



EDUARDO
MARQUES DE SÁ
Universidade
de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

CARTOGRAFANDO A BRAZUCA

Uma bola de futebol que tem muito de cubo sem ser cubo, o mesmo grafo de arestas e as mesmas simetrias rotacionais, que é mosaico esférico dum só ladrilho seis vezes repetido, cujas peças se entrelaçam como um *puzzle* escheriano... Perante tal coisa um matemático, mesmo em férias, não fica indiferente.



O Mundial de 2014 correu mal às nossas cores, e pior ainda às do país anfitrião. Mas a bola Brazuca era uma maravilha. A publicidade superlativa do fabricante vendedor falava do nascimento dum ícone (do qual, passada a febre da compra, pouco mais se falou), da sinuosidade do desenho inspirado nos meandros do Amazonas, etc. Depois de a coisa dar o que deu, falou-se de conspiração, que o esférico fora concebido por alemães e fabricado com tecnologia alemã, que eles sabiam bem os meandros da bola, que ela de Amazonas tinha pouco, etc.

Do lado menos cândido das coisas, a mão-de-obra foi paquistanesa, não infantil desta vez, com salários que nos envergonham. Este ano, os painéis da Brazuca migraram para a Taça das Nações Africanas, pintados de outras cores; FIFA e C.^{ia} pouparam nas ideias, nas máquinas e não se sabe se no preço da mão-de-obra recrutada na chácara de Obiang. Talvez os meandros destes negócios venham à superfície na sequência das investigações em curso...

Todos se foram queixando dela: os cabeceadores porque era rija demais, os guarda-redes porque o desenho sinuoso não deixava ler a rotação que trazia; os futebolistas de blogue queixaram-se do óbvio, que os donos do jogo preferiam badalar uma 'nova colecção' a melhorar o que existia. A novidade vende mas a qualidade nem por isso, e os donos do negócio sabem disso.

A FAMÍLIA BRAZUCA

A Brazuca de 2014 tem vários atributos de sedução matemática. De entre as bolas VIP ela é a única quiral, isto é, 'distinta' da sua imagem espelhada. Os pontos triplos de junção de costuras são os oito vértices dum cubo e o seu grupo de simetrias é o grupo de rotações que deixa esse cubo invariante. Por outro lado, quanto a painéis e costuras ela é um mosaico esférico de um só ladrilho; são seis ladrilhos que se entrelaçam evocando desenhos famosos de M. C. Escher e objectos de inspiração escheriana.¹ Mas o

facto mais notável é a Brazuca ser 'planificável', no mesmo sentido em que a Telstar o é: ambas são fabricadas com painéis planos cosidos ou grudados uns aos outros, adquirin-

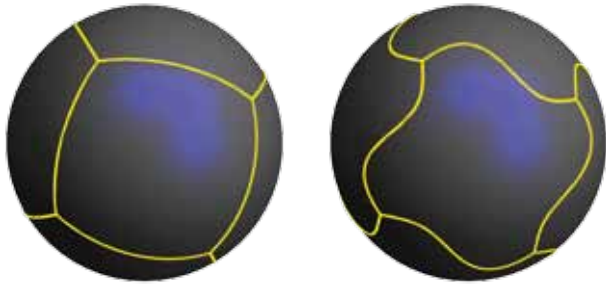


Figura 1. Deformação dum cubo esférico.

do forma esférica por suave deformação dos painéis. Só que a Telstar tem 32 painéis e a Brazuca apenas seis!

Ao insuflar-se um cubo para obter uma esfera, o resultado é o que a figura 1 ilustra, à esquerda, com enorme distensão das partes centrais das faces e retesamento das costuras. É um *cubo esférico*, com arestas que são arcos de círculos máximos. Fixados os vértices do cubo, substitua-se, como na figura 1, cada aresta por uma curva esférica simples, a que chamamos *costura*. Vamos supor que nenhuma destas costuras se cruza propriamente com outra; nessas condições, a configuração obtida tem seis faces que são regiões esféricas delimitadas por quatro costuras cada uma. Suporemos sempre o seguinte:

1. As costuras são *congruentes* entre si, significando isto que cada uma pode ocupar o lugar doutra qualquer mediante uma rotação da bola;²
2. Cada costura é centrossimétrica, isto é, a rotação da bola que troca as extremidades da costura transforma a costura em si própria.

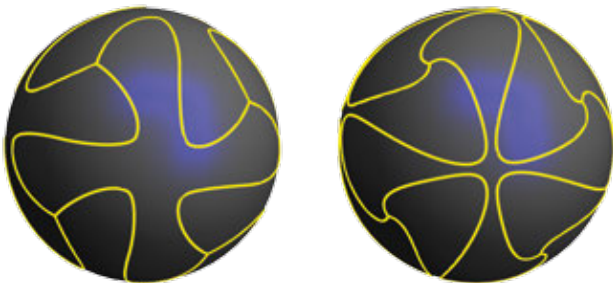


Figura 2. Duas brazucas.

A uma configuração nestas condições chamamos *brazuca*. A de 2014 é um exemplo de brazuca. Na figura 2 damos mais dois exemplos dos muitos que poderíamos dar, pois existem tantas brazucas quantos números reais.³ A do lado esquerdo será modelo para o que segue e, pela parecença com a 'legítima', dá-se-lhe o mesmo nome próprio. A ausência de critério de ordenação das brazucas sugere a seguinte paráfrase da conjectura de J. H. Conway a propósito da curva da bola de ténis: duas definições da melhor brazuca dão resultados diferentes, excepto quando são trivialmente iguais. (Traduzido de [4]. "Traduttore...").

Problema. Determinar uma figura plana destinada a produzir seis painéis flexíveis iguais que, adequadamente colados como se monta um cubo, produzam um sólido de boa esfericidade.

CARTAS DE MERCATOR

As projecções planas de regiões extensas da superfície terrestre criadas por cartógrafos, desde há séculos, oferecem uma solução promissora. De entre as muitas projecções disponíveis, a escolha recaiu sobre a que o geógrafo e cartógrafo Gerardus Mercator (1512-1594) criou em 1569 e que continua a ser uma das mais populares no desenho de mapas. Em primeiro lugar, fixa-se um referencial na bola a cartografar que se supõe ter raio 1: escolhem-se pontos antípodas, *N* e *S*, que farão os papéis de pólos norte e sul e que, em consequência, determinam o equador de serviço. A bola é envolvida por uma folha cilíndrica que lhe é tangente ao longo do equador seleccionados. Cada ponto *P* da superfície esférica é transformado num ponto da geratriz do cilindro determinada pelo semi-meridiano de *P*, como

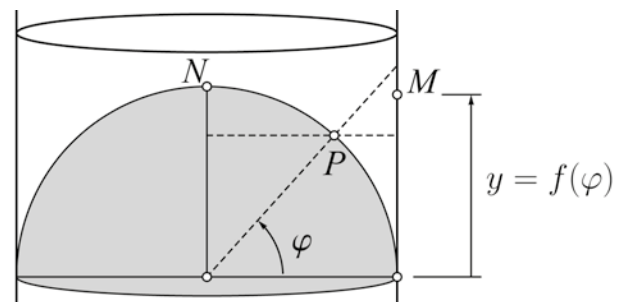


Figura3. Projecção cilíndrica.

¹ A FIFA não se lembrou desta!

² Aqui, as rotações da bola são as que lhe fixam o centro.

³ Para quem aceite o axioma da escolha e a hipótese do contínuo...

na figura 3; a cota y a que se coloca a imagem de P é, nas chamadas *projeções cilíndricas*, uma função de apenas φ , a latitude de P , à escolha do cartógrafo. A opção de Mercator foi o ponto M à cota

$$y = f(\varphi) = \ln(\varphi + \sec \varphi).$$

Recorde-se que os logaritmos só viriam a ser inventados em 1614, por John Napier. O método de construção de Mercator seria provavelmente de tipo geométrico incremental como bem mostrara Pedro Nunes. A projeção de Mercator destina-se a produzir mapas nos quais as linhas de rumo são rectilíneas. Estas linhas, mais tarde chamadas *loxodrómicas*, são as trajectórias sobre o globo seguidas por um navio que navegasse a rumo constante (assim fazendo um ângulo fixo com os meridianos que fosse atravessando); foi o nosso grande matemático e cosmógrafo Pedro Nunes que provou, de 1537 a 1566, serem as linhas de rumo espirais esféricas que – no caso de o rumo não ser Norte, Sul, Este ou Oeste – se aproximam mais e mais dum pólo, espiralando em seu redor sem nunca lhe tocar. A obra maior de Nunes sobre as linhas de rumo está em

[5], existindo nesta *Gazeta* uma excelente resenha do assunto, [6].

Um dos traços mais marcantes da projeção de Mercator é a sua *conformidade*: se duas linhas da bola se cruzam num ponto, que não seja pólo, segundo certo ângulo, as suas imagens na carta cilíndrica cruzam-se segundo esse mesmo ângulo. Imagine o leitor uma Brazuca desenhada sobre o nosso Globo envolto num cilindro, como na figura ao lado. As costuras da Brazuca e as do planeta são projectadas à Mercator, constituindo um sistema de linhas muito sinuosas que delimitam sobre o cilindro as projeções das faces; na figura, as deformações das faces da bola são óbvias, não sendo tão óbvias as das linhas de costa terrestres por estarmos habituado a elas.

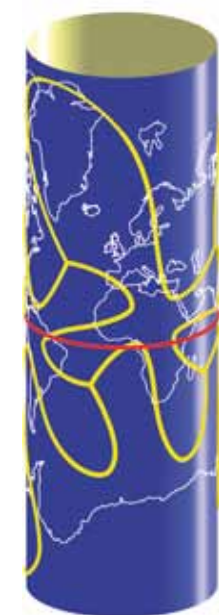


Figura 4.

Querendo nós utilizar o sistema coordenado tradicional, será melhor olhar apenas para uma face e desenhá-la sobre o globo na posição particular que a figura 5 ilustra. Mais explicitamente, o centro da face fica sobre o equador e os braços Leste e Oeste alinham-se com o equador, ainda dentro das zonas tropicais onde o método de Mercator produz deformação pouco acentuada. Para nos livrarmos dos

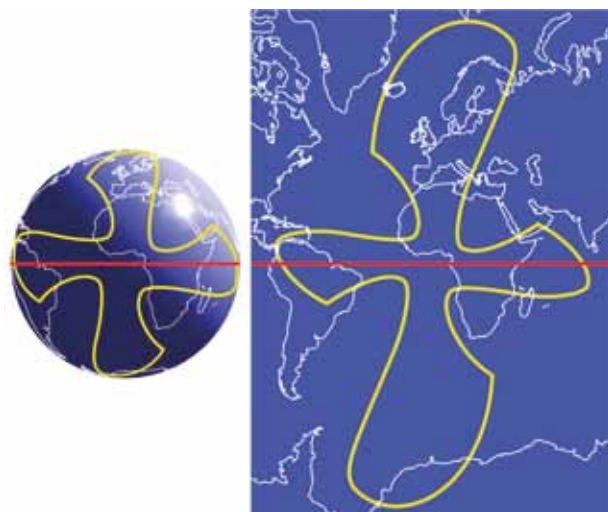


Figura 5. Uma face em posição alinhada.

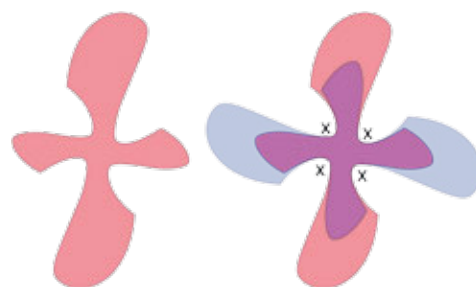


Figura 6. A cruz violeta.

braços muito deformados Norte e Sul, executamos o artifício ilustrado na figura 6: a projeção de Mercator da figura anterior, a cruz rosa de quatro braços, é intersectada com a cópia azul de si mesma rodada de 90° em torno do centro. Obtemos uma cruz violeta, que é a resposta que este *Canto Delfico* dá ao problema proposto. É meramente fortuito que o resultado final seja dado pela intersecção; como veremos, a questão fundamental é a definição de quatro pontos x , ditos 'de concatenação' dos braços.

UMA BRAZUCA OCTÓPODE

O caso duma brazuca gerada por uma curva de maior sinuosidade revela as dificuldades e limitações do método usado. A figura 7 mostra uma face duma nova brazuca; dos oito braços, escolhemos dois adjacentes. Para reduzir deformações, cartografa-se cada braço a respeito do melhor equador possível de entre os que passam pelo centro da face.⁴ As duas projeções da octópode são as que se mostram na figura 7, nas quais os braços A e B estão em posições de baixa deformação. As duas projeções são

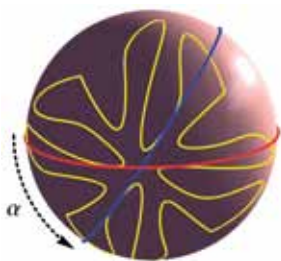


Figura 7. Dois equadores.

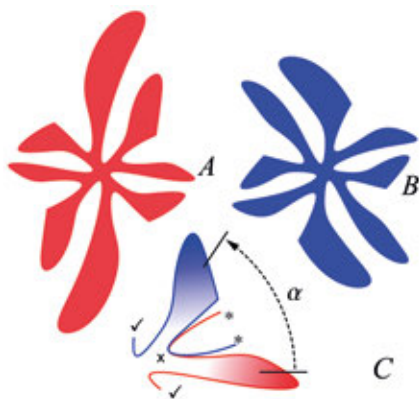


Figura 8. Sobreposição de cartas.



Figura 9. *Octopus Fuchsia*.

de seguida sobrepostas, de modo concêntrico, sofrendo a figura azul uma rotação de α , o ângulo diedro dos dois planos equatoriais utilizados; a preservação de ângulos na projecção é aqui decisiva. A terceira imagem da figura 8 mostra os contornos de A e B (este rodado de α) prontos a serem *truncados* e *concatenados*. As duas curvas intersectam-se num ponto x da axila; as 'pontas' marcadas com * são eliminadas até x, que servirá de ponto de concatenação dos dois braços. O que se obtém é uma curva contínua, C. Depois sobrepõe-se C a outra cópia de C rodada de 90° em torno do centro das projecções; as pontas marcadas com ✓ serão devidamente truncadas para concatenação das duas cópias de C, etc. De tudo isto resultou a figura 9, outra resposta ao problema proposto.

'A MELHOR BRAZUCA' NÃO EXISTE!

Na ausência de critério, o matemático arranja um. Para cada região \mathcal{R} duma esfera há um *equador óptimo* e um $s \geq 0$, a *semi-largura* de \mathcal{R} , tais que \mathcal{R} está contida na região equatorial entre os paralelos de latitudes $-s$ e s , com s o menor possível. No referencial dum equador óptimo, projecte-se \mathcal{R} sobre o cilindro, à Mercator, como na figura 10. Define-se $\Delta(\mathcal{R})$, o *coeficiente de deformação* de \mathcal{R} , como o supremo das distâncias dos pontos P de \mathcal{R} às suas respectivas imagens M , em percentagem sobre o raio da esfera. é claro que

$$\Delta(\mathcal{R}) = \sqrt{(1 - \cos s)^2 + (f(s) - \sin s)^2},$$

função contínua de s que se anula se e só se $s = 0$, ou seja, \mathcal{R} é parte dum círculo máximo. Aplicámos o *critério- Δ* às faces do cubo e da Telstar esféricas e aos braços das duas brazucas. O *ranking* é este, com indicação dos coeficientes de deformação: Octópode (3.4%), Brazuca (5%), Telstar (7.1%), Cubo esférico (44.3%).

Contas simples mostram que uma bola de praia com n gomos tem coeficiente de deformação evanescente com $n \rightarrow \infty$; assim, pelo critério- Δ , não existe uma bola de praia melhor do que todas as outras. Não é difícil imaginar que o mesmo acontece na família Brazuca. Um exemplo é o desta face dum membro da família, em projecção Mercator, com factor de deformação $\approx 0.2\%$. Descobrin-



Figura 10.

do a ideia por detrás da medusa negra, o leitor poderá obter outras com mais braços e mais delgados. Porém, a demonstração formal do título desta secção dará muito trabalho e não caberia neste *Canto*.

O CRITÉRIO DA PRÁTICA

Mesmo no caso de se escolherem brazucas de costuras suaves, o processo de concatenação acima descrito gera pontos angulosos na curva resultante, os pontos x. Para sossego matemático, as curvas foram suavizadas nesses pontos (para o corte e a colagem não valeu a pena, dado o papel suavizador da tesoura). Pusemos em prática os testes óbvios: cortar seis cópias da *crúz violeta* e seis do

⁴ A definição de "o melhor possível" fica a cargo do leitor. Para facilitar a exposição, não tomei o "equador óptimo" de cada braço, definido mais abaixo.

octopus e construir modelos da esfera baseados nessas duas brazucas. O resultado parece satisfatório. A brazuca tetrápode, construída em cartolina de três cores, tem foto no início deste artigo. Saiu algo esquinuda como era de esperar; em particular, no centro de cada face há um quadrado que se mantém plano depois da colagem. Os técnicos da Brazuca 2014 resolveram este e outros problemas usando poliuretano em vez de cartolina e, num golpe final, a Brazuca é literalmente passada a ferro, como uma francesinha prensada entre dois moldes metálicos semi-esféricos a alta temperatura.

Do *Octopus Fuchsia* fizemos seis cópias em material um pouco mais flexível do que a cartolina, mas o corte e a colagem topo-a-topo foram tão complicados que a octópode ficou incompleta. Deixou-se fotografar ao lado duma Brazuca, talvez sonhando ser a estrela portuguesa dum futuro Mundial.



Agradeço à Isabel parte substancial da construção dos modelos e supervisão de cores e formas.

NOTAS

O problema da "planificação" de superfícies e construção de modelos é abordado em [1], com pontos e objectivos em comum com este, mas metodologias muito diferentes.

Nos artigos [4] e [8] discute-se a matemática da curva da bola de ténis.

Sobre o *Canto Delfico* anterior: acabo de encontrar uma página digital, [2], anunciando a "bola mais redonda do mundo", também referida em [7]. O artigo [3] analisa numericamente o *stress* numa bola insuflada, em quatro casos conhecidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Delp e B. Thurston, "Playing with Surfaces: Spheres, Monkey Pants, and Zippergons", in *Bridges 2011: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, Coimbra 2011.

[2] *Hyperball*, <http://www.hyperballcompany.nl>, vista em Setembro 2015.

[3] A. Lengyel e K. Hincz, "Stress analysis of inflated polyhedra for the 32-panel soccer ball", in: B. Kröplin, E. Oñate (Eds), *VI Internat. Conf. Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membranes*, 2013, pp. 530-537.

[4] P. Lynch, "The high-power hyper", in S. Parc (ed.), *50 Visions of Mathematics*, Oxford Univ. Press, 2014, pp. 110-113.

[5] Pedro Nunes, *Obras, Vol. IV, De arte atque ratione navigandi*, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008. (Com tradução em português.)

[6] J. Queiró, "Pedro Nunes e as linhas de rumo", *Gazeta de Matemática*, 143(2002), pp. 42-47.

[7] T. Tarnai, "Hidden Geometrical Treasures", *Math. Intelligencer*, 35(2013), pp. 76-80.

[8] R. B. Thompson, "Designing a baseball cover", *The College Math Journal*, 29-1 (1998), pp. 48-61.

O autor escreve de acordo com a grafia antiga.