6. References

[1] Kolmogorov, A. N., *Foundations of probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

[2] Mexia, J. T. P. N., *Subsídios para uma teoria estatística do problema da classificação*, Anais do Instituto Superior de Agronomia, Vol. 24, Lisboa, 1963.

[3] Maurier, Edith, *Elements aléatoires dans un espace de Banach*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. XIII, Paris, 1953.

[4] Savage Richard, *Probability inequalities of the Tchebycheff type*, Journal of Research, series B, N.º 3, 1961, Washington, 1961,

[5] Tiago de Oliveira, J., *Estimação assintótica de parâmetros quase lineares*, Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1960.

Sobre as várias maneiras de escrever as equações gerais da mecânica dos sistemas com um determinado número finito de graus de liberdade

por P. de Varennes e Mendonça

1. Objectivo — Ao publicar este artigo só num aspecto o nosso intuito terá acaso excedido objectivos meramente didácticos — o de chamar a atenção para a superioridade formal das equações de Mira Fernandes (*) e de assim procurar fazê-las sair do esquecimento em que injustamente as mantém ainda a maioria dos programas universitários.

2. Preliminar — Consideremos o sistema material C sujeito apenas a ligações bilaterais.

Suponhamos ser possível encontrar um número u finito de parâmetros (coordenadas gerais) $q_s (s = 1, 2, \cdots, u)$ tais que todo o ponto $P \in C$ é função sòmente dos q_s e do tempo t, unívoca e bidiferenciável:

$$\text{(1)} \qquad P = P(q_1, q_2, \cdots, q_u, t).$$

Então, o deslocamento virtual δP de P no instante t tem a expressão

$$\text{(2)} \qquad \delta P = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} \delta q_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, u)$$

(*) Fernandes, A. de Mira (1940) — *Equazioni della Dinamica*. «Portae Math.» 2: 1-6, 1941.

e o seu deslocamento real dP no intervalo de tempo elementar dt sucessivo ao instante t vale

$$\text{(3)} \qquad dP = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} d q_s + \frac{\partial P}{\partial t} d t .$$

Sejam as seguintes as $h < u$ equações de ligação (compatíveis e independentes) não consideradas quando da escolha dos u parâmetros q_s (diferenciadas quando holónomas):

$$\text{(4)} \qquad \sum_s \varphi_{rs} d q_s + \eta_r d t = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, h),$$

onde tanto os φ_{rs} como os η_r são funções de t e dos q_s. Às equações (4) correspondem num deslocamento virtual (compatível) de C

$$\text{(5)} \qquad \sum_s \varphi_{rs} \delta q_s = 0 .$$

O sistema C tem, por conseguinte, $k = u - h$ graus de liberdade.

Tirem-se de (4) os valores de h dos $d q_s$ — por exemplo, os de $d q_{k+1}, d q_{k+2}, \cdots, d q_u$ — e substituam-se em (3). Então, estas equações convertem-se em

(6) $$d\,P = \sum_j \vec{\psi}_j\, d\, q_j + \vec{\xi}\, d\, t \quad (j = 1, 2, \cdots, k),$$

onde $\vec{\psi}_j$ e $\vec{\xi}$ são ainda funções de $q_1, q_2, \cdots, q_u, t$. Correlativamente é

(7) $$\partial P = \sum_j \vec{\psi}_j\, \partial\, q_j\,.$$

O nosso ponto de partida nas deduções subsequentes será a equação simbólica da dinâmica ou forma lagrangeana do princípio de d'ALEMBERT:

(8) $$S[(\vec{F}_a - m\,P'') \,|\, \partial P] = 0\,.$$

onde S representa a soma estendida a todo o sistema, $|$ é o sinal de produto interno, m a massa de P, e $P'' = d^2 P/d\,t^2$ a sua aceleração e $\vec{F}_a$ a resultante das forças que lhe estão directamente aplicadas no instante t. Como se sabe, esta equação é válida na ausência de atrito ou desde que se considerem as forças de atrito incluídas nas forças directamente aplicadas.

3. Método dos multiplicadores de Lagrange. Equações de Lagrange e equações de Appell — Substituindo (2) em (8), vem

$$S\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \,|\, \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s}\,\partial\, q_s\right] = 0\,,$$

donde

(9) $$\sum_s S\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right]\partial\, q_s = 0\,.$$

As (5) formam um sistema de h equações, que são lineares e homogéneas nos ∂q_s. A equação (9) é também linear e homogénea nos ∂q_s. Logo, para que (9) seja satisfeita por todas as soluções do sistema (5), hão-de os seus coeficientes ser combinações lineares dos coeficientes das equações (5). Quer dizer, tem-se

(10) $$S\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right] + \sum_r \lambda_r\, \varphi_{rs} = 0\,.$$

É no raciocínio anterior que consiste o chamado método dos multiplicadores de LAGRANGE. São os λ_r que se designam por multiplicadores de LAGRANGE.

As u equações (10), juntamente com as h equações (5), formam um sistema de $u + h$ equações que, para dadas condições iniciais, determina as u coordenadas gerais q_s e os h multiplicadores λ_r em função do tempo. Os $q_s(t)$, por (1), fornecem P em função de t, isto é, definem o movimento de C; pode verificar-se fàcilmente que os λ_r, embora em geral não sejam suficientes para as calcular, estão relacionados com as forças devidas às ligações traduzidas pelas equações (4).

Por (2), o trabalho virtual das forças directamente aplicadas vale

$$\partial W_a = S(\vec{F}_a \,|\, \partial P) = \sum_s S\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)\partial\, q_s\,,$$

equação que mostra ser

(11) $$Q_s = S\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)$$

a componente segundo a coordenada q_s de um vector do espaço de configuração u-dimensional, o vector força generalizada actuante sobre o ponto representativo de C.

Substituindo (11) em (10), esta equação converte-se em

(12) $$S\left(m\,P'' \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = Q_s + \sum_r \lambda_r\, \varphi_{rs}\,.$$

As equações de LAGRANGE obtêm-se dando nova forma ao primeiro membro de (12) mediante a introdução da energia cinética de C:

(13) $$T = \frac{S(m\,P'^2)}{2}\,,$$

onde $P' = d\,P/d\,t$ é a velocidade de P.

Vejamos como.

Derivando $S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)$ em ordem ao tempo, vem

$$\left[S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)\right]' = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) + \\ + S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right],$$

donde

$$(14) \qquad S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = \\ = \left[S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)\right]' - S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right].$$

Por outro lado, *supondo os* q_s (*bem como os* $q'_s = \mathrm{d}\,q_s/\mathrm{d}\,t$) *independentes, a despeito das relações* (4), tem-se, por derivação de (13),

$$(15) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_s} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P'}{\partial q_s}\right)$$

e

$$(16) \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_s} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P'}{\partial q'_s}\right);$$

e de (1) ou (3) tira-se

$$(17) \qquad P' = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s}\,q'_s + \frac{\partial P}{\partial t},$$

donde

$$\frac{\partial P'}{\partial q_s} = \sum_p \frac{\partial^2 P}{\partial q_p\,\partial q_s}\,q'_p + \frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial q_s}$$

($p = 1, 2, \cdots, u$) e

$$(18) \qquad \frac{\partial P'}{\partial q'_s} = \frac{\partial P}{\partial q_s};$$

logo, é

$$(19) \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)' = \sum_p \frac{\partial^2 P}{\partial q_s\,\partial q_p}\,q'_p + \frac{\partial^2 P}{\partial q_s\,\partial t} \\ = \frac{\partial P'}{\partial q_s},$$

pois a bidiferenciabilidade implica a igualdade das derivadas cruzadas.

Substituindo (19) e (18) respectivamente em (15) e (16), resulta

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right]$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right),$$

expressões que convertem (14) em

$$(20) \quad S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

A substituição de (20) em (12) fornece finalmente as *equações de Lagrange, com multiplicadores,*

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_r \lambda_r\,\varphi_{rs}.$$

Derivando a energia de aceleração de C,

$$(22) \qquad A = \frac{S\,(m\,P''^2)}{2},$$

em ordem a q''_s e atendendo a que de (1), (3) ou (17) se tira

$$P'' = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s}\,q''_s + \cdots,$$

donde

$$(23) \qquad \frac{\partial P''}{\partial q''_s} = \frac{\partial P}{\partial q_s},$$

vem

$$(24) \qquad \frac{\partial A}{\partial q''_s} = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P''}{\partial q''_s}\right) \\ = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right).$$

A substituição de (24) em (12) conduz às *equações de Appell, com multiplicadores:*

$$(25) \qquad \frac{\partial A}{\partial q_s''} = Q_s + \sum_r \lambda_r \varphi_{rs}.$$

4. Supressão dos multiplicadores. Equações de Appell pròpriamente ditas — Vejamos o que sucede quando se substituem em (8) as (7), em lugar das (2). Fica

$$\sum_j \mathrm{S}[(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'') \,|\, \vec{\psi}_j]\, \delta q_j = 0.$$

Ora, os δq_j são arbitrários e independentes. Logo, tem-se

$$\mathrm{S}[(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'') \,|\, \vec{\psi}_j] = 0$$

ou

$$(26) \qquad \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}'' \,|\, \vec{\psi}_j) = \mathrm{S}(\vec{F}_a \,|\, \vec{\psi}_j).$$

Por (7), o trabalho virtual das forças directamente aplicadas vale

$$\delta W_a = \mathrm{S}(\vec{F}_a \,|\, \delta \mathrm{P}) = \sum_j \mathrm{S}(\vec{F}_a \,|\, \vec{\psi}_j)\, \delta q_j,$$

que mostra serem agora

$$(27) \qquad Q_j = \mathrm{S}(\vec{F}_a \,|\, \vec{\psi}_j)$$

as componentes da força generalizada.

Derivando $\mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j)$ em ordem ao tempo, vem

$$[\mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j)]' = \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}'' \,|\, \vec{\psi}_j) + \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j')$$

ou, fazendo

$$(28) \qquad B_j = \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j'),$$

$$(29) \qquad \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}'' \,|\, \vec{\psi}_j) = [\mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j)]' - B_j.$$

De (6) tira-se

$$(30) \qquad \mathrm{P}' = \sum_j \vec{\psi}_j\, q_j' + \vec{\xi},$$

donde

$$\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q_j'} = \vec{\psi}_j$$

e, por (13),

$$(31) \qquad \mathrm{S}(m\,\mathrm{P}' \,|\, \vec{\psi}_j) = \mathrm{S}\left(m\,\mathrm{P}' \,\Big|\, \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q_j'}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_j'}.$$

Mediante (27), (29) e (31), a equação (26) escreve-se

$$(32) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right)' - B_j = Q_j.$$

Contudo, em geral, por ser

$$\vec{\psi}_j \neq \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_j},$$

é também

$$B_j \neq \frac{\partial T}{\partial q_j} = \mathrm{S}\left(m\,\mathrm{P}' \,\Big|\, \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q_j}\right),$$

de modo que não é possível dar a (32) a forma (21) com supressão dos multiplicadores.

No caso de o sistema C ser holónomo é que, por redução do número de parâmetros ao mínimo k (coordenadas livres), há identificação de (6) com (3), obtendo-se as equações de LAGRANGE, sem multiplicadores ou pròpriamente ditas:

$$(33) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Semelhante impossibilidade para os sistemas anolónomos não ocorre com as equações de APPELL. De facto, por (30), tem-se

$$\mathrm{P}'' = \sum_j \vec{\psi}_j'\, q_j' + \sum_j \vec{\psi}_j\, q_j'' + \vec{\xi}',$$

donde

$$(34) \qquad \frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q_j''} = \vec{\psi}_j$$

e, por conseguinte, derivando em ordem a q_j'' a energia de aceleração [(22)], vem

$$(35)\qquad \frac{\partial A}{\partial q_j''} = \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}''\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q_j''}\right) = \mathrm{S}(m\mathrm{P}''\,|\,\vec{\psi}_j),$$

e assim a substituição em (26) de (27) e (35) fornece

$$(36)\qquad \frac{\partial A}{\partial q_j''} = Q_j \qquad (j=1,2,\cdots,k),$$

a *primeira forma das equações de Appell, sem multiplicadores* ou *pròpriamente ditas.*

Considere-se a função (constrangimento de C)

$$(37)\qquad \gamma = \frac{1}{2}\mathrm{S}\left[\frac{1}{m}(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'')^2\right] + b$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{S}\left(\frac{F_a^2}{m}\right) + A - \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\mathrm{P}'') + b,$$

onde b representa uma qualquer grandeza independente das acelerações.

Derivando-a em ordem a q_j'', resulta, atendendo a (27) e (34),

$$(38)\qquad \frac{\partial \gamma}{\partial q_j''} = \frac{\partial A}{\partial q_j''} - \mathrm{S}\left(\vec{F}_a\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q_j''}\right)$$
$$= \frac{\partial A}{\partial q_j''} - Q_j,$$

de maneira que (36) equivale a

$$(39)\qquad \frac{\partial \gamma}{\partial q_j''} = 0,$$

a *segunda forma das equações de Appell, sem multiplicadores* ou *pròpriamente ditas.*

5. Método das características cinéticas. Equações de Maggi, equações de Levi-Civita-Amaldi e equações de Mira Fernandes — Dividindo por $d\,t$ as equações (4), tem-se

$$(40)\qquad \sum_s \varphi_{rs}\, q_s' + \eta_r = 0.$$

Para maior clareza, escrevamos por extenso este sistema de equações:

$$\begin{cases} \varphi_{11} q_1' + \varphi_{12} q_2' + \cdots + \varphi_{1k} q_k' + \varphi_{1,k+1} q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{1u} q_u' + \eta_1 = 0 \\ \varphi_{21} q_1' + \varphi_{22} q_2' + \cdots + \varphi_{2k} q_k' + \varphi_{2,k+1} q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{2u} q_u' + \eta_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{h1} q_1' + \varphi_{h2} q_2' + \cdots + \varphi_{hk} q_k' + \varphi_{h,k+1} q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{hu} q_u' + \eta_h = 0. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de h equações lineares a u incógnitas e, recorde-se, é $u - h = k > 0$. Para o resolver, pelo teorema de Rouché-Méray, dão-se valores arbitrários a k das incógnitas (escolhidas para não principais) e resolve-se o sistema obtido por meio das fórmulas de Cramer.

Para fixar ideias, suponhamos tomar para incógnitas não principais os k primeiros q_s'. A sua arbitrariedade permite fazer

$$\begin{cases} q_1' = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \cdots + \alpha_{k1} e_k + \beta_1 \\ q_2' = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{k2} e_k + \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k' = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \cdots + \alpha_{kk} e_k + \beta_k, \end{cases}$$

ou seja, abreviadamente,

$$(41)\qquad q_{s'}' = \sum_j \alpha_{js'} e_j + \beta_{s'} \quad (j, s'=1,2,\cdots,k),$$

onde os e_j são também arbitrários.

Deste modo, continuando a resolução da maneira acima recordada, vêm para valores das incógnitas principais

$$(42)\qquad q_{s''}' = \sum_j \alpha_{js''} e_j + \beta_{s''}$$
$$(s'' = k+1, k+2, \cdots, u).$$

Os sistemas (41) e (42) englobam-se escrevendo

$$(43)\qquad q_s' = \sum_j \alpha_{js} e_j + \beta_s \quad \begin{pmatrix} j=1,2,\cdots,k; \\ s=1,2,\cdots,u. \end{pmatrix}.$$

Os parâmetros arbitrários e_j dizem-se *características cinéticas*. Querendo, podem aliás fazer-se coincidir com k determinados dos q'_s, para o que basta escolher convenientemente os coeficientes das equações (41); mas tal não é necessário.

O sistema (5) fornece correspondentemente

$$\delta q_s = \sum_j \alpha_{js} \delta \varepsilon_j , \tag{44}$$

onde arbitrários são também os parâmetros infinitésimos $\delta \varepsilon_j$.

Substituindo (44) em (2), resulta

$$\delta \mathrm{P} = \sum_j \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s} \delta \varepsilon_j , \tag{45}$$

equações que, introduzidas em (8), fornecem

$$\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'') \,|\, \sum_j \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s} \delta \varepsilon_j\right] = 0$$

ou

$$\sum_j \mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'') \,|\, \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right] \delta \varepsilon_j = 0 ,$$

donde se deduz, por motivo da arbitrariedade dos $\delta \varepsilon_j$,

$$\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'') \,|\, \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right] = 0 \tag{46}$$

ou

$$\sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) = \sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(m\,\mathrm{P}'' \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) . \tag{47}$$

Façamos

$$\Psi_j = \sum_s \alpha_{js} Q_s , \tag{48}$$

isto é, atendendo a (11),

$$\Psi_j = \sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) . \tag{49}$$

Por sua vez, (20) fornece

$$\sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(m\,\mathrm{P}'' \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) = \sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right] . \tag{50}$$

A introdução de (49) e (50) em (47) conduz às *equações de Maggi:*

$$\sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right] = \Psi_j . \tag{51}$$

Derivando (43) em ordem ao tempo, vem

$$q''_s = \sum_j \alpha_{js} e'_j + \cdots ,$$

donde se tira

$$\frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \alpha_{js} . \tag{52}$$

Derivando agora a energia de aceleração A [(22)] em relação a e'_j, resulta, atendendo a (52),

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \sum_s \frac{\partial A}{\partial q''_s} \frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial A}{\partial q''_s} . \tag{53}$$

Ora, comparando (21) com (25), vê-se que é

$$\frac{\partial A}{\partial q''_s} = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s} , \tag{54}$$

de modo que (53) ainda se pode escrever

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right]$$

ou, por (51),

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \Psi_j , \tag{55}$$

que são de designar por *equações de Levi-Civita-Amaldi,* apesar de terem sido denominadas pelos seus autores «equações de APPELL» (*).

Mas, por outro lado, em vista de (23) e (52), é

$$\frac{\partial P''}{\partial e'_j} = \sum_s \frac{\partial P''}{\partial q''_s} \frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial P}{\partial q_s},$$

de maneira que, derivando em ordem a e'_j a função γ [(37)], resulta imediatamente

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e'_j} = -\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \mid \frac{\partial P''}{\partial e'_j}\right]$$

$$= -\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \mid \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial P}{\partial q_s}\right],$$

ou seja, por (46),

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e'_j} = 0, \tag{56}$$

que são as *equações de Mira Fernandes.*

6. Confronto das equações de Mira Fernandes com a segunda forma das equações de Appell pròpriamente ditas — As equações (56), $\partial \gamma / \partial e'_j = 0$, e a segunda forma das equações de APPELL [(39)], $\partial \gamma / \partial q''_j = 0$, constituem as duas maneiras de reduzir à forma mais condensada as equações gerais da mecânica dos sistemas com um determinado número finito de graus de liberdade.

A sua identidade é apenas aparente, pois um exame atento logo mostra que as equações de MIRA FERNANDES têm maior generalidade, visto não obrigarem a escolher as características cinéticas entre os q'_s.

Isto implica que as equações (39) possuem, em comum com as (36), uma particularidade que fàcilmente passa despercebida.

(*) LEVI-CIVITA, Tullio & Ugo AMALDI — *Lezioni di Meccanica Razionale,* Vol. II, Parte I. Bologna, Nicola Zanichelli, 1926. (Nuova edizione, 1951, p. 395-397.)

Referindo-se às (36) em termos válidos *mutatis mutandis* para as (39), eis como o próprio APPELL no-lo indica no trecho que a seguir se traduz (*), substituindo as notações pelas empregadas no presente artigo:

«...

$$\frac{\partial A}{\partial q''_1} = Q_1,\ \frac{\partial A}{\partial q''_2} = Q_2, \cdots, \frac{\partial A}{\partial q''_k} = Q_k. \tag{10}$$

Vê-se que, para as escrever, basta calcular a função A e exprimi-la de maneira que não contenha nenhumas outras segundas derivadas além das dos parâmetros $q_1, q_2, \cdots, q_k$, cujas variações são encaradas como arbitrárias. Pode suceder que esta função A, calculada em função de $q_1, q_2, \cdots, q_{k+h}$ $(k+h=u)$ contenha as suas primeiras derivadas $q'_1, q'_2, \cdots, q'_{k+h}$ e as suas segundas derivadas $q''_1, q''_2, \cdots, q''_{k+h}$; as relações

$$\left[\begin{cases} q'_{k+1} = \alpha_{1,k+1}\, q'_1 + \alpha_{2,k+1}\, q'_2 + \cdots + \\ \qquad + \alpha_{k,k+1}\, q'_k + \beta_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_{k+h} = \alpha_{1,k+h}\, q'_1 + \alpha_{2,k+h}\, q'_2 + \cdots + \\ \qquad + \alpha_{k,k+h}\, q'_k + \beta_{k+h} \end{cases}\right]$$

dão $q'_{k+1}, \cdots, q'_{k+h}$ em função linear de $q'_1, q'_2, \cdots, q'_k$, e, derivando em ordem ao tempo, obtêm-se também $q''_{k+1}, \cdots, q''_{k+h}$ em função linear de $q''_1, q''_2, \cdots, q''_k$; pode, portanto, fazer-se sempre de modo que a função A não contenha outras segundas derivadas além de $q''_1, q''_2, \cdots, q''_k$ [···]. Uma vez a função A assim preparada, podem escrever-se as equações (10).»

Parece fora de dúvida que estas operações «ocultas», que as equações (36) e (39) só por si não deixam transparecer, as tornam menos perfeitas que as equações de LEVI-CIVITA-AMALDI e de MIRA FERNANDES.

(*) APPELL, Paul — *Traité de Mécanique Rationnelle,* Tome II. Paris, Gauthier-Villars. (4e éd., nouv. tirage, 1931, p. 384-385; 6e éd., 1953 p. 391.)