porque, como vimos, $L1$ é consequência de $\{G1, G2\}$ (2).

A definição de grupo abeliano, em termos da operação /, assume uma forma especialmente simples.

Assim, o *grupoide* $<G \odot>$ *é um grupo abeliano se, no grupoide* $<G, />$, *têm lugar os dois axiomas seguintes:*

G′1: $a/(a/b) = b$, *quaisquer que sejam* a, b e G;

G′2: $(a/c)/(b/c) = a/b$, *quaisquer que sejam* a, b, c e G.

(2) Os axiomas $G1$ e $G2$ são independentes. Assim, o grupoide $<H, \cdot>$ do § 2 verifica $G2$ e não verifica $G1$, enquanto que o grupoide $<L, \cdot>$, onde $L = \{a, b, c\}$ e a operação $\cdot$ é definida pela tabela

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

verifica $G1$ e não verifica $G2$.

Que $<G, \odot>$ é um grupo, é consequência imediata do teorema 3, visto que a equação $a/x = b$ tem pelo menos uma solução, a saber, $x = a/b$.

Em particular, tem-se

$$a/a = b/b.$$

Então tem-se

$$\begin{aligned} a \odot b &= a/((b/b)/b), \\ &\quad \text{por definição da operação } \odot, \\ &= (b/(b/a))/((b/b)/b), \text{ por } G'1, \\ &= (b/(b/a))/(((b/b)/a)/(b/a)), \text{ por } G'2, \\ &= b/((b/b)/a), \text{ por } G'2, \\ &= b/((a/a)/a), \text{ porque } a/a = b/b, \\ &= b \odot a, \text{ por definição da operação } \odot, \end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jayme Machado Cardoso, *Quase grupos subtractivos,* Gazeta de Matemática, **90-91** (1963), pp. 7-10.
[2] Marshall Hall, Jr., *The Theory of Groups,* New York, 1959.

Definição de quasigrupo subtractivo por um único axioma

por **José Morgado**

Num artigo anterior (ver [1]), formulámos vários sistemas de dois axiomas independentes para quasigrupos subtractivos. Por exemplo, vimos que um grupoide $<G, \cdot>$ é um quasigrupo subtractivo, se e só se são válidas as seguintes condições:

$E1$. $b \cdot ba = a$, *quaisquer que sejam* a, b e G;

$E2$. $ac \cdot bc = ab$, *quaisquer que sejam* a, b, c e G.

Em [2], mostra-se que um sistema $<G, \cdot, '>$, constituido por um conjunto não vazio G, uma operação binária $\cdot$ e uma operação unária $'$, definidas em G, é um grupo, se e só se tem lugar a seguinte condição:

$$ab \cdot c = ad \cdot e \text{ implica } b = d \cdot ec'.$$

Este resultado sugeriu-nos o teorema seguinte, por meio do qual se pode definir quasigrupo subtractivo, utilizando sòmente um axioma.

TEOREMA. *Se* $<G,\cdot>$ *é um grupoide, então o axioma*

$$S: \quad ab\cdot c = ad\cdot e \ \textit{implica} \ b = d\cdot ce$$

é equivalente ao sistema de axiomas $\{E1, E2\}$.

DEM. Vejamos que o sistema $\{E1, E2\}$ implica S.

Na verdade, suponhamos que se tem

$$(1) \qquad ab\cdot c = ad\cdot e.$$

Então, utilizando sucessivamente $E1$, $E2$ e (1), conclui-se que

$$b = a\cdot ab = (ac)(ab\cdot c) = (ac)(ad\cdot e).$$

Ora, tem-se evidentemente

$$\begin{aligned}(ac)(ad\cdot e) &= (ad\cdot cd)(ad\cdot e) \text{ por } E2,\\ &= (ad\cdot cd)((ad\cdot cd)(e\cdot cd)) \text{ por } E2,\\ &= e\cdot cd \text{ por } E1,\\ &= (d\cdot de)(cd) \text{ por } E1,\\ &= (d\cdot de)(ce\cdot de) \text{ por } E2,\\ &= d\cdot ce \text{ por } E2,\end{aligned}$$

o que prova S.

Vejamos agora que o axioma S implica $\{E1, E2\}$.

Com efeito, como $ab\cdot c = ab\cdot c$, o axioma S permite concluir que

$$(2) \qquad b = b\cdot cc,$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$.

De (2) resulta que

$$a(bb)\cdot c = a(cc)\cdot c,$$

donde

$$bb = cc\cdot cc = cc,$$

quaisquer que sejam $b, c \in G$, por S e por (2).

Tem-se, por consequência,

$$ab\cdot ab = aa\cdot bb,$$

donde, em virtude de S e de (2),

$$b = a(ab\cdot bb) = a\cdot ab,$$

quaisquer que sejam $a, b \in G$, o que prova $E1$.

Então, utilizando $E1$, podemos escrever

$$c = b\cdot bc = (a\cdot ab)\cdot bc$$

e, por outro lado, utilizando $E1$ e (2), podemos escrever

$$c = a\cdot ac = (a\cdot ac)\cdot aa.$$

Finalmente, da igualdade

$$(a\cdot ab)\cdot bc = (a\cdot ac)\cdot aa$$

resulta, em virtude de S e (2),

$$ab = ac\cdot (bc\cdot aa) = ac\cdot bc$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in G$, o que completa a demonstração do teorema.

Em resumo, podemos definir quasigrupo subtractivo como um grupoide que verifica a condição S.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ MORGADO, *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, Gazeta de Matemática, **92-93** (1963), pp. 11-17.

[2] MICHAEL SLATER, *A single postulate for groups*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 346-347.