En égard au caractère sommaire de ma documentation et de mon raisonnement, je ne puis dire la présente théorie confirmée sur ce point; mais la question se trouve posée aux astrophysiciens.

20 — Sphere equatoriale (Réf. § 9)

Les photographies montreraient aux extrêmes distances un nombre excessif de nébuleuses par rapport à la prédiction. Explication:

1º — Cas de $\alpha = 1/4$ — On voit sur la figure 3 a que si l'échelle des distances polaires est euclidienne, celle des magnitudes correspondantes (en haut) ne l'est pas. Et la bande comprise entre ($mg = 20$ $n = 70°$) et ($mg = 22$ $n = 111°$) représente (0,425) de la Masse de l'Univers. Cette bande est à cheval sur la sphère équatoriale au voisinage de laquelle le diamètre apparent est stationnaire, la magnitude ne variant alors que sous la seule action du décalage spectral.

2º — Cas de $\alpha = 1/2$ — L'explication précédente est renforcée: l'échelle des magnitudes n'est plus la même; et la même bande ($mg = 20$ $n = 51°$) ($mg = 22$ $n = 107°$) s'étend sur 51° contre 41° dans le cas précédent, soit (0,553) de la Masse de l'Univers (Fig. 3 b).

CONCLUSION

Basée sur la théorie des cartes géographiques, édifiée en marge des Cours de l'Ecole Navale, la présente théorie est simple et vérifiable. Elle a prévu la Récession des Nébuleuses, elle en rattache encore aujourd'hui la cause à une projection instinctive. Elle en explique en détail le mécanisme. Elle se prête à de nouvelles observations.

Je ne présente pas la projection de G. Postel comme une solution exacte, mais comme une approximation heureuse, éclairant les accès d'un problème difficile.

BIBLIOGRAPHIE

J. Becquerel, *Exposé élémentaire de la théorie d'Einstein* (1922) (Payot).

P. Couderc, *L'Expansion de l'Univers,* (1950), Presses Universitaires de France.

Ev. Schatzman, *Origine et Evolution des Mondes,* (1957), Albin Michel.

Nota sobre quasigrupos subtractivos

por *José Morgado*

Introdução

Numa nota recentemente publicada em *Gazeta de Matemática* ([1]), define-se *quasigrupo subtractivo* como um grupoide $< G , \cdot >$ (1) que verifica as seguintes condições:

$J1$: Existe em G um elemento i — *identidade direita* — tal que $a i = a$, para todo $a \in G$.

$J2$: $a b \cdot c = a c \cdot b$, quaisquer que sejam $a , b , c \in G$.

$J3$: $a \cdot b c = c \cdot b a$, quaisquer que sejam $a , b , c \in G$.

$J4$: $a a = i$, para todo $a \in G$.

Trata-se, na verdade, de um quasigrupo, porque cada uma das equações

$$a x = b \quad \text{e} \quad y a = b$$

(1) Um grupoide $< G , . >$ é o par constituído por um conjunto não vazio G e uma aplicação . de $G \times G$ em G. A imagem do par $(a , b) \in G \times G$ é representada por $a . b$ ou simplesmente $a b$.

Por $a b . c$ designamos o elemento $(a . b) . c$.

tem uma única solução ([1], Proposição 4).

É fácil verificar que os axiomas $J1 - J4$ não são independentes.

Assim, o axioma $J2$ é consequência dos axiomas $J3$ e $J1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} i \cdot bc &= c \cdot bi, \text{ por } J3, \\ &= cb \quad, \text{ por } J1, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$, tendo-se, por consequência,

$$ab \cdot c = i(c \cdot ab) = i(b \cdot ac) = ac \cdot b,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.

Neste artigo, formulamos vários sistemas de axiomas independentes para quasigrupos subtractivos e mostramos que todo quasigrupo subtractivo está naturalmente associado a um grupo abeliano. Finalmente, damos uma axiomática para grupos em termos de uma das operações inversas da operação de produto.

1. Sistemas de axiomas para quasigrupos subtractivos

TEOREMA 1. *Se* $<\mathrm{G}, \cdot>$ *é um grupoide, então os seguintes sistemas de condições são equivalentes:*

Sistema A:

$A1$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bb} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$A2$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{ba}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema B:

$B1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$B2$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{ba}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema C:

$C1$: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{bb} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$C2$: $\mathrm{cb} \cdot \mathrm{ca} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema D:

$D1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$D2$: $\mathrm{cb} \cdot \mathrm{ca} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Sistema E:

$E1$: $\mathrm{b} \cdot \mathrm{ba} = \mathrm{a}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$;

$E2$: $\mathrm{ac} \cdot \mathrm{bc} = \mathrm{ab}$, *quaisquer que sejam* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$.

Dem. Para estabelecer a equivalência destes sistemas de axiomas, basta mostrar que têm lugar as seguintes implicações:

1) $A \Rightarrow B$.

Como $B2 = A2$, é suficiente mostrar que $A \Rightarrow B1$. Ora

$$\begin{aligned} b \cdot ba &= a \cdot bb, \text{ por } A2, \\ &= a \quad, \text{ por } A1. \end{aligned}$$

2) $B \Rightarrow C$.

Tem-se

$$\begin{aligned} a \cdot bb &= b \cdot ba, \text{ por } B2, \\ &= a \quad, \text{ por } B1, \end{aligned}$$

o que prova $C1$.

Tem-se também

$$\begin{aligned} cb \cdot ca &= a(c \cdot cb), \text{ por } B2, \\ &= ab \quad, \text{ por } B1, \end{aligned}$$

o que prova $C2$.

3) $C \Rightarrow D$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} b \cdot ba &= (b \cdot bb)(ba), && \text{por } C1, \\ &= a \cdot bb && \text{, por } C2, \\ &= a && \text{, por } C1, \end{aligned}$$

donde se conclui $D1$ e, portanto, D, visto ser $D2 = C2$.

4) $D \Rightarrow E$.

Basta evidentemente provar que $ac \cdot bc = ab$. Ora

$$\begin{aligned} ac \cdot bc &= b(b \cdot ac) \cdot bc, && \text{por } D1, \\ &= c(b \cdot ac) && \text{, por } D2, \\ &= c(a(ab) \cdot ac), && \text{por } D1, \\ &= c(c \cdot ab) && \text{, por } D2, \\ &= ab && \text{, por } D1, \end{aligned}$$

como pretendíamos.

5) $E \Rightarrow A$.

Tem-se, com efeito,

$$\begin{aligned} a \cdot bb &= (b \cdot ba)(bb) && \text{, por } E1, \\ &= (b \cdot ba)(ba \cdot ba), && \text{por } E2, \\ &= b \cdot ba && \text{, por } E2, \\ &= a && \text{, por } E1, \end{aligned}$$

o que prova $A1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} a \cdot bc &= (c \cdot ca)(bc) && \text{, por } E1, \\ &= (c \cdot ca)(ba \cdot ca), && \text{por } E2, \\ &= c \cdot ba && \text{, por } E1, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

TEOREMA 2. *Se* $< G, \cdot >$ *é um grupoide, então* $< G, \cdot >$ *é um quasigrupo subtractivo, se e só se tem lugar algum dos sistemas de axiomas* A, B, C, D, E.

Dem. Em virtude do teorema 1 e da observação feita na introdução, basta provar que os sistemas de axiomas A e $J = \{J1, J3, J4\}$ são equivalentes.

1) $A \Rightarrow J$.

É claro que é suficiente mostrar que $A \Rightarrow \{J1, J4\}$.

Ora, pondo $bb = i$, de $A1$ resulta $ai = a$ para todo $a \in G$, o que prova $J1$.

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} aa &= a(a \cdot bb), && \text{por } A1 \\ &= bb \cdot aa && \text{, por } A2 \\ &= bb && \text{, por } A1, \end{aligned}$$

quer dizer, $aa = i$ para todo $a \in G$, o que prova $J4$.

2) $J \Rightarrow A$.

Basta evidentemente mostrar que $J \Rightarrow A1$; o que é imediato, porque

$$\begin{aligned} a \cdot bb &= ai, && \text{por } J4, \\ &= a, && \text{por } J1. \end{aligned}$$

2. Independência dos sistemas A, B, C, D, E.

Vamos agora mostrar que *os axiomas de cada um dos sistemas apresentados são independentes.* Para isso, consideremos os três grupoides $< G, \cdot >$, $< H, \cdot >$ e $< K, \cdot >$, onde $G = H = K = \{a, b\}$ e as operações são respectivamente definidas pelas tabelas seguintes:

G	a	b
a	a	a
b	b	a

H	a	b
a	b	b
b	b	b

K	a	b
a	b	a
b	b	a

É imediato que $< G, \cdot >$ verifica $A1$, mas não verifica $A2$, porque

$$b = ba = b \cdot aa \neq a \cdot ab = aa = a.$$

Vê-se também que o grupoide $<H, \cdot>$ verifica $A2$, mas não verifica $A1$, porque

$$b = a \cdot bb \neq a.$$

Por consequência, os axiomas $A1$ e $A2$ são independentes.

Anàlogamente se vê que os axiomas $B1$ e $B2$ são independentes; assim $<H, \cdot>$ verifica $B2$ e não $B1$ e $<K, \cdot>$ verifica $B1$ e não $B2$.

Utilizando os grupoides $<G, \cdot>$ e $<H, \cdot>$, estabelece-se fàcilmente a independência dos axiomas $C1$ e $C2$ e, utilizando os grupoides $<H, \cdot>$ e $<K, \cdot>$ estabelece-se a independência dos axiomas $D1$ e $D2$ e ainda a independência dos axiomas $E1$ e $E2$.

3. Quasigrupos que verificam a condição $ac \cdot bc = ab$

Comparando o sistema de axiomas E com os sistemas C e D, somos naturalmente levados a considerar um outro sistema de axiomas, a saber:

Sistema F:

$F1$: $a \cdot bb = a$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$F2$: $ac \cdot bc = ab$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.

É interessante, no entanto, observar que *o sistema* F *não é equivalente aos sistemas anteriores.*

Na verdade, vejamos que A *implica* F mas F *não implica* A.

Que A implica F resulta imediatamente de

$$\begin{aligned} ac \cdot bc &= c(b \cdot ac), && \text{por } A2, \\ &= c(c \cdot ab), && \text{por } A2, \\ &= ab \cdot cc, && \text{por } A2, \\ &= ab, && \text{por } A1. \end{aligned}$$

Para concluirmos que F não implica A, consideremos um grupo *não abeliano* $<G, \odot>$ e definamos em G a seguinte operação $\cdot$:

$$a \cdot b = a \odot b^{-1}, \text{ quaisquer que sejam } a, b\ G.$$

É imediato que $<G, \cdot>$ é um quasigrupo. Tem-se evidentemente

$$F1: \quad a \cdot bb = a \odot (b \odot b^{-1})^{-1} = a;$$

$$F2: \quad ac \cdot bc = (a \odot c^{-1}) \odot (b \odot c^{-1})^{-1} = \\ = a \odot b^{-1} = ab.$$

No entanto, $<G, \cdot>$ não verifica o sistema A; com efeito,

$$a \cdot bc = a \odot (b \odot c^{-1})^{-1} = a \odot (c \odot b^{-1}),$$

enquanto que

$$c \cdot ba = c \odot (a \odot b^{-1})$$

e, como $<G, \odot>$ é não abeliano, os elementos $a \cdot bc$ e $c \cdot ba$ não são necessàriamente iguais.

Teorema 3. *Seja* $<G, \cdot>$ *um grupoide que satisfaz às seguintes condições:*

(a) *A equação* $ax = b$ *tem pelo menos uma solução, quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(b) $ac \cdot bc = ab$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

Então $<G, \cdot>$ *é um quasigrupo com identidade direita e, se definirmos em* G *a operação* $\odot$ *pela condição*

$$a \odot b = a \cdot ib,$$

onde i *é a identidade direita, então o grupoide* $<G, \odot>$ *é um grupo.*

Dem. Seja x uma solução qualquer da equação $ax = b$. Então, da condição (b) resulta que

$$bb = ax \cdot ax = aa.$$

Isto significa que o elemento

$$i = a\,a$$

é independente de a.

Então, em virtude de ser $i = x\,x$ e de ser válida a condição (b),

$$b\,i = a\,x \cdot i = a\,x \cdot x\,x = a\,x = b\,,$$

quer dizer, i é uma identidade direita.

Como

$$i \cdot a\,b = b\,b \cdot a\,b = b\,a\,,$$

tem-se

$$i\,b \cdot i\,a = (i \cdot a\,x)\,(i\,a) = x\,a \cdot i\,a = x\,i = x$$

e, por consequência, *a equação* a x = b *tem uma única solução,* a saber, $x = i\,b \cdot i\,a$.

Daqui resulta, em particular, que existe uma única identidade direita.

Consideremos agora a equação $y\,a = b$. Se existe alguma solução para esta equação, então, como

$$i\,b = i \cdot y\,a = a\,y\,,$$

tem-se

$$y = i\,(i\,b) \cdot i\,a = b\,i \cdot i\,a = b \cdot i\,a\,,$$

quer dizer, se a equação $y\,a = b$ é solúvel, então tem sòmente uma solução.

Mas o elemento $b \cdot i\,a$ é solução, visto que

$$(b \cdot i\,a)\,a = (b \cdot i\,a)\,(i \cdot i\,a) = b\,i = b\,,$$

donde se conclui que *a equação* y a = b *tem uma única solução, quaisquer que sejam* a, b e G.

Por consequência, *o grupoide* $<$G, $\cdot$$>$ *é um quasigrupo com identidade direita* i.

É fácil ver que i é também identidade direita do grupoide $<G, \odot>$.

Na verdade,

$$a \odot i = a \cdot i\,i = a\,i = a$$

para todo $a \in G$.

Como

$$a \odot (i\,a) = a \cdot i\,(i\,a) = a\,a = i\,,$$

vemos que em $<G, \odot>$ cada elemento a tem inverso direito, a saber, o elemento $i\,a$.

Para concluirmos que $<G, \odot>$ é um grupo, vejamos finalmente que a operação $\odot$ é associativa.

Tem-se

$$(a \odot b) \odot c = (a \cdot i\,b) \cdot i\,c = (a \cdot i\,b)\,(x \cdot i\,b) = a\,x\,,$$

onde x é a solução da equação

$$x \cdot i\,b = i\,c$$

ou seja, da equação

$$i\,b \cdot x = c\,.$$

Por outro lado,

$$a \odot (b \odot c) = a \cdot i\,(b \cdot i\,c) = a\,(i\,c \cdot b) = a\,x\,,$$

porque

$$i\,c \cdot b = i\,(i\,b \cdot x) \cdot b = (x \cdot i\,b)\,(i \cdot i\,b) = x\,i = x\,,$$

o que completa a demonstração do teorema.

Suponhamos que $<G, \cdot>$ é um quasigrupo subtractivo. Então

$$a \odot b = a \cdot i\,b = b \cdot i\,a = b \odot a$$

isto é, $<G, \odot>$ é um grupo abeliano.

A recíproca é também imediata, de modo que é válido o seguinte

Teorema 4. *Sob as hipóteses do teorema 3, o grupoide* $<$G, $\cdot$$>$ *é um quasigrupo subtractivo, se e só se o grupo* $<$G, $\odot$$>$ *é abeliano.*

4. Uma definição de grupo.

Em [2], p. 6, é dada uma definição de grupo, em termos de uma das operações inversas da operação de produto. Assim, um grupo é definido como um grupoide $<G, />$ que satisfaz aos seguintes axiomas:

$L1$: $a/a = b/b$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$L2$: $a/(b/b) = a$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$L3$: $(a/a)/(b/c) = c/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

$L4$: $(a/c)/(b/c) = a/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

Em termos da operação $/$, o inverso b^{-1} do elemento b é definido por

$$b^{-1} = (b/b)/b$$

e o produto $a \odot b$ é definido por

$$a \odot b = a/b^{-1}.$$

É fácil ver que *os axiomas* $L1 - L4$ *não são independentes.*

Com efeito, $L3$ é consequência de $\{L1, L2, L4\}$, visto que

$$\begin{aligned}(a/a)/(b/c) &= (c/c)/(b/c), \text{ por } L1, \\ &= c/b \quad , \text{ por } L4.\end{aligned}$$

O teorema 3 vai permitir-nos formular uma definição de grupo em termos da operação $/$, utilizando sòmente dois axiomas.

TEOREMA 5. *Seja* $<G, />$ *um grupoide que satisfaz às seguintes condições:*

$G1$: $a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)) = b$,
quaisquer que sejam $a, b \in G$;

$G2$: $(a/c)/(b/c) = a/b$,
quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.

Então, definindo em G *a operação* $\odot$ *pela igualdade*

$$a \odot b = a/((b/b)/b),$$

o grupoide $<G, \odot>$ *é um grupo.*

Dem. Com efeito, o axioma $G1$ diz-nos que a equação $a/x = b$ tem pelo menos uma solução, a saber,

$$x = ((b/b)/b)/((a/a)/a),$$

isto é, $<G, />$ satisfaz às condições (*a*) e (*b*) do teorema 3 e daí resulta que $<G, \odot>$ é um grupo.

É fácil ver directamente que *os sistemas de axiomas* $\{L1, L2, L4\}$ *e* $\{G1, G2\}$ *são equivalentes.*

Vejamos que o primeiro sistema implica $G1$.

Tem-se

$$\begin{aligned}&a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)) = \\ &= ((b/b)/((b/b)/a))/(((b/b)/b)/((a/a)/a)), \text{ por } L2, \\ &= ((b/b)/((b/b)/a))/(((b/b)/b)/((b/b)/a)), \text{ por } L1, \\ &= (b/b)/((b/b)/b) \quad , \text{ por } L4, \\ &= b \quad , \text{ por } L2.\end{aligned}$$

Vejamos agora que $L1$ e $L2$ são consequências do segundo sistema.

Ora, utilizando sucessivamente $G1$ e $G2$, obtém-se

$$\begin{aligned}b/b &= (a/(((b/b)/b)/((a/a)/a)))/ \\ &\quad /(a/(((b/b)/b)/((a/a)/a))) \\ &= a/a,\end{aligned}$$

quer dizer, é válida a implicação

$$\{G1, G2\} \Rightarrow L1.$$

De $G1$ resulta, pondo $b = a$,

$$a = a/(((a/a)/a)/((a/a)/a)).$$

E, por consequência, tem-se:

$$\begin{aligned}a &= a/((a/a)/(a/a)), \text{ por } G2, \\ &= a/(a/a) \quad , \text{ por } G2, \\ &= a/(b/b)\end{aligned}$$

porque, como vimos, $L1$ é consequência de $\{G1, G2\}$ (²).

A definição de grupo abeliano, em termos da operação /, assume uma forma especialmente simples.

Assim, o *grupoide* $<G \odot>$ *é um grupo abeliano se, no grupoide* $<G, />$, *têm lugar os dois axiomas seguintes:*

$G'1$: $a/(a/b) = b$, *quaisquer que sejam* a, b e G;

$G'2$: $(a/c)/(b/c) = a/b$, *quaisquer que sejam* a, b, c e G.

(²) Os axiomas $G1$ e $G2$ são independentes. Assim, o grupoide $<H, \cdot>$ do § 2 verifica $G2$ e não verifica $G1$, enquanto que o grupoide $<L, \cdot>$, onde $L = \{a, b, c\}$ e a operação $\cdot$ é definida pela tabela

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

verifica $G1$ e não verifica $G2$.

Que $<G, \odot>$ é um grupo, é consequência imediata do teorema 3, visto que a equação $a/x = b$ tem pelo menos uma solução, a saber, $x = a/b$.

Em particular, tem-se

$$a/a = b/b.$$

Então tem-se

$$a \odot b = a/((b/b)/b),$$

por definição da operação $\odot$,

$= (b/(b/a))/((b/b)/b)$, por $G'1$,

$= (b/(b/a))/(((b/b)/a)/(b/a))$, por $G'2$,

$= b/((b/b)/a)$, por $G'2$,

$= b/((a/a)/a)$, porque $a/a = b/b$,

$= b \odot a$, por definição da operação $\odot$,

como pretendíamos mostrar.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jayme Machado Cardoso, *Quase grupos subtractivos*, Gazeta de Matemática, **90-91** (1963), pp. 7-10.

[2] Marshall Hall, Jr., *The Theory of Groups*, New York, 1959.

Definição de quasigrupo subtractivo por um único axioma

por José Morgado

Num artigo anterior (ver [1]), formulámos vários sistemas de dois axiomas independentes para quasigrupos subtractivos. Por exemplo, vimos que um grupoide $<G, \cdot>$ é um quasigrupo subtractivo, se e só se são válidas as seguintes condições:

$E1$. $b \cdot ba = a$, *quaisquer que sejam* a, b e G;

$E2$. $ac \cdot bc = ab$, *quaisquer que sejam* a, b, c e G.

Em [2], mostra-se que um sistema $<G, \cdot, '>$, constituido por um conjunto não vazio G, uma operação binária $\cdot$ e uma operação unária $'$, definidas em G, é um grupo, se e só se tem lugar a seguinte condição:

$$ab \cdot c = ad \cdot e \text{ implica } b = d \cdot ec'.$$

Este resultado sugeriu-nos o teorema seguinte, por meio do qual se pode definir quasigrupo subtractivo, utilizando sòmente um axioma.