F. C. L. — CÁLCULO INFINITESIMAL — **Exame final — 11-6-64.**

5613 — 1. *a*) Indique as propriedades mais importantes das equações diferenciais lineares de ordem n.

b) Se a equação tem os coeficientes constantes, como obter a expressão geral das soluções? A que condição devem obedecer as raízes da equação característica para que qualquer solução da equação homogénea se mantenha limitada quando a variável independente tende para $+\infty$?

c) Resolva o problema de valores iniciais
$$\begin{cases} y''' - y' = 2\cos x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \,. \end{cases}$$

2. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base o. n. fixa de R^3, $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ o triedro de SERRET de uma curva do espaço.

a) Escreva as fórmulas de FRENET-SERRET.

b) Pondo $\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$, mostre que
$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{com } C = \frac{dA}{ds} \cdot A^{-1},$$
e dê a expressão da matriz C em função da curvatura e da torção da curva dada.

c) Determine, em particular, as matrizes A e C para a linha $\mathbf{r} = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{e}_1 + a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{e}_2 + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{e}_3$ (a e b constantes). Quais as equações intrínsecas desta linha?

3. Considerando a linha Γ do plano XOZ definida por $\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = 0 \end{cases}$ $(z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$.

a) Verifique que a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ gerada por Γ quando executa uma rotação de 360° em torno de OZ se pode escrever na forma $x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2$.

b) Designando por $\mathcal{D}$ o domínio do plano XOZ definido por $\{(x,z) : z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \wedge 0 \leqslant x \leqslant \varphi(z)\}$, mostre que a definição dada para área de uma superfície permite concluir que a área de $\mathcal{S}$ é dada por
$$A = 4\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{[\varphi(z)]^2\{1 + [\varphi'(z)]^2\}}{[\varphi(z)]^2 - x^2}}\, dx\, dz\,.$$

c) Mostre que a expressão anterior conduz a $A = \int_{z_0}^{z_1} 2\pi\varphi(z)\, ds$, designando por s o comprimento de arco referente a Γ.

d) Atendendo a que o centro de gravidade da linha Γ (suposta homogénea e de comprimento L) tem uma abcissa (no plano XOZ) dada por $\xi = \left(\int_\Gamma x\, ds\right)/L$, estabeleça o seguinte teorema:

A área gerada por uma linha plana homogénea quando executa uma rotação em torno de um eixo do seu plano, que a não corte, é igual ao produto do comprimento da linha pelo perímetro da circunferência descrita pelo seu centro de gravidade.

Enunciado N.º 5613 de F. R. Dias Agudo

ERRATA

«**Gazeta de Matemática**» n.º 88-89 — *O enunciado correcto do problema 5549 — 5), pág. 38, é o seguinte:*

«Sejam f e g funções reais definidas em R, contínuas e cujas restrições a Q são iguais: $f_{|Q} = g_{|Q}$. Mostre que $f = g$».

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

156 — A. TORTRAT — **Calcul des Probabilités**, Masson & Cie., (1963) Paris, VIII + 168 pp.
Preço: NF 27,45.

O livro aqui em crítica foi publicado em princípios do ano passado, precisamente numa colecção de monografias de Matemática, onde já anteriormente aparecera um livro sobre o mesmo assunto (J. BASS (1962), *Éléments du Calcul des Probabilités*), e onde também recentemente foi publicada uma obra notável sobre a moderna teoria das Probabilidades (J. NEVEAU (1964), *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*). Se o livro de BASS é uma obra de carácter «clássico» (no domínio das Probabilidades), e o de NEVEAU é de bases nitidamente modernas, na nossa opinião, este trabalho de TORTRAT pretende reunir ao mesmo tempo os dois aspectos da disciplina.

O A., professor da especialidade na Faculdade de Ciências de Paris, começa por afirmar no Intróito que «a matéria deste livro constitui um curso da licenciatura [em Ciências Matemáticas], de extenção reduzida, correspondente a uma cadeira semestral de opção, com um máximo de três horas semanais» ; e é dentro desta limitação que a matéria exposta no livro é apresentada, conduzindo o A. a uma tarefa delicada e ingrata, de selecção e de apresentação. Não sabemos quais os conhecimentos matemáticos de que dispõe o Leitor a que este livro se destina, mas não devemos andar longe, admitindo que são constituídos pelas matérias usualmente exigíveis ao aluno com um ou dois anos de iniciação nas Matemáticas Superiores.

O livro é quase todo ele de leitura muito fácil e acessível a todos os que tenham um treino básico anterior em Teoria da Medida. Embora este requisito não seja essencial, estamos em crer que as breves notas dispostas pelo livro, destinadas a suprir a possível falta de preparação do Leitor neste capítulo, não são suficientes para quem pela primeira vez contacte com estas matérias. Por outro lado, o programa que o livro pretende cobrir é excessivamonte extenso, de modo que alguns aspectos importantes foram simplesmente ignorados, a fim de manter o livro acessível e de tamanho reduzido. Outras vezes o A. socorre-se do sistema de enunciar resultados mais complexos, sem os derivar ou justificar. Assim sucede entre outros com os teoremas (importantíssimos na Teoria das Probabilidades) de FUBINI, EGOROFF, BEPPO-LEVI LEBESGUE (teor. da conv. majorada), BOREL-CANTELLI, RADON-NIKODYM e FISCHER-RIESZ. Para este último, e. g. o A. esboça uma demonstração que deixa ao cuidado do Leitor, mas duvidamos que o principiante nestes assuntos possa deduzir a demonstração (rigorosa) pelos seus próprios meios. O mesmo sucede, aliás, para o teor. LYAPUNOFF da convergência majorada. O teor. de LYAPUNOFF é apresentado ao Leitor como exercício, aqui sem quaisquer outras indicações para a demonstração. Mesmo assim, é pena que o mesmo critério não tenha sido seguido relativamente a outros resultados que bem caberiam dentro do âmbito desta Introdução. Assim, os teoremas de LEBESGUE e de KOLMOGOROFF, os espaços L_p, as derivadas à RADON-NIKODYM, etc., são completamente ignorados, se bem que estreitamente ligados com a matéria exposta. Também as aplicações da teoria são muitas vezes difíceis de descortinar, e só muito esporàdicamente se indicam algumas aplicações no domínio da Estatística. Aqui e além surgem exercícios, a maior parte das vezes com o carácter de complementos à matéria desenvolvida. Este método de simplificar as coisas parece-nos bastante honesto, preferível mesmo ao de expôr as questões de maneira menos rigorosa do ponto de vista matemático (caso infelizmente bastante em voga entre alguns cultores da Teoria das Probabilidades e da Estatística Matemática).

O livro tem 51 parágrafos, que se agrupam em 11 capítulos, dos quais vamos, numa breve resenha, enunciar os títulos, o que por si só nos dá uma ideia dos assuntos tratados: Introdução e Axiomas Fundamentais; Espaços Mensuráveis e Variáveis Aleatórias; Funções de Distribuição; Distribuições Discretas; Integrais à Stieltjes e Esperanças Matemáticas; Função de Distribuição e Função Característica; Composição de duas Funções de Distribuição; Probabilidades Condicionais; Regressão e Correlação; Leis Normais; Aproximação de Leis Binomiais por Leis Normais e Leis de POISSON; Convergência para uma Lei duma Sucessão de Variáveis Aleatórias; Convergência em Probabilidade, Quase Certa e em Média Quadrática. Segue-se uma pequena bibliografia das obras clássicas da especialidade e cujo conhecimento se deve esperar de todos os que pretendem estudar honestamente o Cálculo das Probabilidades.

Na elaboração deste livro o A. teve grandes preocupações pedagógicas; infelizmente, porém, nem sempre usa o rigor matemático (e probabilístico) que seria de esperar, especialmente nos primeiros capítulos. Assim, e. g. logo nas duas primeiras linhas do texto, a definição de experiência aleatória é muito imprecisa, e depois na página seguinte o A. confunde acontecimento (resultado de uma experiência aleatória) com acontecimento elementar. Definições vagas aparecem depois para f. mensurável, variável aleatória, f. truncada, e outras.

O livro tem uma apresentação cuidada, mas é muito pobre do ponto de vista gráfico. Além de numerosas «gralhas» tipográficas, que vão desde erros sem importância à falta de sinais de integral (e. g. na fórmula do teor. de BEPPO-LEVI), e outros, o A. emprega notações que nem sempre são as mais cómodas e usuais e que podem originar confusão frequente ao Leitor desprevenido. Assim, por toda a parte é usado o $'$ para indicar o complementar (de conjunto ou acontecimento); mas mais do que uma vez surge A' para indicar um elemento distinto do complementar de A: $A'_n = A_n - A_{n-1}$ (p. 20), ou até mesmo $A' \subset A$ (p. 26). O (*) para as notas no fim da página leva também a erros nos parágrafos dedicados às medidas exterior e interior. Na p. 27 aparece (1) no corpo do texto e (*) no rodapé! A esperança matemática da v. a. X é quase sempre representada por $\overline{X}$ e só excepcionalmente por $\mathfrak{M}$ (X); esta notação origina alguns erros no capítulo sobre a regressão e a correlação, aí se encontrando também (X, Y) para designar não uma v. a. bidimensional, mas a covariância entre X e Y, em vez de cov (X, Y), às vezes usada, ou outra parecida. Nenhum dos símbolos utilizados para designar v. a. gausseana, f. d. normal ou função de densidade normal é usual nem mesmo se encontra nos tratados indicados na bibliografia. Num dos exercícios é evidente a falta de distinção entre a σ — álgebra de Borel de um produto cartesiano de classes de conjuntos e o produto cartesiano das σ — álgebras de Borel das mesmas classes. No enunciado do teor. de Radon-Nikodym (no livro aparece sempre Nicodym), o conjunto sobre o qual se efectua a integração é mensurável relativamente a μ, mas pode não ser de medida ν finita. O teor. 2 do § 49 pode induzir em erro pela maneira como está formulado, uma vez que a conv. em prob. não implica a conv. quase certa, como se pode mostrar com o contra-exemplo da sucessão de Fréchet, a que o A., aliás, não faz a mínima referência. A propósito, a numeração dos parágrafos ao alto das páginas, a partir da p. 150 está trocada. O A. deriva repetidas vezes sob o sinal de integral, sem nunca justificar se tal procedimento é válido.

Apesar de todas estas pequenas falhas, difíceis ou mesmo impossíveis de evitar num livro deste tipo, destinado a abraçar uma área tão vasta da Teoria das Probabilidades, trata-se de uma obra de real valor, que poderá com proveito ser lida por todos os aprendizes de Estatística das nossas Faculdades de Ciências ou mesmo da Universidade Técnica, desde que, como dissemos no início, estejam de posse do instrumental básico da Teoria da Medida. E até mesmo o especialista, talvez encontre algo de novo nos últimos capítulos do livro, ou uma exposição diferente de outros resultados já conhecidos.

J. Marques Henriques

157 — Fréderic Riesz — **Oeuvres Complètes** — Académie des Sciences de Hongrie — Budapest — 1960.

Fréderic Riesz não é apenas um dos matemáticos húngaros mais eminentes; é, com efeito, à escala mundial um dos que maior influência exerceram sobre os fundamentos e o desenvolvimento dos ramos modernos da análise matemática. As noções por ele introduzidas, os métodos elaborados e os resultados que lhe são devidos, os processos de demonstração por ele criados pertencem ao domínio clássico das funções de variável real, da análise funcional e da Topologia geral. O rápido desenvolvimento da análise funcional observado nestas últimas dezenas de anos deve-se precisamente ao impulso dado pelas descobertas de Riesz, estabelecidas há meio século, relativas à teoria dos espaços funcionais e às operações lineares que nela são definidas.

A Academia das Ciências da Hungria empreende uma missão cultural publicando as obras completas de Frederico Riesz: os trabalhos dispersos em numerosas revistas tornam-se assim muito mais acessíveis.

Em seguida à enumeração cronológica das obras de Riesz, as Obras Completas publicam por reprodução fotográfica as mesmas obras agrupadas pelos assuntos seguintes:

A. Topologia — 10 trabalhos
B. Teoria das funções reais — 18 trabalhos
C. Espaços funcionais — 18 trabalhos
D. Funções analíticas — 8 trabalhos
E. Funções harmónicas e sub-harmónicas — 6 trabalhos
F. Análise funcional — 16 trabalhos
G. Teoria ergódica — 8 trabalhos
H. Geometria — 2 trabalhos
I. Questões diversas — 18 trabalhos

e terminam por dois Apêndices de 13 e 90 páginas, respectivamente, que contêm as traduções em língua francesa dos trabalhos publicados originàriamente em húngaro.

Entre os trabalhos encontra-se o livro publicado por Riesz em 1913 e editado por Gauthier-Villars: *Os sistemas de equações lineares a uma infinidade de incógnitas*; em contrapartida os Editores excluíram as célebres «Lições de Análise Funcional» publicados em 1952 em colaboração com Bela Szokefalvi-Nagy alegando ter Riesz colaborado apenas em parte da redacção.

Riesz nasceu em 1880 em Györ, frequentou a Escola Politécnica de Zürich e continuou os seus estudos em Budapest e Göttingen.

As Obras Completas de Riesz tornam-se assim de uma grande acessibilidade a quem não domina a língua materna do eminente matemático.