r num ponto P; determine as coordenadas de vectores unitários $\overline{u}$ e $\overline{v}$, com as direcções, respectivamente, de r e s. Escreva equações paramétricas das bissectrizes dos ângulos de r com s (começando por determinar dois vectores com as direcções dessas bissectrizes, a partir dos vectores unitários $\overline{u}$ e $\overline{v}$) e verifique que estas bissectrizes são perpendiculares entre si.

c) Indique equações paramétricas do plano que contém r e s, escolhendo para tal dois vectores perpendiculares entre si.

5) Sejam E um espaço vectorial real, (e_1, e_2, e_3) uma base de E e

$$f: E \to E,\ ((a,b,c)\in R^3),$$
$$(a e_1 + b e_2 + c e_3) \to 4 c e_3.$$

a) Mostre que $E' = f^{-1}(\{0\})$ é um sub-espaço vectorial, com dimensão 2, de E.

b) Se S é a relação de equivalência sobre E associada a f (i. e. $x S y \leftrightarrow f(x)=f(y)$), mostre que as operações $R\times E\to E$ e $E\times E\to E$ «passam ao quociente» por S, ficando assim definidas sobre $\overline{E}=E/S$ operações que lhe conferem uma estrutura de espaço vectorial real. (Dispensa-se a verificação das respectivas propriedades).

c) Mostre que $\dim \overline{E}=1$, verificando a injectividade de $\overline{f}$ e estudando $\overline{f}(\overline{E})$ e $\overline{f}$. ($\overline{f}:\overline{E}\to E$ é a aplicação quociente de f).

Resolução do exame 1

1) *Suponhamos* $\sup A \leqslant \sup B$ *e, portanto,* $\sup A = \inf\{\sup A, \sup B\}$. $\sup A$, *como majorante de* A, *é majorante de* $A\cap B\subset A$. *Logo, é maior ou igual a* $\sup(A\cap B)$, *que, por definição, é o «primeiro» dos majorantes de* $A\cap B$. (Obs. — *Se* $\sup B\leqslant \sup A$ *o raciocínio é idêntico).*

Exemplos:

I) $A=\{1,3\}$ *e* $B=\{3\}$;
$\sup(A\cap B) = \inf\{\sup A, \sup B\} = 3$.

II) $A=\{1,3\}$ *e* $B=\{1,2\}$;
$1=\sup(A\cap B) < \inf\{\sup A, \sup B\}=2$.

1') *(Ver apontamentos das aulas teóricas).*

2) a) I) *No intervalo aberto* $]0,+\infty[$ $f(x)=x^2$, f *é derivável e* $f'(x)=2x$; *no intervalo aberto* $]-\infty,0[$ $f(x)=x\cdot(-x)=-x^2$, f *é derivável e* $f'(x)=-2x$. *Calculando a derivada de* f *no ponto* 0, *a partir da definição, teremos*

$$f'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\frac{x\cdot|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}}|x|=0.$$

R: *A função derivada de* f *é:* $f': R\to R$
$x\to 2|x|$.

II) *A função derivada de* g *é:*

$$g': R^+-\{0,1\}\to R$$
$$x\to sen\left(\frac{1}{\log x}\right)+x\cdot\cos\left(\frac{1}{\log x}\right)\cdot \cdot\frac{-1}{\log^2 x}\cdot\frac{1}{x}.$$

(Justificação: Aplicaram-se as regras de derivação de um produto e de um quociente de funções deriváveis, e ainda a de «derivação de função composta» à composta de

$$R^+-\{0,1\}\to R \qquad R-\{0\}\to R$$
$$x\to \log x \quad com \quad x\to\frac{1}{x}$$

e à de

$$\left. \begin{matrix} R^+-\{0,1\}\to R \\ x\to\dfrac{1}{\log x}\end{matrix} \quad com \quad \begin{matrix} R\to R \\ x\to sen\,x\end{matrix}\right).$$

b) *Pode compor-se* g *com* f, *porque o domínio de* f — R — *contém o contradomínio de* g.

$$h'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)=f'\left(g\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)\right)\cdot g'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)=0,$$

porque

$$f'\left(g\left(e^{\frac{1}{\pi}}\right)\right)=f'\left(e^{\frac{1}{\pi}}\cdot sen\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\right)=f'(0)=0.$$

$$h'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)=f'\left(g\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)\right)\cdot g'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\right)=$$
$$=f'\left(e^{\frac{2}{3\pi}}\cdot(-1)\right)\cdot(-1)=-2\left|e^{\frac{2}{3\pi}}\cdot(-1)\right|=-2^{\frac{2}{3\pi}}$$

c) f *é estrictamente crescente. Com efeito:*

I) f *e estrictamente crescente em cada ponto* x *do seu domínio: se* $x\neq 0$ *por* $f'(x)=2|x|$ *ser maior que*

0 *e no ponto* 0, *porque se* $x < 0 < y$, *também* $x\,|x| = -x^2 < 0 < y^2 = y\,|y|$;

II) *Como o domínio de* f *é um intervalo,* I) *é suficiente para que* f *seja estrictamente crescente.*

3) a) *Aplicando um corolário do critério de Cauchy à série dos módulos, e, como para cada* $a \in R^+ - \{0\}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a\,n^2 + 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n |x|^n} = \frac{a}{2}\,|x|,$$ *concluimos que:*

I) *se* $|x| < \dfrac{2}{a}$, *a série dada é convergente;*

II) *se* $|x| > \dfrac{2}{a}$, *a série dos módulos é divergente e, portanto, pelo teorema de Abel, a série dada é divergente.*

R: *O raio de convergência é, pois,* $r_a = \dfrac{2}{a}$ (*se* $a > 0$); *se* $a = 0$ *a série abeliana é evidentemente convergente para todo o* $x \in R$ *e* $r_0 = +\infty$.

b) *Analisemos a convergência de*

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{-a\,n^2 - 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n x^n$$

nos pontos $-\dfrac{2}{a}$ *e* $\dfrac{2}{a}$ $(a > 0)$; *para* $x = -\dfrac{2}{a}$ *ou* $x = \dfrac{2}{a}$, $\left|\left(\dfrac{-a\,n^2 - 2\,a^2}{2\,n^2 + a}\right)^n x^n\right| = \left(\dfrac{2\,n^2 + 4\,a}{2\,n^2 + a}\right)^n > 1$, *porque* $a > 0$. *Logo, a série é divergente por o seu termo geral não convergir para* 0 (*uma condição necessária de convergência de uma série é que o seu termo geral tenha limite* 0). *Portanto*

R: $$\text{se } a > 0 \to D_a = \left]-\frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right[,$$
$$\text{se } a = 0 \to D_0 = R.$$

4) a) *Vejamos para que pares* $(a, b) \in R^2$ *o sistema*
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ \quad\; y + z = a \\ \qquad\; z = b \end{cases}$$
é possível.

A característica da matriz $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$ *é* 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0.$$

Uma condição necessária e suficiente pora a compatibilidade da 4.ª equação com o sistema (possível!) das três primeiras é dada (Teorema de Rouché) pelo anulamento do determinante da matriz característica dessa equação (relativamente ao sistema principal das 3 primeiras):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & a-b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a-b \end{vmatrix} = 0 \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow 2\,(a - b) - 2 = 0 \longleftrightarrow a - b = 1$$

R: $A = \{(a, b) \in R^2;\ a - b = 1\}$

Nota: $r_{(a,b)}$, *se* $a - b = 1$, *tem um só ponto comum com* r, *porque a característica da matriz acima indicada é 3.*

b) $P(1, 1, 0)$; $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \to \overline{u} = \dfrac{(-2, 0, 2)}{\sqrt{8}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \to \overline{v} = (1, 0, 0)$.

$\overline{u} + \overline{v}$ *tem a direcção de uma bissectriz e* $\overline{u} - \overline{v}$ *a direcção da outra.*

$$(1)\quad (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda \in R;$$

$$(2)\quad (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda \in R$$

As equações (1) *e* (2) *são soluções do problema.*

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Big| \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$

o que mostra a perpendicularidade das bissectrizes.

c) *Aproveitando os resultados da alínea* b), *podemos escrever:*

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (\lambda, \mu) \in R^2$$

em resposta a c).

5) a) $f^{-1}(\{0\}) = \{a\,e_1 + b\,e_2;\ (a, b) \in R^2\}$. *É evidente que a soma de 2 elementos deste conjunto e o produto de um número real por um elemento deste conjunto*

ainda são elementos desse conjunto. Portanto, (condição necessária e suficiente demonstrada no curso), $f^{-1}(\{0\})$ *é um sub-espaço vectorial de* E. e_1 *e* e_2 *são linearmente independentes, porque* (e_1, e_2, e_3) *é uma base de* E; *por outro lado todo o vector de* $f^{-1}(\{0\})$ *é, como se vê, combinação linear de* e_1 *e* e_2. *Então* (e_1, e_2) *é uma base de* $f^{-1}(\{0\})$ *e, portanto,* $dim\,(f^{-1}(\{0\}) = 2$.

b) $(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3)\,S\,(a'\,e_1 + b'\,e_2 + c'\,e_3) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow f(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3) = f(a'\,e_1 + b'\,e_2 + c'\,e_3) \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow 4\,c\,e_3 = 4\,c'\,e_3 \longleftrightarrow c = c'$. *Temos então de provar que, se* $c = c'$,

$$(\lambda\,a\,e_1 + \lambda\,b\,e_2 + \lambda\,c\,e_3)\,S\,(\lambda\,a'\,e_1 + \lambda\,b'\,e_2 + \lambda\,c'\,e_3) \longleftrightarrow \longleftrightarrow \lambda\,c = \lambda\,c',$$

o que é evidente. Da mesma forma

$$[(a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3) + (x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3)]$$
$$S\,[(a'\,e_1 + b'\,e_2 + c\,e_3) + (x'\,e_1 + y'\,e_2 + z\,e_3)]$$

porque as 3.as componentes são iguais.

c) $\bar{f}$ *é linear; isso resulta imediatamente da linearidade de* f; $\bar{f}$ *é injectiva:* $\bar{f}(p(x)) = \bar{f}(p(y)) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow f(x) = f(y) \longleftrightarrow x\,S\,y \longleftrightarrow p(x) = p(y)$. *Então* $\bar{f}$ *define um isomorfismo*—EV *de* $\bar{E}$ *sobre* $\bar{f}(\bar{E})$ *e, como* $\bar{f}(\bar{E}) = f(E) = \{c\,e_3\,;\,c \in R\}$ $(\subset E)$ *tem manifestamente dimensão 1, também* $\bar{E}$ *tem dimensão 1.*

(Nota: $p: E \to \bar{E}$ *é a projecção canónica*).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 2 — 20-6-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 2, 2′, *um* dos problemas 5, 5′ e os problemas 1, 3, 4. Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5′. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa.

5615 — 1) Num referencial ortonormado o plano π tem por equação $2x + y + 3z = 6$.

a) Escreva equações paramétricas de π, escolhendo para tal o ponto de intersecção de π com Ox e dois vectores livres perpendiculares entre si, um dos quais representável no plano Oxy.

b) De preferência aproveitando a alínea anterior, escreva equações paramétricas da recta d de maior declive de π relativamente a Oxy, que intersecta Ox.

c) Determine o ângulo de d com o plano Oxy.

2) Demonstre, *a partir das definições respectivas*, que

a) Toda a sucessão de Cauchy é limitada;

b) Toda a sucessão parcial de uma sucessão de de Cauchy é uma sucessão de Cauchy.

2′) Sendo X uma parte não vazia de R, designe X' o conjunto dos pontos de acumulação de X que pertencem a $R : X' = \{x \in R\,;\, x$ é ponto de acumulação de $X\}$. Mostre que $\forall\, A\ (\emptyset \neq A \subset R),\ (A')' \subset A'$.

3) *a*) Determine a função derivada de g:

$$(]0,1] \cup \{2\}) \to R,\quad x \to e^{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)}$$

não esquecendo a indicação do domínio.

b) Considere a função

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\to (x-1)^2 \quad \text{se} \quad x \in R^+ \cup (R^- \cap Q) \\ x &\to 0 \quad\quad\ \ \text{se} \quad x \in R^- \cap \complement Q. \end{aligned}$$

Diga se f tem derivadas laterais em 0 e determine as funções Df e $D(f|\,R^+)$, justificando.

c) Em que pontos f tem extremos relativos e em quais desses pontos tem extremos relativos estrictos?

4) Dada a aplicação

$$f: R^4 \to R^3$$
$$(x, y, z, t) \to (x+y+\pi z,\ x+2y-z,\ 2x+4y+z)$$

a) resolva a equação $f(x, y, z, t) = (1, 0, 0)$; escreva esta equação sob a «forma matricial» (pode começar por indicar a matriz M_f associada à aplicação linear f em relação às bases naturais de R^4 e R^3);

b) diga qual o contradomínio de f e se f é injectiva, justificando a resposta;

c) determine o conjunto $f^{-1}(\{0, 0, 0)\})$ e mostre que é um sub-espaço vectorial de R^4 (de dimensão 1).

5. Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ é convergente, expondo o raciocínio que fizer. O resultado encontrado permitir-lhe-á mostrar que sucessão $((-1)^n\, n^n/n!)_{n \in N}$ não tem limite? Porquê? $\left(\text{N. B. } e = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$.

5′. Seja $F = \mathcal{F}(A, R),\ (\emptyset \neq A \subset R)$, o conjunto das funções reais de domínio A. Sobre F considere a relação de equivalência «quasi-igual» $f \sim g \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow [\{x \in A\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ é finito ou vazio].

a) Mostre que se $f \in F$ e f tem limite real em $a \in A$, f é quasi-igual a uma função contínua em a.

b) Seja $C = \mathcal{C}(A, R)$ a parte de F constituída pelas funções reais contínuas de domínio A. *Mostre* que se A é um intervalo não reduzido a um ponto, a aplicação canónica $p: C \to C/\sim_C$ é injectiva.

c) Indique, justificando, uma condição *necessária e suficiente* simples a impor a A para que a aplicação canónica $p: C \to C/\sim_C$ seja injectiva.

Resolução do exame 2

1. a) $P(3,0,0)$ *é o ponto de intersecção de* Ox *com* π. $\overline{u} = a\overline{c} + b\overline{j} + c\overline{k}$ *é representável sobre*

I) Oxy *se e só se* $c = 0$;

II) π *se e só se* $2a + b + 3c = 0$. *Uma solução deste sistema é* $(1, -2, 0)$. $\overline{v} = a'\overline{i} + b'\overline{j} + c'\overline{k}$ *é representável sobre* π *se e só se* $2a' + b' + 3c' = 0$; *é perpendicular a* $\overline{i} - 2\overline{j}$ *se e só se* $a' - 2b' = 0$ $((a', b', c') \neq (0,0,0))$. *Uma solução deste sistema é* $(6, 3, -5)$.

R: *A equação* $(x, y, z) = (3,0,0) + \lambda(1,-2,0) + \mu(6,3,-5)$, $(\lambda, \mu) \in R^2$ *é uma solução do problema.*

b) d *tem a direcção de* $\overline{v}$.

R: *A equação* $(x, y, z) = (3,0,0) + \sigma(6,3,-5)$, $\sigma \in R$, *é uma solução do problema.*

c) *Se* α *é o plano* Oxy, $sen(\widehat{d,\alpha}) = |\cos(\overline{v}, \overline{k})| =$

$$= \left| \frac{\overline{v} | \overline{k}}{|\overline{v}| \cdot |\overline{k}|} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{36+9+25}} \right|.$$

R: $(\widehat{d,\alpha}) = Arc\,sen\,\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

2. *(Ver apontamentos das aulas teóricas).*

2'. *Vamos provar que se* x *é ponto de acumulação (real) de* A', *também é ponto de acumulação de* A. *Suponhamos que* $\forall \varepsilon \in R^+ - \{0\}$ $(V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A' \neq \emptyset$, *e seja, para cada* $\varepsilon \in R^+ - \{0\}$, $y_\varepsilon \in (V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A$ · $y_\varepsilon \in A'$ *implica que* $\forall \delta \in R^+ - \{0\}$, $V(y_\varepsilon, \delta) \cap A \neq \emptyset$. *Em particular, para* $\delta = inf\{|y_\varepsilon - x|, \varepsilon - |y_\varepsilon - x|\}$, *será* $V(y_\varepsilon, \delta) \cap A \neq \emptyset$ *e, como* $V(y_\varepsilon, \delta) \subset V(x, \varepsilon) - \{x\}$, *será* $(V(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. *Portanto* x *é um ponto de acumulação de* A. c. q. d.

3. a) g *não tem derivada no ponto* 2, *que é um ponto isolado do domínio. Para* $x \in]0, 1]$

$$g'(x) = e^{\frac{sen\,x}{x^2}} \cdot \frac{x^2 \cos x - 2x\,sen\,x}{x^4}.$$

R: $g':]0,1] \to R$

$$x \to \frac{x \cos x - 2\,sen\,x}{x^3}\, e^{\frac{sen\,x}{x^2}}.$$

b) *A derivada à direita de* f *em* 0 *é* $f'_d(0) = (f | R^+)'(0) = 2 \cdot (0 - 1) = -2$. $f'_e(0)$ *seria o limite de* $\varphi: R^- - \{0\} \to R$ *no ponto* 0, *se este*

$$x \to \frac{f(x) - 1}{x}$$

limite existisse. Ora, o cálculo de $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi\left(-\dfrac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n} - 1\right)^2 - 1}{-\frac{1}{n}} = -2 \text{ e de } \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{-\frac{\pi}{n}} = \lim_{n \to +\infty} n/\pi = +\infty$$ *basta para mostrar que aquele limite não existe. Logo* f *não tem derivada à esquerda em* 0.

$Df: R^+ - \{0\} \to R$ (f *é não derivável em* 0,
$\quad x \to 2(x-1)$

pois nem sequer é derivável à esquerda, como vimos; para $x \in R^- - \{0\}$, f *é evidentemente descontínua, a fortiori, não finitamente derivável. Poder-se-ia mesmo mostrar que não era derivável, mas tal não é necessário para a resolução desta alínea).*

$D(f | R^+): R^+ \to R$
$\quad x \to 2(x-1)$
$\quad (f | R^+ = F | R^+$, *onde* $F: R \to R$
$\quad\quad x \to (x-1)^2$

e F é *derivável, sendo* $\forall x \in R$, $F'(x) = 2(x - 0)$.

c) $\forall x \in R$, $f(x) \geqslant 0$. *Portanto, em todo o* $x \in R^- \cap \complement Q$, *como* $f(x) = 0$, f *tem um mínimo relativo (que é não estricto, como se vê atendendo à definição). De* $(f | (R^+ \cup (R^- \cap Q)))'(x) = 2(x-1)$ *(para* $x \in R^+ \cup R^- \cap Q))$, *resulta que o único ponto — além dos já considerados — em que* f *pode ter um extremo relativo, é* 1. *Ora* $f(1) = 0$ *e* $f(x) > 0$ *se* $x \in]0,2[- \{1\}$; *portanto* f *tem um mínimo relativo relativo estricto em* 1.

4. a) $\begin{cases} x + y + \pi z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 2 - 2 + 4\pi - 4\pi + 4 - 1 = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+4}{3} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-(1+2)}{3} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-4}{3} = 0 .$$

R: *O conjunto das soluções da equação dada e* $A = \{(2, -1, 0, t);\ t \in R\}$.

A equação pode escrever-se sob a forma:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \pi & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad (x, y, z, t) \in R^4 .$$

b) f *é não injectiva, porque* $f^{-1}(\{1, 0, 0\}) = A$ *tem mais de um elemento. O contradomínio de* f *é* R^3, *porque, qualquer que seja* $(u, v, w) \in R^3$, *a equação* $f(x, y, z, t) = (u, v, w)$ *é possível, uma vez que a característica da matriz* M_f *e* 3.

c) $f^{-1}(\{(0, 0, 0)\}) = \{(0, 0, 0, t);\ t \in R\}$ *é um sub-espaço vectorial de* R^4, *porque a soma* $(0, 0, 0, t_1 + t_2)$ *de dois quaisquer dos seus elementos —* $(0, 0, 0, t_1)$ *e* $(0, 0, 0, t_2)$ *— ainda lhe pertence e o produto* $(0, 0, 0, \lambda t_0)$ *de um número real* λ *por um seu elemento —* $(0, 0, 0, t_0)$ *— ainda lhe pertence.* $((0, 0, 0, 1))$ *é uma base de* $f^{-1}(\{(0, 0, 0)\})$, *pelo que ele tem dimensão* 1.

5. *Estudemos a «série dos módulos»* $\sum_{1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$. *Aplicando-lhe um corolário do critério de D'Alembert, como*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{((n+1)!/(n+1)^{n+1})}{(n!/n^n)} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 ,$$

concluímos que é convergente, e, portanto, também a série dada.

Do resultado precedente podemos concluir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, *e, como* $\forall\, n \in N$ $\frac{n!}{n^n} > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$. *Ora, pondo* $\forall\, n \in N$, $a_n = (-1)^n \frac{n^n}{n!}$, *é imediato que*

I) $(a_{2n})_{n \in N}$ *é uma sucessão parcial de* $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n \in N}$, *logo tem limite* $+\infty$;

II) $(a_{2n-1})_{n \in N}$ *é uma sucessão parcial de* $\left(-\frac{n^n}{n!}\right)_{n \in N}$, *logo tem limite* $-\infty$.

$(a_n)_{n \in N}$ *não tem, pois, limite (porque, se tivesse, as suas sucessões parciais teriam todas o mesmo limite).*

5′. a) *A função* $g: A \to R$, $x \to f(x)$ *se* $x \neq a$, $a \to \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$ *é contínua em* a *e quasi igual a* f *(será igual se* f *for contínua em* a).

$$\begin{aligned} g: A &\to R \\ x &\to f(x) \text{ se } x \neq a \\ a &\to \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) \end{aligned}$$

b) *Suponhamos* $f \in C$, $g \in C$ *e* $f \neq g$, *i. e.,* $\exists\, x \in A$, $f(x) - g(x) \neq 0$; *como* f *e* g *são contínuas,* $\exists\, \varepsilon > 0$, $0 \notin (f - g)(A \cap V(x, \varepsilon))$. *Mas, por* A *ser um intervalo não reduzido a um ponto,* $A \cap V(x, \varepsilon)$ *é infinito e, portanto,* $f \not\sim_C g$, *ou, o que é o mesmo,* $p(f) \neq p(g)$. *Logo* p *é injectiva.*

c) *Note-se que na alínea* b) *a hipótese de* A *ser um intervalo não reduzido a um ponto só foi utilizada para demonstrar que* $\forall\, x \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $A \cap V(x, \varepsilon)$ *e infinito, ou, o que é equivalente, que* todo o ponto de A é ponto de acumulação de A *(i. e.,* $A \subset A'$). *É, pois, evidente que esta condição (mais fraca) é ainda suficiente para* p *ser injectiva.*

Mostremos que é necessária: se y *é um ponto isolado de* A *e* $f \in \mathcal{C}$, *a função* $g\,[\in F]$ *tal que* $f \mid (A - \{y\}) = g \mid (A - \{y\})$ *e* $g(y) = f(y) + 1$ *é ainda contínua e teremos ainda* $g \in C$, $f \neq g$, $f \sim_C g$, $p(f) = p(g)$; p *não é injectiva.*

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 3 — 6-7-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente um* dos problemas 3, 3′, *um* dos problemas 5, 5′ e os problemas 1, 2, 4. Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5′. Pretende-se uma exposicão clara e rigorosa.

5616 — 1) Seja

$f: C \to C$ ($C =$ corpo dos números complexos).
$z \to z^5 + 1$

a) Determine duas soluções da equação $f(z) = -i$.

b) Sendo $A = \{a + ib;\ (a, b) \in R^2 \wedge a \leqslant 0\}$ e $g = f \mid A$, resolva a equação $g(z) = -i$.

2) (N. B. — O referencial $(0, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$, utilizado neste problema, satisfaz às seguintes condições: $\overline{i} \mid \overline{j} = \overline{j} \mid \overline{k} = \overline{i} \mid \overline{k} = 0$, $|\overline{i}|/2 = |\overline{j}| = |\overline{k}|/2 = 1$).

a) Deduza equações paramétricas e uma equação não paramétrica do plano α que passa por $Q(1, 0, 0)$ e é perpendicular à recta r de equações $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 5$ ($\lambda \in R$).

b) Deduza equações paramétricas de uma recta s de α que passe por Q e faça um ângulo de $\pi/3$ com a direcção de $\overline{k}$.

c) Qual a equação de α num referencial $(\overline{Q},\overline{I},\overline{J},\overline{K})$, tal que I tem a direcção de s e tal que $\overline{K}$ é perpendicular a r?

3) Sejam $I=[0,1]$ e $f: I \to R$; suponha que f é derivável finitamente e que $(\exists\, M \in R)\,(\forall\, x \in I)\,(|f'(x)| \leqslant M)$. *Mostre* que «$(x,y) \in I^2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|$». (Aplique o teorema de LAGRANGE).

3') *Mostre* que é condição suficiente para uma função $f: A \to R$ $(\emptyset \neq A \subset R)$ derivável em $a \in A$ ser contínua em a, que $f'(a) \in R$. A condição será necessária? Se a resposta for afirmativa, justifique-a, se for negativa dê um contra-exemplo.

4) Relativamente à base (e_1, e_2, e_3, e_4) sobre o espaço vectorial real E, o operador linear $g: E \to E$ tem por matriz associada:

$$M_g = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

a) Determine as coordenadas de $w = g(e_3 + e_4)$ na base (e_1, e_2, e_3, e_4).

b) Da análise de M_g *conclua* que $g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)$ são vectores linearmente independentes e que, *portanto*, $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ é uma base de E. Justifique esta *última* conclusão apoiando-se em resultados enunciados no curso.

c) Quais as coordenadas do vector w considerado em *a*) na base mencionada em *b*)?

5) Seja $h: R \to R$

$$x \to 2x^3 + 12x^2 - 50.$$

a) A equação $h(x) = 0$ tem 3 soluções. Indique 3 intervalos abertos disjuntos cada um dos quais contenha uma solução. (Utilize os teoremas de ROLLE e de CAUCHY!). Justifique.

b) Designando por r a única solução positiva da equação $h(x) = 0$, utilize qualquer dos «métodos de aproximação» estudados no curso para determinar um número $r' \in R$ tal que $|r - r'| < 1/10$.

$$(\varepsilon_\rho = 1/\sigma \cdot (b-a)^2 \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot 1/\ (\inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|);$$
$$\sigma = 2 \text{ se } \rho = t;\ \sigma = 8 \text{ se } \rho = c).$$

5') Seja $f: I \to R$, $(I = [0,1])$, com as seguintes propriedades:

1.ª) $f(I) \subset (I)$; 2.ª) $(\exists\, M \in\,]0,1[\,)\,(\forall\, (x,y) \in I^2)$
$(|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|)$.

Definimos uma sucessão $(f_n)_{n \in}$ de elementos de $\mathcal{F}(I, R)$ da seguinte forma: $f_1 = f$ e $\forall\, n \in N$, $f_{n+1} = f \circ f_n$.

a) Mostre que a equação $f(x) = x$, $x \in I$, tem no máximo uma solução.

b) Prove, por indução, que $(\forall\, n \in N)\,(\forall\, (x,y) \in I^2)$ $(|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M^n\,|x - y|)$.

c) Atendendo à alínea *b*) e à seguinte observação trivial – $\forall\, x \in I$, $f_{n+p}(x) = f_n(f_p(x))$ –, prove que, $\forall\, x \in I$, a sucessão *numérica* real $f_n(x))_{n \in N}$ é de CAUCHY, e portanto, convergente.

d) Seja $F = \lim_{n \to +\infty} f_n$. Prove que F é constante.

F. C. P. – MATEMÁTICAS GERAIS – (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) – Complemento do Exame 3 – Julho de 1964.

Observação — As questões seguintes constituem um prolongamento do exercício 5' do exame 3 e foram propostas em provas orais a alunos que tinham resolvido o problema 5' nas provas escritas.

e) Mostre que f é contínua.

f) Mostre que a equação $f(x) = x$ $(x \in I)$ tem *uma* solução. (Utilize o teorema de CAUCHY e a alínea *a*)).

g) Mostre que se $F([0,1]) = \{x_0\}$ (cf. *d*)), x_0 é solução da equação $f(x) = x$ $(x \in I)$. (N. B. — Esta alínea, que não faz intervir f), fornece uma 2.ª demonstração da existência de uma solução da equação considerada).

h) Averiguar quais dos raciocínios feitos para a resolução das alíneas anteriores são generalizáveis a funções definidas em partes de R que não sejam intervalos fechados.

Resposta à alínea h): *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) permanecem válidas sendo o domínio de f uma parte qualquer não vazia de R (se o domínio não for limitado, é, porém, necessária uma alteração na demonstração proposta para a alínea *c*)); em *f*) intervem de maneira essencial o facto de o domínio de f ser um *intervalo fechado*; em *g*) intervem a compacidade do domínio.

Obs. I — Como corolário desta última conclusão, observemos que se K é um compacto de R $(\emptyset \neq K \subset R)$ e $f: K \to R$ satisfaz às propriedades

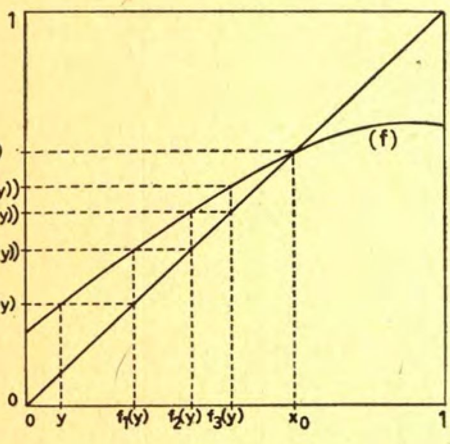
1) $f(K) \subset K$ e

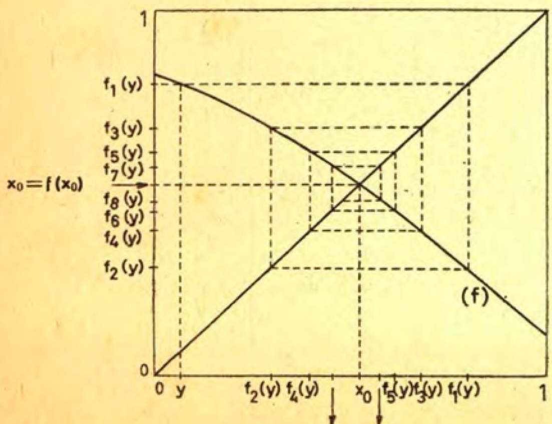
2) $(\exists M \in]0,1[)\ (\forall (x,y) \in K^2)\ (|f(x) - f(y)| \leqslant \leqslant M\,|x-y|)$,

então a equação $f(x) = x$ ($x \in K$) tem uma (única!) solução, ou, como também se diz, «a função f tem um (único!) *ponto fixo*». Este é um caso particular de um resultado conhecido com o nome de «teorema do ponto fixo», com importantes aplicações. A demonstração anterior (a), b), c), d), e), g)) utiliza o chamado «método das aproximações sucessivas».

Obs. II — Uma condição suficiente para $f: [0,1] \to R$ ter a propriedade 2) é que seja derivável e que exista $M \in]0,1[$ tal que $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leqslant M$ (ver problema 3 do exame 3). Mas f pode satisfazer à propriedade 2) sem ser derivável.

Obs. III — Imagem geométrica do problema:





Resolução do exame 3

1) a) $f(z) = -i \Longleftrightarrow z^5 + 1 = -i,\ z \in C \Longleftrightarrow z^5 = -1 - i,\ z \in C$. *As soluções da equação* $f(z) = -i$ *são as cinco raizes de índice* 5 *do complexo* $-1-i$. *Utilizando a fórmula de Moivre e atendendo a que* $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$, *podemos escrever:*

$$u_k = \sqrt[10]{2}\left(\frac{5\pi/4 + 2k\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi/4+2k\pi}{5}\right)$$

$k \in \{0,1,2,3,4\}$.

R: *Duas soluções da equação dada são:*

$$u_0 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[10]{64}}{2} + \frac{\sqrt[10]{64}}{2}\,i = \frac{\sqrt[5]{8}}{2} + \frac{\sqrt[5]{8}}{2}\,i$$

$$u_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{20}\right).$$

b) $g^{-1}\{-i\} = f^{-1}\{-i\} \cap A = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\} \cap A$. *As soluções de* $g(z) = -i$ *são as de* $f(z) = -i$ *cuja «parte real» é menor ou igual a zero. Para* u_k *ser solução de* $g(z) = -i$ *terá de ser, portanto,*

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi/4 + 2k\pi}{5} \leqslant \frac{3\pi}{2}\ (\textit{Note-se que } 0 \leqslant k \leqslant 4 \Longrightarrow 0 < \frac{5\pi/4+2k\pi}{5} < 2\pi).$$

Terá de ser, pois:

$$\frac{5\pi}{4} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{25\pi}{4}\ \ \textit{ou}\ \ \frac{5}{8} \leqslant k \leqslant \frac{25}{8}$$

ou

$$1 \leqslant k \leqslant 3.$$

R: *As soluções de* $g(z) = -i$ *são*

$$u_1, u_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{21\pi}{20}\right)$$

e

$$u_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{29\pi}{20}\right).$$

2) *Comecemos por notar que* $\forall (a,b,c) \in R^3$, $\forall (a',b',c') \in R^3$ $(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k})\,|\,(a'\bar{i} + b'\bar{j} + c'\bar{k}) = a a' |\bar{i}|^2 + b b' |\bar{j}|^2 + c c' |\bar{k}|^2 = 4 a a' + b b' + 4 c c'$.

a) *A equação de* α *é* $(P - Q)\,|\,(\bar{i} + \bar{j}) = 0$, *pois* $\bar{i} + \bar{j}$ *é um vector director de* r. *A equação cartesiana de* α *será, pois,* $4(x-1) + y = 0$ *ou* $4x + y = 4$,

$(x, y, z) \in R^3$. $\bar{i} - 4\bar{j}$ *e* $\bar{k}$ *são dois vectores linearmente independentes representáveis sobre* α. $(x, y\, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, -4, 0) + \mu(0, 0, 1)$ $(\lambda, \mu) \in R^2$ *é uma equação paramétrica de* α.

b) *Um vector representável em* α *será combinação linear de* $\bar{i} - 4\bar{j}$ *e* $\bar{k}$: $\bar{u}(\lambda, \mu) = \lambda\bar{i} - 4\lambda\bar{j} + \mu\bar{k}$. *Para* $\bar{u}(\lambda, \mu)$ *ser vector director de uma recta deverá ser* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = |\cos(\bar{u}(\lambda, \mu), \bar{k})| = \left|\frac{\bar{u} \mid \bar{k}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{k}|}\right|$$

ou

$$\frac{1}{2} = \left|\frac{4\mu}{\sqrt{4\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\mu^2} \cdot 2}\right|$$

é a condição a impor a (λ, μ) *para* $\bar{u}(\lambda, \mu)$ *definir a direcção de uma recta* s *solução do problema. A condição indicada é equivalente à seguinte:* $4\mu\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\mu^2 = 16\mu^2$ $((\lambda, \mu) \neq (0, 0))$, *ou* $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \sqrt{\frac{3}{5}}$. *À solução* $\lambda = \sqrt{3}$, $\mu = \sqrt{5}$ *corresponde o vector director* $\bar{u}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = \sqrt{3}\,\bar{i} - 4\sqrt{3}\,\bar{j} + \sqrt{5}\,\bar{k}$ *e a recta* s *de equação paramétrica*

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \sigma(\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, \sqrt{5}), \quad \sigma \in R.$$

(Obs. — *Obteríamos* outra *recta satisfazendo às condições do problema tomando a solução* $(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$).

c) *Note-se que* $\bar{I}$, *tendo a direcção de* $s\,(\subset \alpha)$, *é representável em* α e *que* $\bar{K}$, *sendo perpendicular a* r, *é também representável em* α. *Como, por outro lado,* $Q \in \alpha$, *a equação de* α *é* $Y = 0$, $(X, Y, Z) \in R^3$. *(Notação:* $P - Q = X\bar{I} + Y\bar{J} + Z\bar{K}$).

3) f, *por ser derivável finitamente, é contínua. Estamos, pois, nas condições de aplicação do Teorema de Lagrange.*

Seja $(x, y) \in I^2$;

I) *se* $x < y$, *pelo Teorema de Lagrange*

$$\exists z \in]x, y[\text{ tal que } f(y) - f(x) = f'(z) \cdot (y - x);$$

será, pois,

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \\ = |f'(z)| \cdot |y - x| \leqslant M \cdot |x - y|.$$

II) *se* $y < x$, *anàlogamente* $\exists w \in]y, x[$, $f(x) - f(y) = f'(w) \cdot (x - y)$; $|f(x) - f(y)| = |f'(w)| \cdot |x - y| \leqslant M|x - y|$.

III) *se* $x = y$, *é evidente que* $0 = |f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y| = 0$.

3') *(Ver apontamentos das aulas teóricas. A função* $f: R^+ \to R$, $x \to \sqrt{x}$ *é derivável e contínua em* 0 *e* $f'(0) \notin R$).

4) a) *A* $e_3 + e_4$ *corresponde, pela fixação da base* (e_1, e_2, e_3, e_4), *a matriz coluna* $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$; *a* $g(e_3 + e_4)$ *corresponderá*

$$M_g \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

portanto $w = g(e_3 + e_4) = -e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4$ *e as suas coordenadas são* $-1, 4, 4$ *e* 1 *(na base* (e_1, e_2, e_3, e_4)).

b) *As colunas de* M_g *são constituídas, respectivamente, pelas coordenadas de* $g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)$ *na base* (e_1, e_2, e_3, e_4). *Estes vectores são linearmente independentes se e só se* $\det(M_g) \neq 0$. *Ora*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = -10 \neq 0.$$

Portanto, $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ *é uma base de* E; *com efeito, se um espaço vectorial tem uma base com* n *elementos, a sua dimensão é* n *e qualquer «sistema» de* n *vectores linearmente independentes constitui uma base.*

c) *Como* g *é linear,* $w = g(e_3 + e_4) = g(e_3) + g(e_4)$ *e as coordenadas de* w *na base* $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$ *são:* 0, 0, 1 *e* 1.

5) a) $h': R \to R$, $x \to 6x^2 + 24x$ *é a função derivada de* h, -4 *e* 0 *os seus zeros. Atendendo a que*

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty,$$
$$h(-4) = 2 \cdot (-64) + 12 \cdot 16 - 50 = 14 > 0$$

e

$$h(0) = -50 < 0, \begin{pmatrix} -\infty & -4 & 0 & +\infty \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

podemos concluir que cada um dos intervalos abertos disjuntos $]-\infty, -4[$, $]-4, 0[$ *e* $]0, +\infty[$ *contém uma só solução da equação* $h(x) = 0$. *Com efeito, existe em cada um destes intervalos abertos, no máximo* *uma solução (se num deles existissem pelo menos duas, pelo Teorema de Rolle,* h' *anular-se-ia num ponto — pelo menos — desse intervalo). O Teorema de Cauchy permite concluir então, directamente a existência de uma solução em* $]-4,0[$ *e indirectamente em* $]-\infty,-4[$ *e em* $]0,+\infty[$.

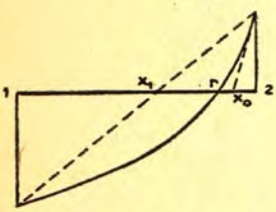
b) $h(0)=-50<0$, $h(1)=-36<0$, $h(2)=14>0$. *Pelo Teorema de Cauchy* $r\in]1,2[$. $\forall x\in]1,2[$ $h'(x)=6x^2+24x$, $h''(x)=12x+24>0\cdot$ $h'(2)=24+48=72$. *Aplicando o método das tangentes a* $h|[1,2]$ *no ponto* 2 *(note-se que* $h(2)\cdot h''(2)>0$),

obtemos $-14=72(x_0-2)$; $x_0=2-\dfrac{7}{36}<1{,}81$.

Aplicando o método das cordas, concluimos que

$$-14=\frac{14-(-36)}{2-1}(x_1-2);$$

$$x_1=2-\frac{14}{50}=2-0{,}28=1{,}72.$$



Podemos afirmar que $r\in]1{,}72,1{,}81[$. *Como*

$$1{,}81-1{,}72=0{,}09<1/10,$$

qualquer elemento de $[1{,}72,1{,}81]$ *é solução do problema, em particular podemos escolher* $r'=1{,}76$.

5') a) *Suponhamos que a equação tem pelo menos duas soluções:* x_0 *e* x_1. *Então* $f(x_0)=x_0$ *e* $f(x_1)=x_1$ *implicam*

(1) $|f(x_0)-f(x_1)|=|x_0-x_1|$.

Por outro lado a 2.ª propriedade implica

(2) $|f(x_0)-f(x_1)|\leqslant M\cdot|x_0-x_1|$, *sendo* $M\in]0,1[$.

Ora (1) $\wedge$ (2) *é absurdo se* $|x_0-x_1|\neq 0$.

Portanto fica demonstrada a tese.

b) i) $n=1$. *Como* $f_1=f$, $\forall(x,y)\in I^2$

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leqslant M|x-y|,$$

pela 2.ª propriedade;

ii) *Suponhamos a tese demonstrada para* $n=k$; *então*

$$\forall(x,y)\in I^2\;|f_{k+1}(x)-f_{k+1}(y)|$$
$$\underset{(A)}{=}|f(f_k(x))-f(f_k(y))|\underset{(B)}{\leqslant}M\,|f_k(x)-f_k(y)|$$
$$\underset{(C)}{\leqslant}M\cdot M^k\cdot|x-y|=M^{k+1}|x-y|;$$

a tese está demonstrada para $n=k+1$.

((A) *por definição de* f_{k+1}; (B) *pela 2.ª propriedade aplicada a* $(f_k(x),f_k(y))\in I^2$; (C) *por hipótese de indução).*

c) (I) $\forall x\in I$, $\forall(n,p)\in N^2$, $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|f_n(f_p(x))-f_n(x)|\leqslant M^n|f_p(x)-x|\leqslant M^n$, *a última desigualdade resultando de que* $f_p(x)\in[0,1]$ *e* $x\in[0,1]$ *implicam* $|f_p(x)-x|\leqslant 1$. *Como* $M\in]0,1[$, $(M^n)_{n\in N}$ *converge para* 0, *i. e.,* $(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})$ $(\exists n_0\in N)(\forall n\in N,n>n_0)(|M^n|<\varepsilon)$.

Então, por (I), *concluimos que*

$$(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})(\exists n_0\in N)(\forall n\in N,n>n_0)$$
$$(\forall x\in I)(\forall p\in N)(|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon)$$

a fortiori

$$(\forall x\in I)(\forall\varepsilon\in R^+-\{0\})(\exists n_0\in N)(\forall n\in N,n>n_0)$$
$$(\forall p\in N)(|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon),$$

isto é, $(\forall x\in I)$ $((f_n(x))_{n\in N}$ *é uma sucessão de Cauchy).*

d) $\forall x\in I$, $F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$. *Para provar que* F *é constante, ter-se-á de provar que* $\forall(x,y)\in I^2$, $F(x)=F(y)$. *Ora* $F(x)-F(y)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)-\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(y)=\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)-f_n(y))$; *mas, por* b), $(\forall(x,y)\in I^2)(\forall n\in N)(|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant M^n)$ *e, como* $\lim\limits_{n\to+\infty}M^n=0$, *aquele limite também é nulo, i. e.,* $F(x)=F(y)$ *c. q. d.*

Enunciados e soluções dos N.os 5614 a 5616 de M. Arala Chaves

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame Final — Época de Julho — 1.ª chamada — Prova escrita — 9-7-1964.

5617 — 1) Considere o conjunto R^2 e adopte as leis de composição:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,0)\quad(\alpha\text{ real}).$$

O conjunto R^2 fica munido de uma estrutura de espaço vectorial?

R: *Em relação à lei de composição interna, o conjunto constitui um grupo comutativo. Em relação à lei de composição externa tem-se:* $1(x_1,x_2)=(x_1,0)\neq(x_1,x_2)$ *e portanto o conjunto não fica munido de uma estrutura de espaço vectorial.*

5618 — 2) Dada a série $\sum\limits_1^\infty u_n$, com $u_n=a\varphi(n+1)+b\varphi(n)+c\varphi(n-1)$ e $a+b+c=0$, mostre que $S_n=a\varphi(n+1)+(a+b)\varphi(n)+b\varphi(1)+c\varphi(1)+$

$+ c\varphi(0)$. Se $\lim \varphi(n) = l \neq \infty$ qual é a soma da série?

Calcule a soma da série $\sum_1^\infty \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

R:
$$u_1 = a\varphi(2) + b\varphi(1) + c\varphi(0)$$
$$u_2 = a\varphi(3) + b\varphi(2) + c\varphi(1)$$
$$u_3 = a\varphi(4) + b\varphi(3) + c\varphi(2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = a\varphi(n+1) + b\varphi(n) + c\varphi(n-1)$$

e, somando membro a membro estas n *igualdades, obtém-se:*

$$\begin{aligned} S_n &= a[\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n+1)] + \\ &+ b[\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)] + \\ &+ c[\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1)] = \\ &= (a+b+c)[\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n-1)] + \\ &+ a\varphi(n+1) + (a+b)\varphi(n) + b\varphi(1) + \\ &+ c\varphi(1) + c\varphi(0). \end{aligned}$$

Se $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = l \neq \infty$, *então* $S = al + (a+b)l + b\varphi(1) + c\varphi(1) + c\varphi(0) = (2a+b)l + (b+c)\varphi(1) + c\varphi(0)$.

Como $u_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, *pode utilizar-se o resultado anterior com* $\varphi(n) = \frac{1}{n+1}$, $a = -1$, $b = -1$ *e* $c = 2$. *Dado que* $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0$, *vem* $S = (-1+2)\frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = \frac{5}{2}$.

5619 — 3) A que condição deve obedecer o parâmetro real k para que as imagens de $f(x) = x\log x + kx^2$ possuam um ponto de inflexão?

Prove que o lugar geométrico dos pontos de inflexão de $f(x)$ é $y = x\log x - \frac{x}{2}$.

R: *Como tem de ser* $x > 0$ *e* $f''(x) = \frac{2kx+1}{x}$, *haverá ponto de inflexão para* $x = -\frac{1}{2k}$ *e portanto terá de ser* $k < 0$.

Reciprocamente, com $k < 0$ *vem* $f''(x) > 0$ *para* $x < -\frac{1}{2k}$ *e* $f''(x) < 0$ *para* $x > -\frac{1}{2k}$. *Portanto, há ponto de inflexão, se e só se* $k < 0$.

Os pontos de inflexão satisfazem com suas coordenadas às relações $y = x\log x + kx^2$ *e* $2kx + 1 = 0$. *Eliminando* k, *encontra-se* $y = x\log x - \frac{x}{2}$.

5620 — 4) Dada a tabela de valores $\begin{array}{c|c} x & x_1 \; x_2 \cdots x_n \\ \hline y & y_1 \; y_2 \cdots y_n \end{array}$ e sabendo que os pontos $(x_1, y_1), \cdots (x_n, y_n)$ estão sensìvelmente em linha recta, admita-se que $y = mx + p$. Que valores se devem escolher para m e p por forma a minimizar

$$F(m, p) = \sum_1^n (y_i - mx_i - p)^2.$$

R: *As condições necessárias para a existência de mínimo são*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \end{cases}, \; \textit{isto é}, \; \begin{cases} -2\sum_1^n (y_i - mx_i - p)x_i = 0 \\ -2\sum_1^n (y_i - mx_i - p) = 0 \end{cases} \; \textit{ou}$$

$$\begin{cases} m\sum_1^n x_i^2 + p\sum_1^n x_i = \sum_1^n x_i y_i \\ m\sum_1^n x_i + p \cdot n = \sum_1^n y_i \end{cases}.$$

A regra de Cramer *dá imediatamente*

$$m = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \left(\sum_1^n x_i\right)\left(\sum_1^n y_i\right)}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}$$

$$p = \frac{\left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum_1^n y_i\right) - \left(\sum_1^n x_i\right)\left(\sum_1^n x_i y_i\right)}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}$$

Para estudar a condição suficiente para a existência de mínimo calculem-se as derivadas $s = \frac{\partial^2 F}{\partial m \, \partial p} = 2\sum_1^n x_i$, $r = \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} = 2\sum_1^n x_i^2$ *e* $t = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 2n$. *Ora* $s^2 - rt = 4\left[\left(\sum_1^n x_i\right)^2 - n\sum_1^n x_i^2\right]$ *e, fazendo* $\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$ *e* $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$, *vem* $s^2 - rt = -4n^2\sigma^2 < 0$. *Como* $r > 0$, *trata-se efectivamente de um mínimo.*

5621 — 5) Mostre que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - 2y + z \qquad\qquad &= 0 \\ y - z + t \qquad &= 0 \\ z - 2t + u &= 0 \end{aligned}$$

é indeterminado de grau 2, calcule soluções independentes e apresente a solução geral como composição das soluções independentes.

R: *A matriz do sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 3 *e tomando para determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ *obtêm-se fàcilmente duas soluções independentes*

$$(0,1,2,1,0) \text{ e } (-1,-1,-1,0,1).$$

A solução geral é

$$X = \alpha(0,1,2,1,0) + \beta(-1,-1,-1,0,1)$$

ou

$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 2\alpha - \beta \\ t = \alpha \\ u = \beta \end{cases}$$

5622 — 6) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,1,1)$ e é perpendicular à recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y \quad\;\; =0 \end{cases}.$$

R: *A estrela de planos que passa por* $P(1,1,1)$ *é* $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$ *e os parâmetros directores de* r *são*

$$h = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad k = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{e } l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

A condição de perpendicularidade é $\dfrac{A}{h} = \dfrac{B}{k} = \dfrac{C}{l}$ *ou* $A = B = \dfrac{C}{-2} = m$, *isto é*, $A = m$, $B = m$ *e* $C = -2m$. *O plano pretendido tem por equação* $m(x-1)+m(y-1)-2m(z-1)=0$ *ou* $x+y-2z=0$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame Final — Epoca de Julho — 2.ª chamada — Prova Escrita — 13-7-1964.

5623 — Dada a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{x} \; (x>0) \\ 1 \; (x=0) \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \; (x<0) \end{cases}$, resolva os seguintes problemas:

a) Calcule a oscilação nos pontos $x=0$ e $x=\infty$. Quais são os pontos de descontinuidade de $f(x)$? Porquê?

b) Calcule $f'_d(0)$ e $f'_e(0)$. Existe $f'(0)$? Porquê?

R: a) $f(+0) = -\infty$ *e* $f(-0) = 1$ *e portanto* $\omega(0) = +\infty$; $f(+\infty) = 0$ *e* $f(-\infty) = 0$ *e portanto* $\omega(\infty) = 0$. *Como* $\dfrac{\log x}{x}$ *e* $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *são cocientes de funções contínuas, a função* f (x) *é contínua em todo o campo de existência excepto para* $x=0$ *onde apresenta uma descontinuidade infinita de 1.ª espécie. A função também é contínua no infinito.*

$$\text{b)} \quad f'_d(0) = \lim_{x=+0} \frac{\dfrac{\log x}{x} - 1}{x} = -\infty$$

$$f'_e(0) = \lim_{x=-0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x} = \lim_{x=-0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x=-0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x=-0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0.$$

Não existe $f'(0)$ *porque* $f'_d(0) \neq f'_e(0)$.

2) Calcule:

a) $P \cos x \log(1+\cos x)$.

b) $P \dfrac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

R: a) $P \cos x \log(1+\cos x) = \operatorname{sen} x \log(1+\cos x) + P \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} = \operatorname{sen} x \log(1+\cos x) + P \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \operatorname{sen} x \log(1+\cos x) + P(1-\cos x) = \operatorname{sen} x \log(1+\cos x) + x - \operatorname{sen} x + C$.

b) *Como as raízes de* x^4+3x^2+2 *são* $\pm\sqrt{2}\,i$ *e* $\pm i$, *vem* $x^4+3x^2+2 = (x^2+2)(x^2+1)$ *e*

$$\frac{x^2-x}{x^4+3x^2+2} = \frac{x^2-x}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

tem de ser decomposta em elementos simples. Ora

$$\frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{S_0}{x^2+2} + \frac{T_0}{x^2+1}.$$

Cálculo de S_0:

$R_\Delta(x) = \frac{x^2 - x}{x^2+1}$ *e ordenando o numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + 2$, *vem* $R_\Delta(x) = \frac{(-2-x)+\Delta}{-1+\Delta}$ *e* $S_0 = 2 + x$.

Cálculo de T_0:

$R_\Omega(x) = \frac{x^2 - x}{x^2+2}$ *e ordenando o numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Omega = x^2+1$, *vem* $R_\Omega(x) = \frac{(-1-x)+\Omega}{1+\Omega}$ *e* $T_0 = -1 - x$.

Então

$$\frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2+x}{x^2+2} - \frac{1+x}{x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

e

$$P\,\frac{x^2 - x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\, arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \log(x^2+2) - arctg\, x - \frac{1}{2} \log(x^2+1).$$

3) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin da função $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$, indicando o intervalo de validade. Enuncie os teoremas a que tiver necessidade de recorrer.

R: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$ *para* $|x| < 1$

$$arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad para \ |x| < 1$$

$$x\, arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad para \ |x| < 1.$$

4) Dada a função $F(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^4$, resolva os seguintes problemas:

a) Estude os máximos e mínimos.

b) A equação $F(x,y) = 0$ poderá definir implìcitamente uma função $y(x)$ na vizinhança de certo ponto? Porquê?

c) O que representa em R^3 a equação $F(x,y) = 0$? Porquê?

R: a) $\begin{cases} F'_x = 4(x-y)^3 = 0 \\ F'_y = -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3 = 0 \end{cases}$

tem a única solução $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. *Como* $F(x,y) \geq 0 = F(1,1)$, *o ponto* $P(1,1)$ *é um minimizante.*

b) *O único ponto que satisfaz à equação* $F(x,y) = 0$ *é* $P(1,1)$ *e como* $F'_y(1,1) = 0$ *a equação não define nenhuma função implícita.*

c) *Em* R^3, *a equação* $F(x,y) = 0$ *representa a recta* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

5) Dá-se o nome de *forma linear* a um polinómio do 1.º grau $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$. Considerando o sistema de m formas lineares com n variáveis $f_i = a_i^j x_j$ $(i = 1, \cdots m; j = 1, \cdots n)$, se existem números $k_1, k_2, \cdots k_m$ não todos nulos tais que $k_i f_i = 0$, as formas dizem-se linearmente dependentes; se $k_i f_i = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, as formas dizem-se linearmente independentes.

Mostre que a dependência ou independência das formas lineares é equivalente à dependência ou independência das linhas de $A = \| a_i^j \|$.

As formas lineares são necessàriamente dependentes se $m > n$? Porquê?

R: *Com algum* k_i *diferente de* 0, $k_i f_i = k_i a_i^j x_j = 0 \Rightarrow k_i a_i^j = 0$ *e esta condição indica que as linhas de* A *são dependentes; recìprocamente, se* $k_i a_i^j = 0$ *então* $k_i f_i = 0$. *Da mesma forma para a independência. A condição necessária e suficiente para que as formas sejam independentes é que a característica de* A *seja* m.

Quando $m > n$ *a característica de* A *é inferior a* m *e portanto as formas lineares são dependentes.*

6) Calcule o determinante de ordem n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

deduzindo para esse efeito uma fórmula de recorrência.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de* Laplace *ao longo da 1.ª coluna vem* $D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}$.

Logo,

$$\begin{aligned} D_n &= 2^{n-1} + D_{n-1} \\ D_{n-1} &= 2^{n-2} + D_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D_3 &= 2^2 + D_2 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = 2 + 1 \end{aligned}$$

e, somando membro a membro estas igualdades, obtém-se

$$D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 1 = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$$

Enunciados e soluções dos N.os 5617 a 5623 de Fernando de Jesus

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1964.

5624 — I. Seja

$$R \xrightarrow{f} R\,,\ f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

1) Use a definição de Cauchy a fim de concluir que a função $R - \{1\} \xrightarrow{g} R\,,\ g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ tem limite -2 no ponto 1.

2) Use o teorema de Taylor a fim de explicitar os conjuntos:

$$A = \{x \in R \mid f(x) > -2x + 2\}\,;$$
$$B = \{x \in R \mid f(x) < -2x + 2\}\,.$$

3) Mostre que f não é uma função polinomial real.

5625 — II. Seja $\lambda \in C$ e sejam $C \xrightarrow{f_\lambda} C, f_\lambda(z) = \lambda z^2 + z^3$ e $C \xrightarrow{g_\lambda} C$, $g_\lambda(z) = \lambda + z^3$.

1) Considere a sucessão real $(a_n)_{n \in N}$ com $a_n = \dfrac{f_1(n)}{g_1(n)}$; explicite o conjunto

$$A = \{n \in N \mid a_n > a_{n+1}\}$$

e mostre que $(a_n)_{n \in N}$ é injectiva.

2) Use o teorema de Euler a fim de determinar λ pela condição de f_λ e g_λ admitirem uma raiz comum e, para cada valor de λ encontrado, explicite todas as funções polinomiais complexas que interessam à formulação do referido teorema.

5626 — III. Sejam r e s rectas não coplanas e não perpendiculares. Mostre que a superfície gerada pela rotação de s em torno de r é um hiperbóide de uma folha (comece por escolher um conveniente referencial ortonormado).

5627 — IV. Seja $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ o referencial mètricamente fixado como se indica: $\|\vec{i}\| = 2$; $\|\vec{j}\| = 1$; $\measuredangle(\vec{i}\,,\vec{j}) = \frac{2}{3}\pi$. Sejam U, V, A e B os pontos assim caracterizados: $U - O = \vec{i}$; $V - O = \vec{j}$; A é a intersecção da paralela à recta OU que passa por V e da perpendicular à recta OU que passa por O; B é a intersecção da paralela à recta OU que passa por V e da paralela à recta OV que passa por U.

1) Coordenadas, no referencial $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, do ponto A. Justifique.

2) Equação, no referencial $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, da elipse assim caracterizada: passa pelos pontos B e V; as rectas OB e OV são seus eixos de simetria. (Comece por resolver o problema no referencial $\left(O\,;\vec{I} = \dfrac{1}{\|B-O\|}(B-O)\,,\ \vec{J} = \vec{j}\right)$, que deve mostrar ser ortonormado).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1964.

5628 — I. Seja $A = \{f \in \mathfrak{F}(R_0^+, R) \mid f(x) = x$ ou $f(x) = -x$, qualquer que seja $x \in R_0^+\}$.

1) Seja $f \in A$. Use a definição de Cauchy a fim de concluir o seguinte: f tem limite 0 no ponto 0; f não tem limite 1 no ponto 0.

2) Indique os elementos do conjunto $A \cap \mathcal{C}(R_0^+, R)$.

5629 — II. Seja $R \xrightarrow{f} R$, $f(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$.

1) Indique os pontos nos quais f tem máximo relativo estrito e os pontos nos quais f tem mínimo relativo estrito. Justifique.

2) Indique o conjunto $f(R_0^+)$ recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy. Justifique.

5630 — III. Seja $R_0^+ \xrightarrow{f} R$ contínua e sobrejectiva. Mostre que f não tem limite no ponto $+\infty$.

5631 — IV. Seja $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ um referencial.

1) Suponha-o mètricamente fixado como se indica:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 ; \; \sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{k},\vec{i}) = \frac{\pi}{3}.$$

Determine os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ assim caracterizados: $\vec{u}$ pertence ao plano $z=0$, é perpendicular a $\vec{i}$, é unitário e a sua 1.ª componente é negativa; $\vec{v}$ é perpendicular ao plano $z=0$, é unitário e a sua 3.ª componente é positiva.

2) Suponha-o mètricamente fixado como na alínea 1). Represente, através de uma equação cartesiana, o cilindro quádrico gerado pela rotação da recta $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ em torno do eixo das cotas.

3) Condicione-o mètricamente de modo que o ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ seja o ortocentro do triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

Enunciados dos N.os 5624 a 5631
de Aníbal Coimbra Aires de Matos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

157 — P. J. Hilton and S. Wylie — **Homology Theory. An introduction to algebraic Topology.** Cambridge University Press, 1960.

Os Autores, na introdução, definem os fins a atingir com esta obra:

«Este livro foi escrito com a preocupação de constituir uma introdução à Topologia Algébrica na sua forma mais actualizada. Não se exige ao Leitor qualquer conhecimento prévio de Topologia Algébrica; assim nos fundamentos da Part 1 o Leitor sem conhecimentos de Topologia Analítica encontra uma sinopse dos elementos necessários para a compreensão do resto do texto. A fim de que o livro pudesse atingir a sua finalidade, ainda se levou em consideração o facto de ele dever fornecer um conjunto das noções de base da Topologia Algébrica compreensiveis pelo matemático não iniciado nas técnicas e nos problemas descritos. Se bem que o tratamento dos assuntos se desenvolva, consequentemente, de forma elementar, os AA. foram ambiciosos na escolha do material em relação ao que é usual nos livros de texto elementares. É sua opinião que a literatura é rica em livros de texto avançados, e bem fornecida de livros elementares e de introdução; simplesmente os dois tipos de livros não estão suficientemente interligados. Mesmo os livros avançados dividem-se naturalmente em dois grupos que podem classificar-se ràpidamente como o dos clássicos e o dos modernos, verificando-se ainda em cada um deles uma rápida subdivisão que torna difícil por exemplo reconhecer argumentos clássicos quando apresentados sobre um aspecto moderno. Tentaram, assim, criar aqueles elos que seriam difíceis de ser estabelecidos pelos estudiosos da literatura disponível.

Assim, enquanto que no início os assuntos são tratados de forma bastante elementar, omitindo certos tópicos, particularmente os que são canónicos em tratados clássicos, procuraram os AA. estabelecer nos últimos capítulos os pontos que constituem a base imediata da actual investigação».

Parece que os Autores conseguiram alcançar eficientemente o seu objectivo.

Possivelmente prejudicaram um pouco a clareza da exposição com a adopção de uma nova simbologia cuja vantagem não apresenta alguma evidência. O que nos parece porém, inconveniente é largamente compensado por toda uma estruturação, desenvolvimento, pormenor e preocupação didática que fazem desta obra um útil instrumento que permite ràpidamente atingir as fronteiras actuais da Topologia Algébrica e poder penetrar na senda da investigação neste campo da matemática.