UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DOS INFINITOS INFINITOS

Thiago Augusto S. Dourado
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
doranykov@yandex.com

"Todas as coisas são de tal natureza que, quanto mais abundante é a dose de loucura que encerram, tanto maior é o bem que proporcionam aos mortais."

Erasmo de Rotterdam

INTRODUÇÃO

A história aqui contada começa, não cronologicamente, em Halle, uma cidade provinciana do leste alemão, onde foi desencadeada na segunda metade do século XIX uma revolução protagonizada por um matemático da universidade municipal local. George Cantor (1845-1918) deu o "primeiro tiro" nesta tal revolução quando colocou a "simples" questão: *Quão grande é o infinito?*

O que daí decorreu acabou por abalar as fundações da matemática e de toda a ciência em geral.

É válido salientar que muitos antes de Cantor, pelo menos desde os gregos, com tanto prestígio como ele ou maior, confrontaram a questão do infinito. Mas foi este matemático russo, advindo da sofisticada São Petersburgo, quem fez a travessia transcendental que ninguém mais conseguira e encontrou a resposta, mas por isso pagou um alto preço. Cantor viria a morrer a 6 de janeiro de 1918, louco, internado num manicómio da Universidade de Halle, e as suas únicas companhias eram os soldados desfigurados oriundos da Primeira Guerra Mundial. A questão é: *O que é que poderia ele, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, ter visto que o levou à loucura?*

1. O INFINITO POTENCIAL E O INFINITO EM ATO

Todo o mundo moderno é baseado em curvas, trajetórias e forças, e no âmago destas coisas está o infinito. Ao se "olhar microscopicamente" para uma trajetória suave e lisa, ver-se-á que na realidade ela não é lisa, é, na verdade, composta por um número infinito de segmentos de retas infinitamente pequenos e cada segmento é um instante em que não há movimentos, é como quadros de um filme que, apresentados em sequência, dão a impressão de movimento.

Desta forma, toda a coisa se baseia então no conceito de infinito, e ele funciona, e o facto de ele funcionar era o que bastava para os pensadores da época. Entretanto Cantor veio e protagonizou o pensamento de que se tudo se baseia no infinito, tem-se de o entender, saber que funciona não deveria ser o suficiente.

Dizer que "o infinito funciona" significa dizer que o manuseio das relações matemáticas que envolvem este conceito é praticável sem que seja necessário um seu entendimento completo, tal como se deu com o conceito de número durante um longo período da História.

Para que se compreenda as ideias de Cantor é importante observar e clarificar que existem dois tipos de infinitos a considerar: o *infinito potencial* e o *infinito em ato*.

O conceito de *infinito potencial* está diretamente ligado à ideia de sucessão infinita, isto é, na sua dinâmica operacional nunca se encontra o fim, ou seja, o processo de operar nunca é finalizado.

Em suma, o infinito potencial é usado para processos que podem, em princípio, continuar por um tempo maior do que qualquer outro tempo, ou para objetos que podem, em princípio, crescer mais do que qualquer outro objeto.

Entre a comunidade filosófica e a comunidade matemática, o conceito de infinito potencial sempre foi de fácil aceitação e não apresentava controvérsias, o desconforto que vieram a sofrer estas comunidades deu-se quando se almejou considerar a *concretização do infinito potencial como um todo completo, um "infinito em ato"*, ou seja, uma quantidade que coloca um "fim completo" no *processo de atuação* do infinito potencial. Neste caso, o infinito não é mais visto como um processo, mas sim como uma "quantidade infinita" estática. Para se ter uma ideia da complexidade deste conceito, Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) considerava o infinito potencial e afirmava *não fazer sentido* pensar na sua concretização como um todo completo, ou seja, um infinito em ato. Perante estes factos, tem-se a questão: *será possível uma entidade completa e existente de tamanho infinito?*

2. A DEFINIÇÃO DE INFINITO

George Cantor foi um matemático de primeira grandeza, os seus trabalhos estendem-se a diversos ramos da matemática, inclusive à "rainha" Teoria dos Números. No entanto, a sua grande obra foi a polémica e revolucionária teoria do infinito, pela qual ele foi venerado e execrado.

Como já referido, o infinito em ato é a concretização do infinito potencial como um todo completo, desta forma não se trata de um objeto em si, mas de vários objetos cuja totalidade resulta numa "quantidade" chamada de *infinito*, ou seja, conjuntos cuja totalidade dos seus elementos, a sua *cardinalidade*, como é denominada, é infinita. Por exemplo, ao se dizer que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinita, não se está a fazer referência a um número em especial, mas sim à totalidade destes números. Escrever-se-á $\#A$ para denotar a cardinalidade do conjunto A.

Dir-se-á que os conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade*, $\#A = \#B$, se, e somente se, existir uma correspondência um-a-um (bijetiva) entre os elementos de A e os elementos de B. Neste caso, diz-se também que os conjuntos A e B *são do mesmo tamanho*.

Nos seus *Elementos*, Euclides ($\approx$ 300 a.C.) coloca como facto fundamental a seguinte "noção comum" (axioma): *o todo é maior do que as suas partes.* Richard Dedekind (1831-1916), entretanto, um grande amigo de Cantor e outro "gigante da matemática", fundador da Teoria Algébrica dos Números, admitiu uma propriedade vislumbrada por Bernard Bolzano (1781-1848), que contrariava o axioma de Euclides, e, em 1888, num artigo intitulado "Was sind und was sollen die Zahlen?" (O que são e para que servem os números?), ele utilizou-a para apresentar uma definição de conjunto infinito (e conjunto finito): *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir um subconjunto próprio*[1] *B de A e uma correspondência um-a-um entre A e B;* e o *conjunto A será finito se não for infinito.*

Desta forma, enquanto o conjunto vazio, simbolizado por $\emptyset$, é finito, pois não possui nenhum subconjunto próprio, o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, dos números naturais, por outro lado, é um conjunto infinito, pois existe uma correspondência um-a-um, dada pelo dobro, entre o conjunto dos números naturais e o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Números naturais}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Números naturais pares}: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

E assim, o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais e o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, *existe a mesma quantidade de números naturais e números naturais pares.*

Neste exemplo tem-se um caso real que fere a intuição latente, se existe uma mesma quantidade de números naturais e números naturais pares, "aonde estão" os números naturais ímpares? O interessante é que o conjunto $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ dos números naturais ímpares, e o conjunto $\mathbb{N}$ também são do mesmo tamanho, pois, como no caso atrás mencionado, existe uma correspondência um-a-um, dada pelo dobro acrescido da unidade, entre os números naturais e os números naturais ímpares. Assim, o conjunto dos números naturais pares, o conjunto de todos os números naturais e o conjunto dos números naturais ímpares são do mesmo tamanho, possuem a mesma cardinalidade.

Seguindo esta linha pode ver-se facilmente que se for retirada uma quantidade finita qualquer de números naturais do conjunto dos números naturais, o conjunto que resulta continuará a ser infinito. A título de exemplificação, suponha que sejam retirados os números 3 e 5 do conjunto dos números naturais. Ver-se-á, então, que o conjunto que resulta continua a ser infinito, tendo visto que se pode construir uma correspondência um-a-um da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

Esta propriedade pode ser formalizada de uma maneira mais geral, como no seguinte teorema: *Se A é um conjunto infinito e $a_1, \ldots, a_n \in A$, então $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto infinito.*[2]

Cantor obteve então, com o uso deste teorema, o seu primeiro avanço na questão do "tamanho do infinito": *Não existe nenhum conjunto que seja infinito e que tenha cardinalidade menor do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja, não existe infinito menor do que o infinito dos números naturais.* Assim, ele utilizou o símbolo $\aleph_0$ para denotar a cardinalidade dos números naturais (o mesmo será seguido aqui).

3.CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

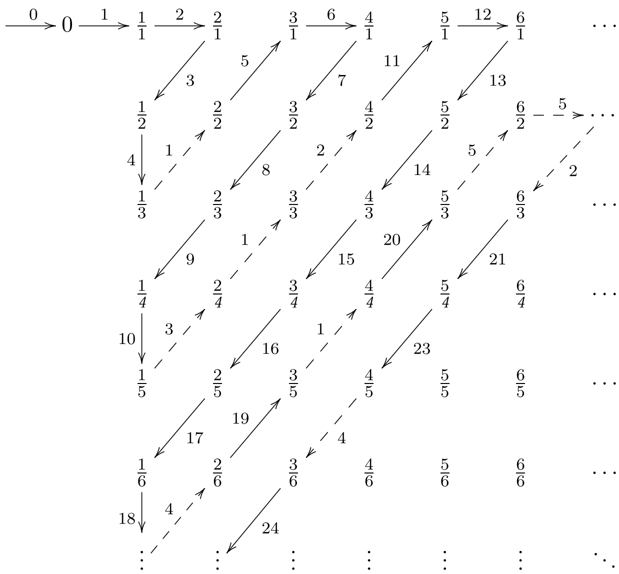
George Cantor havia conseguido vislumbrar um resultado fantástico, que dizia que todo o conjunto infinito tem cardinalidade igual ou maior do que a cardinalidade dos números naturais. Por outro lado, se todos os conjuntos infinitos tivessem cardinalidade não superior à cardinalidade de $\mathbb{N}$, então a questão do "tamanho do infinito" estaria resolvida, a saber, ter-se-ia que o infinito é do tamanho do conjunto que contempla a totalidade dos números naturais. Ele começoiu então a investigar esta questão, e em 1882, num trabalho intitulado *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades. Uma investigação matemático-filosófica da teoria do infinito), introduziu o conceito de *enumerabilidade* de conjuntos: *Um conjunto é enumerável se, e somente se, for um conjunto finito ou estiver em correspondência um-a-um com o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais.* Desta forma, a questão do "tamanho do infinito" traduz-se, em princípio, em analisar a enumerabilidade dos conjuntos.

Um facto intuitivamente claro é aquele que diz que entre dois números naturais consecutivos não existe nenhum número natural. Entretanto, sabe-se que existe uma infinidade de frações. E ainda, indo um pouco mais além, entre duas frações quaisquer existe ainda uma infinidade de frações. Vendo esta propriedade, é de se esperar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, de todas as frações, tenha cardinalidade maior do que a cardinalidade dos números naturais, ou seja, que seja não-enumerável, tendo visto que entre duas frações quaisquer existe [por si só] uma infinidade de frações. Entretanto, ao analisar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais, Cantor obteve a surpreendente constatação de que este conjunto é do mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais, ambos possuem a mesma cardinalidade. Por outras palavras: *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é um conjunto enumerável*.

Para demonstrar este resultado surpreendente, ele construiu uma correspondência um-a-um entre os racionais e os naturais usando um método totalmente novo, chamado *método da grade infinita*. Considera-se, inicialmente, uma grade infinita onde estão alocadas todas as frações: na primeira linha são alocadas as frações com 1 no denominador e, adicionalmente, o zero (os números naturais); na segunda linha são alocadas as frações (não-nulas) com 2 no denominador; na terceira linha, as frações (não-nulas) com 3 no denominador, e assim por diante.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \cdots \\
 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots \\
 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots \\
 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots \\
 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \cdots \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \frac{6}{6} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Todas as frações aparecem então em algum lugar bem estabelecido desta grade infinita, por exemplo, a fração $4/5$ é encontrada na quarta coluna da quinta fileira. Para obter uma bijeção entre os números naturais e os números racionais, traça-se uma linha poligonal entre 0 e 1, e que continua indo e voltando diagonalmente sem saltos pelas frações. Acompanhando a ordenação obtida por meio desta linha poligonal, obtém-se uma bijeção que pode ser ilustrada segundo o esquema abaixo:



Ou seja, tem-se uma enumeração do conjunto do números racionais, que pode ser representada mais explicitamente pelo seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
5 & 6 & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{3} & \cdots
\end{array}$$

4. "TAMANHO DO INFINITO" - QUESTÃO ENCERRADA?

Com as descobertas de Cantor, a questão do "tamanho do infinito" parecia estar resolvida, tudo fazia crer que o infinito é do mesmo tamanho da totalidade dos números

[1] Por subconjunto próprio de *A* entende-se qualquer subconjunto de *A* que seja diferente de *A*.

[2] A notação *A**B* indica os elementos de *A* que não são elementos de *B*.

naturais. Foi então que ele se propôs a encontrar uma maneira de mostrar que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, era enumerável, mas não obteve êxito.

Ao considerar o conjunto de todos os números reais, Cantor constatou que este conjunto não era enumerável, mas era infinito, pois $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{2}$$

é uma bijeção e o intervalo $(-1,1)$ é uma parte própria de $\mathbb{R}$. Logo, a cardinalidade dos números reais, também chamada de contínuo, e por isso com o símbolo $\mathfrak{c}$, é maior do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais. Em símbolos:

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Isto porque ambas as cardinalidades são infinitas, e distintas entre si, e pelo facto de não existir cardinalidade infinita que seja menor do que $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$.

Para provar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável, é suficiente mostrar que o intervalo $(0,1)$ não é enumerável. Suponha, entretanto, o contrário, que $(0,1)$ é enumerável. Neste caso, existirá uma correspondência um-a-um entre $\mathbb{N}$ e o intervalo $(0,1)$, de modo a se poder listar todos os elementos do intervalo da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \to & 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ 2 & \to & 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ & \vdots & \\ \ell & \to & 0, a_{\ell 1}a_{\ell 2}a_{\ell 3}\ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

em que cada $a_{jk} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Considere agora o número D entre 0 e 1 definido por $D = 0, d_1d_2d_3\ldots$, onde $d_1 = a_{11} + 1$, $d_2 = a_{22} + 1$, $d_3 = a_{33} + 1$ e assim por diante, observando que se $a_{ii} = 9$, então $d_i = 1$. É bastante claro que D está entre 0 e 1, entretanto D não pode estar na lista acima, pois $d_1 = a_{11} + 1 \neq a_{11}$, $d_2 \neq a_{22}$, $d_3 \neq a_{33}$, e assim sucessivamente, mostrando que o número D não está na lista. Portanto, não se pode criar uma correspondência um-a-um entre o conjunto dos números naturais e o intervalo $(0,1)$.

5. A HIERARQUIA INFINITA DE INFINITOS

Sabendo que o infinito dos números reais é maior do que o infinito dos números naturais, surgem as questões: Será que existem infinitos maiores do que o infinito dos números reais? Se houver, como os obter? Nesta secção encontram-se as respostas a estas questões e a apresentação dos dois maiores teoremas de Cantor.

O conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado *conjunto das partes* de A, e é denotado por $\wp(A)$.

(5.1) Primeiro Teorema de Cantor. *Se A é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de A é (estritamente) menor do que a cardinalidade do conjunto das partes de A. Em símbolos:*

$$\#A < \#\wp(A).$$

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então $\#A = 0 < 1 = \#\wp(A)$. Suponha que $A \neq \emptyset$. Neste caso, a função $g : A \to \wp(A)$, dada por $g(x) = \{x\} \in \wp(A)$, para todo $x \in A$, é injetiva. Desta forma, o conjunto A tem a mesma cardinalidade do conjunto $\{\{x\} \mid x \in A\}$ de $\wp(A)$ ou, equivalente, $\#A \leq \#\wp(A)$.

Para que a demonstração fique completa só resta mostrar que a cardinalidade de A não é igual à cardinalidade do conjunto das partes de A. Para isso suponha o contrário, que existe uma bijeção $f : A \to \wp(A)$. Considere o conjunto $S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, que consiste naqueles elementos de A que não estão nas suas imagens sob f. Como $S \in \wp(A)$ e $f : A \to \wp(A)$ é uma bijeção, existe um elemento $e \in A$ tal que $f(e) = S$. Neste caso, ou $e \in S$ ou $e \notin S$. Se $e \in S$, segue, da definição de S, que $e \notin f(e)$, o que é impossível, pois $f(e) = S$ e $e \notin S$. Se, por outro lado, $e \notin S$, como $f(e) = S$, tem-se $e \notin f(e)$, consequentemente, da definição de S, $e \in S$ e, portanto, $e \in f(e)$, o que é novamente impossível. Assim uma contradição foi gerada e o Primeiro Teorema de Cantor está demonstrado. □

Um escólio para o Primeiro Teorema de Cantor é o seguinte: *Para um conjunto qualquer, finito ou infinito, tem-se que a totalidade dos seus elementos é sempre menor do que a totalidade dos elementos do conjunto das partes deste mesmo conjunto. Por outras palavras, se um conjunto é infinito, existe um outro conjunto, diferente deste, que é maior na grandeza de infinito, que é, a saber, o conjunto das partes deste mesmo conjunto. Ou seja, sempre existe um infinito maior do que o infinito de qualquer conjunto infinito, que é o infinito do conjunto das partes deste mesmo conjunto.*

Desta forma, existe um conjunto maior na grandeza de infinito do que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, que é, a saber, $\wp(\mathbb{R})$, e, que por sua vez, é menor, na grandeza de infinito, do que o conjunto $\wp(\wp(\mathbb{R}))$, que é menor do que o conjunto $\wp(\wp(\wp(\mathbb{R})))$, e assim sucessivamente. Portanto, estão respondidas explicitamente as questões colocadas no início desta secção.

O próximo teorema relaciona a cardinalidade das partes e as potências de cardinais.

(5.2) Teorema.*Se A é um conjunto qualquer, finito ou infinito, então a cardinalidade das partes de A é igual à cardinalidade do conjunto de todas as funções com domínio em A e contradomínio em $\{0,1\}$, ou seja,*

$$\#\wp(A) = 2^{\#A}.$$

Em particular, se $A = \mathbb{N}$ então $\#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então

$$\#\wp(A) = \#\{0\} = 1 = 2^0 = 2^{\#A},$$

e o resultado verifica-se. Suponha então que $A \neq \emptyset$, e associa-se a cada subconjunto $D \subseteq A$ a função característica $\chi_D : A \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in D, \\ 0 & \text{se} \quad x \in A \setminus D. \end{cases}$$

Observe agora que a função de $\wp(A)$ em B^A que leva D em χ_D é uma bijeção, facto que segue diretamente da definição de χ_D. Portanto, os conjuntos $\wp(A)$ e B^A têm a mesma cardinalidade, ou seja, $\#\wp(A) = 2^{\#A}$.

□

Por fim, do Primeiro Teorema de Cantor tem-se $\aleph_0 < \#\wp(\mathbb{N})$ e do Teorema (5.2) tem-se $\#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Desta forma, pode-se exibir uma c*adeia hierárquica infinita de infinitos*, ou, noutras palavras, uma *sequência infinita ordenada de números (cardinais) transfinitos*[3], começando do menor entre eles:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < 2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}} < 2^{2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}}} < \cdots$$

O segundo grande teorema de Cantor veio responder à questão: *Quão maior do que o conjunto dos números naturais, na grandeza de infinitos, é o contínuo - o conjunto dos números reais?* A importância fundamental deste teorema é que ele fez por relacionar, numa equação, o cardinal $\aleph_0$ dos números naturais e o cardinal $\mathfrak{c}$ dos números reais.

(5.3) Segundo Teorema de Cantor. *A cardinalidade do conjunto das partes do conjunto dos números naturais é igual à cardinalidade do conjunto dos números reais. Em símbolos:*

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$ definido por

$$f(a) = \{a \in \mathbb{Q} \mid x < a\},$$

para cada $a \in \mathbb{R}$. Esta função é injetiva, pois se a e b são números reais tais que $a < b$, então, do facto de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, segue-se que existe um número racional r tal que $a < r < b$, logo, $r \in f(b)$, mas $r \notin f(a)$, ou seja, se a e b são reais distintos então $f(a) \neq f(b)$. Portanto, $\mathfrak{c} \leq \#\wp(\mathbb{Q}) = \#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

Para provar a desigualdade reversa, toma-se $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(f) = 0, f(1)\, f(2)\, f(3) \ldots$$

em que $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Note que $\psi(f)$ é um número decimal consistindo em 0's e 1's. Se $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ são tais que $f \neq g$, então $\psi(f) = \psi(g)$, pois os decimais que definem $\psi(f)$ e $\psi(g)$ são diferentes. Logo, $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é injetiva, e portanto, $\mathfrak{c} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Desta forma, $\mathfrak{c} \leqslant 2^{\aleph_0}$ e $2^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}$, e assim $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

□

6. A HIPÓTESE DO CONTÍNUO, O PROBLEMA QUE LEVOU CANTOR À LOUCURA

George Cantor já era consagrado, tudo corria bem na sua vida, e ele acreditava que isso era devido ao facto de ser guiado por Deus, mas foi então que ele fez a questão que fez, para desenvolver parte substancial da matemática do século XX, mas que também fez com que a sua vida declinasse: *Já se sabe que o infinito dos números naturais é menor que o infinito dos números reais – o contínuo – a questão é: será que existe um infinito que seja maior do que o infinito dos números naturais e menor do que o infinito dos números reais?* Cantor, a princípio, supôs que a resposta a esta questão seria negativa, e chamou a esta suposição *hipótese do contínuo*, isto é, ele supôs que não existia nenhum cardinal $\mathfrak{x}$ tal que

$$\aleph_0 < \mathfrak{x} < 2^{\aleph_0}.$$

O problema parecia ser simples e Cantor começou a trabalhar na solução, mas eis que a hipótese do contínuo mostrou não ser nada simples. Após mais de dois anos a trabalhar com afinco neste problema, em 1884, e com os ataques pessoais e profissionais que vinha a sofrer, devido às suas ideias revolucionárias, e que eram cada vez mais intensos, Cantor pensou não ser mais capaz de suportar tudo aquilo, e não suportou! Em maio daquele ano ele sofreu uma enorme crise nervosa, a sua filha descreveu como a sua personalidade se transformou, as falas sem sentido seguidas de silêncio absoluto e incomunicação total. Foi nessa época que ele foi internado pela primeira vez no Sanatório Universitário de Halle. Tudo em Cantor mudou após aquela

[3] A nomenclatura "número transfinito" foi dada por Cantor à quantidade que representa a cardinalidade dos conjuntos infinitos. O nome deriva do facto de estas quantidades transcenderem até mesmo o infinito.

crise, ele disse aos amigos não saber se ia conseguir fazer (ou ensinar) matemática novamente, pediu à universidade na qual era professor, autorização para ministrar cursos de filosofia em lugar dos cursos de matemática, pedido que foi aceite sem maiores problemas. Mas, apesar de ele afirmar não ser mais capaz de fazer matemática, jamais parou de trabalhar na hipótese do contínuo.

Mittag-Lefler (1846-1927), um matemático sueco, fundador da *Acta Matehmatica*, que era um grande amigo de Cantor, a certa altura recebeu uma carta eufórica deste dizendo que havia demonstrado a hipótese do contínuo e que a enviaria em algumas semanas. Mas, ao invés disso, três meses mais tarde, uma segunda carta apareceu, e nessa pode perceber-se o constrangimento de Cantor, nela ele dizia que sentia muito, que jamais deveria ter dito que havia provado a hipótese do contínuo. Posteriormente, três semanas após essa segunda carta, Cantor enviou uma outra, em que dizia: "Eu provei que a hipótese do contínuo é falsa." E o ciclo continua, ele prova que é verdadeira, depois prova que é falsa, para a frente e para trás. Na verdade, o que Cantor estava a fazer, era a levar-se à loucura aos poucos. Por mais que tentasse obter êxito, de alguma forma as suas tentativas eram frustradas e ele não conseguia resolver a hipótese do contínuo, descreve então o infinito como um abismo, um vácuo talvez, entre o que ele havia achado e o que ele sabia existir mas não podia alcançar.

Após este período, a hipótese do contínuo permaneceria inerte durante anos, até que, em 1938, Kurt Gödel (1906-1978), num trabalho intitulado *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (A Consistência do Axioma de Escolha e da Hipótese Generalizada do *Continuum* com os Axiomas da Teoria dos Conjuntos), veio e tirou-a desta inércia com um importante avanço. Tinham entretanto surgido alguns paradoxos na teoria dos conjuntos, exigindo assim que esta teoria fosse mais bem formalizada. A axiomática dada por Ernest Zermelo (1871-1953) e Abraham Fraenkel (1891-1965), acrescida do axioma de escolha, é considerada a mais eficiente formalização da teoria dos conjuntos. O que Gödel fez, em relação à hipótese do contínuo, foi fortalecer e ajudar a fixar esta axiomática à teoria dos conjuntos, pois provou que esta hipótese e esta axiomática eram consistentes: *A negação da hipótese do contínuo não pode ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, ou seja, eles são consistentes. Isto é, não há contradições entre a hipótese do contínuo e estes axiomas. Pode então construir-se toda a teoria dos conjuntos, baseada no axioma de escolha e nos axiomas de Zermelo-Fraenkel, e assumir que a hipótese do* continuum *é verdadeira.*

Em 1963, no entanto, usando uma técnica totalmente nova, chamada *forcing*, um jovem matemático dos Estados Unidos, chamado Paul Cohen (1934-2007), demonstrou um importante resultado envolvendo os axiomas de Zermelo-Fraenkel, o axioma de escolha e a hipótese do contínuo: *A hipótese do contínuo não pode ser provada a partir dos mesmos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, eles são independentes.*

Em suma, a hipótese do contínuo não contradiz a teoria dos conjuntos baseada nos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, mas somente com base nestes axiomas ela não pode ser provada, eles são insuficientes, ou independentes.

Desde a sua primeira crise, Cantor passou períodos de idas e vindas ao sanatório de Halle, com internamentos cada vez mais duradouros, até à sua morte, em 1918, sozinho e tomado pela loucura.

Justo não seria este texto se deixasse de mencionar que houve também matemáticos de primeira grandeza que entraram em defesa de Cantor. O já citado Mittag-Lefler foi um deles, mas, sobretudo, David Hilbert (1862-1943), um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos, que também entrou abertamente em defesa das ideias de Cantor. Para se ter uma ideia da importância de Hilbert, foi ele quem deu uma nova fundamentação à matemática no século XX, tendo trabalhado de forma significativa em quase todas as áreas da matemática: há a "Teoria dos Números de Hilbert", as "Equações Diferenciais" e as "Equações Integrais de Hilbert", os "Espaços de Hilbert", a "Geometria de Hilbert" e etc., além de ter resolvido, antes de Einstein, as equações da Teoria da Relatividade Geral. Foi ele também quem praticamente "pautou" a pesquisa matemática do século passado, quando, em 1900, no Congresso Mundial de Matemática, em Paris, apresentou uma conferência que continha os famosos 23 problemas, cuja soluções foram objeto de desejo da maioria esmagadora dos matemáticos espalhados pelo mundo. O primeiro problema desta lista foi justamente a hipótese do contínuo. Para ilustrar a importância do que Cantor tinha feito, Hilbert disse a célebre e memorável frase: "Ninguém poderá tirar-nos do paraíso em que Cantor nos colocou."

REFERÊNCIAS

[1] Dauben, J. W. *Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press, Princeton, 1990.

[2] Halmos, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Tradução de Lázaro Coutinho. Editora Ciência Moderna, Coleção Clássicos da Matemática, Rio de Janeiro, 2001.

[3] Lin, S-Y. T.; Lin, Y-F. *Set Theory: An Intuitive Approach.* Houghton, Mifflin Co., Boston, 1974.

SOBRE O AUTOR

Thiago Augusto S. Dourado é formado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, um estado do centro brasileiro onde se localiza o Pantanal. Atualmente integra o corpo académico da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF. As suas principais áreas de interesse são a álgebra e a teoria dos números, devido à influência de seu preceptor e amigo, o mundialmente conhecido Paulo Ribenboim, mas tem um enorme apreço pela filosofia e pela história da matemática, como fica claro no presente artigo.