Um Teorema sobre quasigrupos subtractivos

por Eliane Cordeiro da Silva [1]

Em [1] dão-se vários sistemas de axiomas para quasigrupos subtractivos. Cada sistema é constituído por dois axiomas independentes. Assim, por exemplo, mostra-se que um quasigrupo subtractivo é um grupoide $<G, \cdot>$ que verifica as seguintes condições:

(1): $b \cdot b\, a = a$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(2) $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

No mesmo artigo (Teorema 3), mostra-se que um grupoide $<G, .>$ que satisfaz as condições

(a) *a equação* $a\, x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(b) $a\, c \cdot b\, c = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$;

é um quasigrupo com identidade direita.

É fácil verificar que um grupoide $<G, \cdot>$ que satisfaça às condições (a) e (b) não é necessàriamente um quasigrupo subtractivo.

Com efeito, consideremos um grupo não abeliano $<G, \odot>$ e definamos em G a seguinte operação.:

$a \cdot b = a \odot b^{-1}$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$.

$<G, \cdot>$ satisfaz às condições (a) e (b) e, no entanto, não é um quasigrupo subtractivo, porque, por exemplo,

$$b \cdot b\, a = b \odot (b\, a)^{-1} = b \odot (b \odot a^{-1})^{-1} = \\ = b \odot (a \odot b^{-1}) \neq a$$

em virtude de $<G, \odot>$ ser um grupo não abeliano.

O objectivo desta nota é estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Um grupoide* $<G, \cdot>$ *é um quasigrnpo subtractivo, se e só se tem lugar algum dos seguintes sistemas de axiomas:*

Sistema S:

S 1: *a equação* $y\, a = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S 2: $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

Sistema S':

S' 1: *a equação* $a\, x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S' 2: $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

DEM. Basta provar que os sistemas de axiomas S, S' e $\{(1), (2)\}$ são equivalentes.

1) $S \Rightarrow S'$.

Como $S'2 = S2$, é suficiente mostrar que $S \Rightarrow S'1$.

[1] Bolsista do Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, Brasil.

Seja y uma solução qualquer da equação $ya = b$. Da condição $S2$, tem-se

$$bb = ya \cdot ya = aa,$$

quer dizer, o elemento $aa = i$ é independente de a.

Além disso, i é uma identidade direita, pois

$$bi = ya \cdot yy = ya = b,$$

qualquer que seja $b \in G$.

Tem-se ainda,

$$i \cdot ab = aa \cdot ab = ba,$$

e, portanto,

$$a \cdot ib = ai \cdot (i \cdot ya) = ai \cdot ay = yi = y,$$

isto é, a equação $ya = b$ tem uma única solução, $y = a \cdot ib$.

Consideremos agora a equação $ax = b$. Se esta equação tem solução, então

$$x = xi = ai \cdot ax = ab.$$

Como

$$ax = ai \cdot ab = bi = b,$$

concluimos que a equação $ax = b$ tem efetivamente solução, $x = ab$, quaisquer que sejam $a, b \in G$, o que prova $S'1$.

2) $\qquad S' \Rightarrow \{(1), (2)\}$.

Basta mostrar que $S' \Rightarrow (1)$, visto ser $(2) = S'2$. Ora, em virtude das condições $S'1$ e $S'2$ tem-se, designando por x um elemento tal que $ax = b$,

$$\begin{aligned} bb &= ax \cdot ax = (xx \cdot xa)(xx \cdot xa) = \\ &= xa \cdot xa = aa, \end{aligned}$$

donde se conclui que o elemento $aa = i$ é independente de a.

E, como, para todo $b \in G$,

$$bi = ax \cdot aa = ax = b,$$

o elemento i é uma identidade direita de $< G, \cdot >$.

Finalmente, tem-se

$$b \cdot ba = bi \cdot ba = ai = a$$

como pretendíamos mostrar.

3) $\qquad \{(1), (2)\} \Rightarrow S$.

Como $S2 = (2)$, basta provar que $\{(1), (2)\} \Rightarrow S1$. Ora, esta implicação é imediata, visto que num quasigrupo as equações $ax = b$ e $ya = b$ têm uma (única) solução.

Isto completa a demonstração do teorema.

Observação: Notemos que um grupoide que satisfaça aos axiomas $S1$ e (b) não é necessàriamente um quasigrupo subtractivo. Com efeito, estes axiomas são verificados pelo grupoide $< G, \cdot >$ dado no início desta nota e, como já vimos, este grupoide não é um quasigrupo subtractivo.

É interessante observar ainda que um grupoide pode verificar os axiomas (b) e $S2$ sem, no entanto, ser um quasigrupo subtractivo. Assim, por exemplo, o grupoide $< H, \cdot >$ ([1], § 2), em que a operação $\cdot$ é definida pela seguinte tabela

H	a	b
a	b	b
b	b	b

satisfaz os axiomas (b) e $S2$ e nem sequer é um quasigrupo, visto que a equação $bx = a$ não tem solução.

BIBLIOGRAFIA

[1] José Morgado, *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, «Gazeta de Matemática», n.º 92-93, 1964.