MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1963.

5588 — I. Seja $a \in R$ e seja $R \xrightarrow{f_a} R$, $f_a(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$.

1) Note $g(a)$ o número de raízes distintas de f_a; represente gràficamente a função $a \in R \to g(a) \in R$. Justifique.

2) Utilize conjuntamente o método das cordas e o método das tangentes a fim de calcular os três primeiros termos do desenvolvimento decimal da única raiz de f_1.

5589 — II. Seja $R \xrightarrow{f} R$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \sqrt{7+(2-x)^2}$.

1) $f(R)$ é minorado e $f(R) = [\inf f(R), \to [$. Justifique.

2) Determine os números $x \in R$ tais que $f(x) = \inf f(R)$. Justifique.

5590 — III. Seja $R_0^+ \xrightarrow{f} R$ nas condições seguintes: é duas vezes contìnuamente derivável;

$$Df(R_0^+) \subset R_0^+; \quad D^2 f(R_0^+) \subset R^+.$$

Mostre que: $f(R_0^+)$ não é majorado;

$$\{x \in R_0^+ \mid Df(x) = 0\}$$

é $\{0\}$ ou $\emptyset$.

5591 — IV. Seja $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado.

1) Coordenadas dos vértices dos quadrados do plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ e têm A e B como vértices não opostos.

2) Equações cartesianas da cónica que passa pelos pontos:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Nota — Comece por representar a cónica no referencial $(O; \vec{I}, \vec{J})$ com $\vec{I} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\vec{J} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas — Exame Final — Outubro de 1963.

5592 — I. Considere as sucessões reais seguintes: $(a_n)_{n \in N}$ com $a_n = \log n$; $(b_n)_{n \in N}$ com $b_n = tg\,\frac{1}{n}$.

1) Conclua, através da definição, a regularidade ou a não-regularidade da sucessão $(a_n)_{n \in N}$.

2) Conclua a existência de números reais a e b tais que, para qualquer $n \in N$, é $\frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \leqslant b_n \leqslant \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}$.

5593 — II. Considere as funções seguintes:

$$[0, 2] \xrightarrow{f} R, \; f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 + x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases};$$

$$[1, \to [\xrightarrow{g} R, \; g(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}.$$

1) Mostre que f é derivável no ponto 1 (utilizando, nas considerações que fizer, apenas definições) e aproveite a função f a fim de *verificar* alguns dos teoremas que conheça e a ela sejam aplicáveis.

2) Determine o contradomínio de g. Justifique.

5594 — III. Seja $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(R)$; determine as matrizes $B \in \mathfrak{M}_{2,2}(R)$ inversíveis tais que $B A B^{-1}$ seja diagonal. Justifique.

5595 — IV. Seja $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ um referencial ortonormado.

1) Considere as rectas $r\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x-6y-z=1\end{cases}$ e $s\begin{cases}3x+y-3z=1 \\ x-z=2\end{cases}$; determine equações cartesianas *duma* recta t nas condições seguintes: o ângulo de r e t é $\pi/2$; o ângulo de s e t é $\pi/4$; t é coplana com r e com s. Quantas rectas existem nas condições referidas?

2) Considere os pontos $A=(1,2,2)$ e $B=(11,-2,10)$; determine equações paramétricas das bissectrizes dos ângulos das rectas OA e OB.

Enunciados dos N.os 5588 a 5595
de Aníbal Coimbra Aires de Matos

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — 1.º exame de frequência (1.ª Chamada) — 7-3-964.

I

5596 — 1) Seja S uma relação reflexiva e transitiva definida num conjunto A. Mostre que a relação $(a\,S\,b \wedge b\,S\,a)$ é uma relação T entre a e b que é uma equivalência.

2) No conjunto R dos números reais define-se uma operação, simbolizada por $*$, do seguinte modo: $a*b=a+b-(a\cdot b)$.

O conjunto R fica munido de uma estrutura de grupo? Porquê?

3) Sendo $w_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, prove que $(x+y\,w_1+z\,w_1^2)\,(x+y\,w_1^2+z\,w_1)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

R: 1) $aTa=aSa\wedge aSa=aSa$ *e, como* S *é reflexiva, o mesmo acontece a* T; $aTb=aSb\wedge bSa=bSa\wedge aSb=bTa$ *e portanto* T *é simétrica; quanto à transitividade, note-se que* $aTb\wedge bTc=(aSb\wedge bSa)\wedge(bSc\wedge cSb)=(aSb\wedge bSc)\wedge(cSb\wedge bSa)=aSc\wedge cSa=aTc$.

2) G. 1. $a,b\in R\Longrightarrow a*b\in R$.

G. 2. $a*(b*c)=a+(b*c)-a\cdot(b*c)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=a+b+c-bc-ab-ac+abc$.

$(a*b)*c=(a*b)+c-(a*b)c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c=a+b+c-bc-ab-ac+abc$ *e portanto a operação é associativa:* $a*(b*c)=(a*b)*c$.

G. 3. *A equação* $a*e=a$ *tem a solução* $e=0$ *e portanto existe elemento neutro.*

G. 4. *A equação* $a*a'=e$, *ou* $a*a'=0$, *tem a solução* $a'=\frac{a}{a-1}$ $(a\neq 1)$; *o elemento* 1 *não tem inverso.*

Como há um elemento que não tem inverso, basta isso para afirmar que o conjunto R *não fica munido de uma estrutura de grupo com a operação* $*$.

3) *Notando que* $w_1^3=1$ *e* $1+w_1+w_1^2=0$, *vem* $(x+y\,w_1+z\,w_1^2)\,(x+y\,w_1^2+z\,w_1)=x^2+xy\,w_1^2+xz\,w_1+xy\,w_1+y^2w_1^3+yz\,w_1^2+xz\,w_1^2+yz\,w_1^4+z^2w_1^3=x^2+y^2+z^2+xy\,(w_1^2+w_1)+xz\,(w_1+w_1^2)+yz\,(w_1^2+w_1^4)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz\,w_1^2(1+w_1^2)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$.

II

5597 — 1) Defina sublimite de uma sucessão e prove que todo o ponto de acumulação do conjunto (u_n) é sublimite de u_n.

Mostre que a sucessão

$$v_n(x)=(-1)^n\left[\frac{n}{n+1}+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

é divergente qualquer que seja o número real x. Indique $\overline{\lim}\,v_n(x)$ e $\underline{\lim}\,v_n(x)$.

2) Sendo $\Sigma\,a_n$ uma série de termos positivos convergente e $\Sigma\,u_n$ uma série de termos quaisquer, prove que $\Sigma\,u_n$ é absolutamente convergente quando $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_n}{|u_n|}=h\neq 0,\infty$.

Estude a natureza da série $\Sigma\,\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

R: 1) $\lim\limits_{n=\infty} v_{2n-1}(x)=-(1+e^x)$ $\lim\limits_{n=\infty} v_{2n}(x)=1-e^x$.

A sucessão $v_n(x)$ *é divergente qualquer que seja o número real* x *pois é sempre* $-(1+e^x)\neq 1-e^x$.

$\overline{\lim}\,u_n(x)=1-e^x$ *e* $\underline{\lim}\,u_n(x)=-(1+e^x)$.

2) *Como* $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\eta\,\frac{1}{n}$ $(\lim\limits_{n=\infty}\eta=1)$, *a série dada pode escrever-se na forma* $\Sigma\,\eta\,\frac{1}{n^2}$ *que tem a mesma natureza de* $\Sigma\,\frac{1}{n^2}$ *(convergente).*

III

5598 — 1) Defina extremos absolutos de uma função num certo conjunto e mostre que, para função contínua num intervalo fechado, a sua existência é certa.

Considere $f(x)=x$ no intervalo $]1,3[$ e diga como deve definir $f(1)$ e $f(3)$ para que a função seja desprovida de extremos absolutos em $[1,3]$.

2) Mostre que $g(x)=\sqrt{x^2+x^3}$ não tem derivada em $x=0$. Este ponto é um extremante para a função? Porquê?

3) Calcule $P\,x\,\sqrt[3]{1+x}$.

R: 1) $1<f(1)<3$ *e* $1<f(3)<3$.

2) $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1+x}$ *e portanto* $g'_d(0)=1$ *e* $g'_e(0)=-1$. *O ponto* $x=0$ *é um minimizante porque* $g'_e(0)<0$ *e* $g'_d(0)>0$.

3) $$P\,x\sqrt[3]{1+x}=P\,x(1+x)^{\frac{1}{3}}=\frac{(1+x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}x-$$
$$-\frac{3}{4}P(1+x)^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{(1+x)^4}-$$
$$-\frac{3}{4}\,\frac{(1+x)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{(1+x)^4}-\frac{9}{28}\sqrt[3]{(1+x)^7}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 14-3-964.

5599 — 1) Sendo A e B subconjuntos de um conjunto fundamental U, prove que

$$A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup(B-A)=B.$$

2) Parta da desigualdade $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ para deduzir a relação $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$.

Aproveite o resultado para mostrar que a série harmónica é divergente.

3) Ache os números complexos de módulo 3 cujas imagens estão sobre a parábola $y=x^2-7$.

R: 1) *A proposição sobre conjuntos é equivalente à seguinte proposição:*

$$(x\in A \Rightarrow x\in B)\Longleftrightarrow \{x\in A \vee [x\in B \wedge \sim(x\in A)] \Longleftrightarrow x\in B\}.$$

Fazendo $p = x\in A$ *e* $q = x\in B$, *vem*

$$(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow\{[p\vee(q\wedge\sim p)]\Longleftrightarrow q\}$$

cuja veracidade se pode provar por meio de uma tabela de verdade:

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\Longleftrightarrow$	$\{[p \ \vee(q\wedge\sim p)]\Longleftrightarrow q\}$
0	0	0 1 0	1	0 0 0 1 0
0	1	0 1 1	1	0 1 1 1 1
1	0	1 0 0	1	1 1 0 0 0
1	1	1 1 1	1	1 1 0 1 1

2) *De* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ *vem* $n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1$ *ou* $\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

Fazendo $n=1,2,\cdots,n$, *vem*

$$\log\frac{2}{1}<1$$
$$\log\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$$
$$\log\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

e, somando ordenadamente estas desigualdades, resulta imediatamente $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

Ora $\log(n+1)\to+\infty \Rightarrow 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\to+\infty$ *e assim a série* $\Sigma\dfrac{1}{n}$ *é divergente infinita.*

3) *Os números complexos* $x+iy$ *têm módulo* 3 *e, portanto,* $\sqrt{x^2+y^2}=3$ *ou* $x^2+y^2=9$. *Como as imagens estão sobre a parábola* $y=x^2-7$, *as componentes têm de satisfazer ao sistema de equações* $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x^2-7\end{cases}$ *que tem por soluções* $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\ y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\ y=-2\end{cases}$.

Os números complexos pedidos são $2\sqrt{2}+i$, $-2\sqrt{2}+i$, $\sqrt{5}-2i$ *e* $-\sqrt{5}-2i$.

II

5600 — 1) Se, a partir de uma certa ordem, é $a<u_n<b$ e se $u_n\to u$, demonstre que $a\leqslant u\leqslant b$. O que pode afirmar àcerca do sinal dos termos de uma sucessão cujo limite é positivo (negativo)? Porquê?

Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{(v_n/v)^v - 1}{1 - v_n/v}$, onde $\lim\limits_{n=\infty} v_n = v \neq 0$.

2) Enuncie o critério da razão e prove que a série Σa_n é convergente com $\bar{\rho} < 1$ e divergente com $\underline{\rho} > 1$ $\left(\rho_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

Mostre que a série $\Sigma \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$ é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[-1, r]$ $(r < 1)$.

R: 1) *Como* $\dfrac{v_n}{v} = 1 + \dfrac{v_n - v}{v}$, *vem* $\left(1 + \dfrac{v_n - v}{v}\right)^v =$ $= 1 + v\,\zeta\,\dfrac{v_n - v}{v}$ $(\lim\limits_{n=\infty} \zeta = 1)$ *e portanto*

$$\lim_{n=\infty} \frac{(v_n/v)^v - 1}{1 - v_n/v} = \lim_{n=\infty} \frac{v\,\zeta\,\dfrac{v_n - v}{v}}{\dfrac{v - v_n}{v}} = -v\,.$$

2) *Como* $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)|x|^{n+1}}{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)|x|^n} = |x|$, *o intervalo de convergência da série* $\Sigma \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$ *é* $]-1, 1[$. *Notando que para* $x = 1$ *a série é divergente e que para* $x = -1$ *é convergente, pode garantir-se a convergência uniforme em qualquer intervalo* $[-1, r]$ *com* $r < 1$.

III

5601 — 1) Defina oscilação de uma função num ponto de acumulação do seu campo de existência. Prove que, sendo $f(x)$ contínua em $x = a$, a sua oscilação nesse ponto é nula.

Considere a função $g(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ x^2 + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ e mostre que ela apresenta uma descontinuidade de primeira espécie em $x = 1$. Qual é o salto de $g(x)$ em $x = 1$?

Calcule $g'_d(1)$ e $g'_e(1)$.

2) Calcule $P \dfrac{1}{x^2(x^2 + x + 1)}$.

R: 1) $g(1+0) = \lim\limits_{x=1+0} g(x) = \lim\limits_{x=1+0} (x^2 + 1) = 2$

$g(1-0) = \lim\limits_{x=1-0} g(x) = \lim\limits_{x=1-0} x = 1$

e como $g(1-0) < g(1) = g(1+0)$ *vem* $\omega(1) = g(1+0) - g(1-0) = 1$ *e* $x = 1$ *é um ponto de descontinuidade de primeira espécie. O salto é* $s(1) = g(1+0) - g(1-0) = 1$.

$$g'_d(1) = \lim_{x=1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x=1+0} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x=1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x=1+0} (x + 1) = 2$$

$$g'_e(1) = \lim_{x=1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x=1-0} \frac{x - 2}{x - 1} = +\infty$$

2) $$\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{a_0 + a_1 x}{x^2} + \frac{S_0}{x^2 + x + 1}.$$

Cálculo de a_0 e a_1:

Considerando $R_0(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ *e dividindo o numerador pelo denominador até o quociente atingir o grau* 1, *obtém-se* $a_0 = 1$ *e* $a_1 = -1$.

Cálculo de S_0:

Considerando $R_\Delta(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *e ordenando o denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + x + 1$, *vem* $R_\Delta(x) = \dfrac{1}{-(x+1) + \Delta}$. *Como* 1 *não é divisível por* $-(x+1)$, *faça-se* $[1 - \alpha_0(x^2 + x + 1)]_{-1} = 0$, *o que dá* $\alpha_0 = 1$. *O coeficiente corrigido será* $-x^2 - x$ *que, dividido por* $-(x+1)$, *dá* $S_0 = x$. *Então*

$$\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{1 - x}{x^2} + \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{3}{4} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$P\,\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{x} - \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Ponto de Informação (1.ª chamada) — 11-6-64.

I

5602 — 1) Prove que toda a série de derivadas é primitivável o termo em qualquer intervalo de convergência uniforme.

Ache o desenvolvimento em série de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ segundo as potências de $1/x$ e indique os valores de x para os quais é válido.

2) Sabendo que as raízes da derivada de $f(x) = 18x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 6x + 6$ são racionais, mostre que $f(x)$ não tem raízes reais. Qual é a natureza das raízes de $f(x)$? Porquê?

R: 1) *Utilizando a fórmula do binómio vem*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{x^4} + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{x^{2n}} + \cdots$$

válido para $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$ *ou* $|x| > 1$.

2) *Utilizando o método de* Newton, *calculam-se fàcilmente os limites excedente e deficiente das raízes de* $f(x)$: $L = 1$ e $l = -1$.

Pesquisando as raízes da derivada $f'(x) = 6(12x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$, *obtém-se* $x_1' = -\dfrac{1}{2}, x_2' = \dfrac{1}{2}, x_3' = \dfrac{1}{3}$ *e construindo a sucessão de* Rolle *para* $f(x)$

	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/3$	1
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

conclui-se imediatamente que $f(x)$ *não tem zeros reais.*

As raízes de $f(x)$ *são complexas porque todo o polinómio de grau* n *tem exactamente* n *raízes. Como* $f(x)$ *é do quarto grau e é polinómio real, tem quatro raízes complexas da forma* $p \pm iq$, $r \pm is$.

II

5603 — 1) Dada a equação $f(x,y) = 0$ e sendo $f(a,b) = 0$, enuncie as condições de existência de uma função implícita $y = \varphi(x)$ na vizinhança de $x = a$.

Mostre que, sendo $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ e $f_y'(a,b) \neq 0$, a função $y = \varphi(x)$ é diferenciável em $x = a$.

2) De uma certa função $g(x,y)$ conhece-se a seguinte tabela de valores:

$x \backslash y$	0	1
0	2	-1
1	3	5

Calcule $g(2,0)$, $g(2,1)$, $g(0,2)$, $g(1,2)$ e $g(2,2)$, utilizando a teoria da interpolação.

Sugestão: Considere uma das variáveis constante e interpole em relação à outra. Não é necessária a construção dos polinómios interpoladores

R: 2)

x	g(x, 0)	Δ g(x, 0)
0	2	1
1	3	
2		

$g(2,0) = 1 + 3 = 4$

x	g(x, 1)	Δ g(x, 1)
0	-1	6
1	5	
2		

$g(2,1) = 6 + 5 = 11$

y	g(0, y)	Δ g(0, y)
0	2	-3
1	-1	
2		

$g(0,2) = -3 - 1 = -4$

y	g(1, y)	Δ g(1, y)
0	3	2
1	5	
2		

$g(1,2) = 2 + 5 = 7$

y	g(2, y)	Δ g(2, y)
0	4	7
1	11	
2		

$g(2,2) = 7 + 11 = 18$

III

5604 — 1) Prove que a transposta do produto de duas matrizes é o produto por ordem inversa das transpostas dos factores.

Supondo que $A = |a_i^j|$, de ordem n, é singular, mostre que existe sempre uma matriz $B = |b_i^j| \neq 0$ de ordem n, tal que $AB = 0$.

2) Estude o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x + y + 2z + t &= 5 \\ 2x + 3y - z - 2t &= 2 \\ 4x + 5y + 3z \quad &= k \end{aligned}$$

por meio da teoria dos determinantes.

R: 1) *Sendo* $|A| = 0$, *o problema da existência de uma matriz* $B \neq 0$ *tal que* $a_i^\alpha b_\alpha^k = 0$ *esclarece-se considerando o sistema homogéneo* $a_i^\alpha x_\alpha = 0$. *Neste caso o sistema é indeterminado e portanto tem soluções não nulas.*

2) *A matriz do sistema é* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *cuja característica é* 2. *Tomando para determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, *o único determinante característico* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & k \end{vmatrix} = k - 12$ *é diferente de zero quando* $k \neq 12$ *e igual a zero quando* $k = 12$. *Portanto, de acordo com o teorema de* ROUCHÉ, *o sistema é impossível com* $k \neq 12$ *e possível com* $k = 12$. *Neste segundo caso o sistema é indeterminado de grau 2 e a sua solução geral obtém-se do sistema principal*

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 5 \\ 2x + 3y - z - 2t = 2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 5 - 2z - t \\ 2x + 3y = 2 + z + 2t \end{cases}$$

e, pela regra de CRAMER, *vem*

$$x = \begin{vmatrix} 5-2z-t & 1 \\ 2+z+2t & 3 \end{vmatrix} = 13 - 7z - 5t$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 5-2z-t \\ 2 & 2-z+2t \end{vmatrix} = -8 + 5z + 4t.$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º Ponto de Informação (2.ª Chamada) — 18-6-64.

I

5605 — 1) Deduza a fórmula do binómio, que permite obter o desenvolvimento em série de MAC LAURIN de $(1+x)^\alpha$.

Recorra aos desenvolvimentos em série para calcular

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \log(1+x)}.$$

2) Mostre que a condição necessária e suficiente para que $Y = mX + p$ seja assíntota da imagem de $f(x)$ é que $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ com $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$.

Determine a e b por forma que $Y = 2X - 3$ seja assíntota da imagem de $y = \dfrac{ax^2+1}{bx+2}$.

R:

1) $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots$$

desenvolvimentos todos válidos para $|x| < 1$.

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \log(1+x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)}{x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{5}{24}x^5 + \cdots}{x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots} = \frac{1}{6}.$$

2) $$\frac{ax^2+1}{bx+2} = \frac{a}{b}x - \frac{2a}{b^2} + \frac{1 + \frac{2a}{b^2}}{bx+2}, \ \textit{com}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1 + \frac{2a}{b^2}}{bx+2} = 0.$$

Então

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = 2 \\ -\dfrac{2a}{b^2} = -3 \end{cases} \quad \textit{donde} \quad \begin{cases} a = 8/3 \\ b = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

II

5606 — 1) Sendo $x = g(t)$ e $y = h(t)$ diferenciáveis no ponto $t = t_0$ e $f(x,y)$ diferenciável no ponto correspondente $g(t_0) = a$, $h(t_0) = b$, mostre que a função $F(t) = f[g(t), h(t)]$ é diferenciável para $t = t_0$.

2) Relacione as diferenças divididas com as diferenças ordinárias e deduza a fórmula interpoladora de GREGORY-NEWTON a partir da de NEWTON.

III

5607 — 1) Deduza das relações de LAPLACE que toda a matriz regular tem inversa, determinando ao mesmo tempo asua composição. Matriz singular tem inversa? Porquê?

Sendo A^{-1} a matriz inversa de A, prove as seguintes propriedades:

$$a)\ (A^{-1})^{-1} = A$$

$$b)\ (A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}.$$

2) Considere o sistema homogéneo $AX = 0$ simplesmente indeterminado. Sendo X_0 uma solução não nula, prove que toda a solução X se pode escrever na forma $X = \beta X_0$ (β constante arbitrária).

Aproveite o resultado para mostrar que, em matriz quadrada singular, filas paralelas tem complementos proporcionais.

R: 1) a) *Da própria definição da matriz* A^{-1} *se conclui imediatamente que* A *é a inversa de* A^{-1}.

b) $$(A^{n})^{-1} = (A \cdot A \cdots A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1} = (A^{-1})^{n}.$$

2) *Sendo* A *matriz singular de ordem* n, *se a característica de* A *for inferior a* $n-1$ *então os complementos são todos nulos e portanto filas têm complementos proporcionais. Se a característica de* A *for* $n-1$ *então há pelo menos um complemento significativo e o sistema homogéneo* $a_i^{\alpha} x_{\alpha} = 0$ *é simplesmente indeterminado. Como* $a_i^{\alpha} A_k^{\alpha} = 0$ (*teorema de* Laplace) *designando por* $A_j^1, \cdots A_j^n$) *a solução não nula, vem*

$$\frac{A_k^1}{A_j^1} = \frac{A_k^2}{A_j^2} = \cdots = \frac{A_k^n}{A_j^n}$$

pois todas as soluções do sistema são proporcionais.

Enunciados e soluções dos N.os 5596 a 5607 de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Exame final da 6.ª cadeira — Época de Setembro — 1962-1963.

Responda apenas a quatro questões.

I

5608 — Considere o campo vectorial definido pelo vector genérico $\mathbf{v} = (y+z)\,\mathbf{i} + (z+x)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$.

a) Mostre que o campo é conservativo e determine uma sua função potencial.

b) Calcule a circulação do vector v ao longo dum arco de circunferência partindo do ponto $A = (1,1,1)$ e terminando no ponto $B = (2,2,2)$.

II

5609 — *a*) Represente por uma série trigonométrica de Fourier *de senos* a função

$$f(x) = x + 1$$

no intervalo $]0, \pi[$.

b) Represente gràficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ a função definida pela série a que se refere a alínea anterior.

III

5610 — *a*) Fórmula de Riemann.

b) Use a fórmula anterior para estabelecer que a área dum domínio simplesmente conexo limitado por uma linha fechada simples regular por secções é dada por

$$\text{área} = 1/2 \int_{L^+} x\,dy - y\,dx.$$

IV

5611 — Considere o integral

$$\iiint_D (x\,y)^2\,dv$$

sendo D o domínio limitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Efectue no integral dado a mudança de variáveis definida por

$$x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta.$$

b) Calcule o valor do integral.

V

5612 — Determine as soluções particulares $\varphi(x)$ da equação diferencial

$$3y''' - 5y'' + 2y' = x$$

para as quais se tenha $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0)$.

Enunciados dos N.os 5608 a 5612 de A. César de Freitas

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final** — 11-6-64.

5613 — 1. *a*) Indique as propriedades mais importantes das equações diferenciais lineares de ordem n.

b) Se a equação tem os coeficientes constantes, como obter a expressão geral das soluções? A que condição devem obedecer as raízes da equação característica para que qualquer solução da equação homogénea se mantenha limitada quando a variável independente tende para $+\infty$?

c) Resolva o problema de valores iniciais $\begin{cases} y''' - y' = 2\cos x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \,. \end{cases}$

2. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base o. n. fixa de R^3, $\mathrm{t}(s)$, $\mathrm{n}(s)$, $\mathrm{b}(s)$ o triedro de Serret de uma curva do espaço.

a) Escreva as fórmulas de Frenet-Serret.

b) Pondo $\begin{bmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{n} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, mostre que

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{n} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{n} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} \quad \text{com } C = \frac{dA}{ds} \cdot A^{-1},$$

e dê a expressão da matriz C em função da curvatura e da torção da curva dada.

c) Determine, em particular, as matrizes A e C para a linha $\mathrm{r} = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,e_1 + a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,e_2 + b\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,e_3$ (a e b constantes). Quais as equações intrínsecas desta linha?

3. Considerando a linha Γ do plano XOZ definida por $\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = 0 \end{cases}$ $(z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$.

a) Verifique que a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ gerada por Γ quando executa uma rotação de 360º em torno de OZ se pode escrever na forma $x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2$.

b) Designando por $\mathcal{D}$ o domínio do plano XOZ definido por $\{(x, z) : z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \wedge 0 \leqslant x \leqslant \varphi(z)\}$, mostre que a definição dada para área de uma superfície permite concluir que a área de $\mathcal{S}$ é dada por

$$A = 4 \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{[\varphi(z)]^2 \{1 + [\varphi'(z)]^2\}}{[\varphi(z)]^2 - x^2}}\, dx\, dz \,.$$

c) Mostre que a expressão anterior conduz a $A = \int_{z_0}^{z_1} 2\pi\varphi(z)\,ds$, designando por s o comprimento de arco referente a Γ.

d) Atendendo a que o centro de gravidade da linha Γ (suposta homogénea e de comprimento L) tem uma abcissa (no plano XOZ) dada por $\xi = \left(\int_\Gamma x\,ds\right)/L$, estabeleça o seguinte teorema:

A área gerada por uma linha plana homogénea quando executa uma rotação em torno de um eixo do seu plano, que a não corte, é igual ao produto do comprimento da linha pelo perímetro da circunferência descrita pelo seu centro de gravidade.

Enunciado N.º 5613 de F. R. Dias Agudo

ERRATA

«**Gazeta de Matemática**» n.º 88-89 — *O enunciado correcto do problema 5549 — 5), pág. 38, é o seguinte:*

«Sejam f e g funções reais definidas em R, contínuas e cujas restrições a Q são iguais: $f_{|Q} = g_{|Q}$. Mostre que $f = g$».

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

156 — A. Tortrat — **Calcul des Probabilités**, Masson & Cie., (1963) Paris, VIII + 168 pp. Preço: NF 27,45.

O livro aqui em crítica foi publicado em princípios do ano passado, precisamente numa colecção de monografias de Matemática, onde já anteriormente aparecera um livro sobre o mesmo assunto (J. Bass (1962), *Éléments du Calcul des Probabilités*), e onde também recentemente foi publicada uma obra notável sobre a moderna teoria das Probabilidades (J. Neveau (1964), *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*). Se o livro de Bass é uma obra de carácter «clássico» (no domínio das Probabilidades), e o de Neveau é de bases