

Deuxième Symposium sur l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les Universités d'Europe

Participants :

- Allemagne* — H. BEHNKE (Münster), organisateur du Symposium, F. L. BAUER (Mainz),
W. HAACK (Berlin), F. SOMMER (Würzburg)
- Autriche* — L. SCHMETTERER (Wien)
- Belgique* — L. BOUCKAERT (Louvain), P. GILLIS (Bruxelles)
- Danemark* — T. BUSK (Aarhus)
- France* — H. CARTAN (Paris), P. GERMAIN (Paris), A. LICHNEROWICZ (Paris)
- Italie* — L. AMERIO (Milano), E. BOMPIANI (Roma), C. CATTANEO (Roma)
- Pays-Bas* — N. H. KUIPER (Wageningen), R. TIMMAN (Delft)
- Suede* — Å. PLEIJEL (Lund), C. E. FRÖBERG (Lund)
- Suisse* — G. DE RHAM (Lausanne), H. STIENEL (Zürich)

Cette réunion avait pour but d'étudier la possibilité d'étendre aux «mathématiques appliquées» les projets d'harmonisation de l'enseignement des mathématiques établis à Paris, lors d'un premier colloque (3-5 octobre 1960). Ont participé aux deux colloques MM. BOUCKAERT, CARTAN, GERMAIN, BOMPIANI, CATTANEO, KUIPER, PLEIJEL et DE RHAM.

Les deux réunions ont été organisées sur l'initiative de l'Association Européenne des Enseignants. Celle de Paris avait été réalisée avec l'aide du Ministère français de l'Education Nationale (Direction de la Coopération avec la Communauté et l'Etranger); celle de Düsseldorf, l'a été grâce à l'aide du Gouvernement du Land Nordrhein-Westfalen.

Le but commun des deux réunions (celle de Paris et celle de Düsseldorf) était d'établir des projets d'harmonisation de l'enseignement des mathématiques dans les Univer-

sités et Ecoles Supérieures d'Europe, afin de faciliter ultérieurement la solution du problème de l'équivalence des diplômes universitaires, et de rendre possible dès maintenant les *échanges d'étudiants pendant le cours de leurs études fondamentales*, ce qui est pratiquement impossible aujourd'hui. Ainsi pourrait se créer peu à peu une véritable communauté européenne des étudiants.

1. Déroulement des travaux

Les séances de travail eurent lieu dans le magnifique cadre de la «Haus der Wissenschaften», siège de l'«Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen», mis à la disposition du Colloque par Monsieur le Secrétaire d'Etat LEE BRANDT. Le Secrétaire d'Etat vint lui-même accueillir les participants à l'ouverture du congrès, et il présida un dîner offert le 23 Mars 1962

par le gouvernement du Land de Nordrhein-Westfalen.

Le Professeur HEINRICH BEHNKE, qui avait pris soin de l'organisation et du fonctionnement du Colloque, prononça un discours d'introduction. Puis HENRI CARTAN, organisateur du Colloque de Paris, rappela le but de ces réunions : c'est à titre privé que se trouvent réunis ici des mathématiciens venus de neuf pays d'Europe ; ils ne sont mandatés par aucun organisme officiel, mais leurs travaux sont suivis avec intérêt par certains Ministères nationaux de l'Éducation, ainsi que par le Conseil de l'Europe et l'O. C. D. E. Ils se proposent, en toute liberté d'esprit, d'établir des projets et de faire des suggestions qu'ils s'engagent à soumettre ensuite à leurs collègues mathématiciens dans leurs pays respectifs.

H. CARTAN rappelle ensuite les conclusions auxquelles était parvenu le Colloque de Paris. Un accord s'y était fait sur un *programme de base* considéré comme souhaitable pour l'enseignement des mathématiques au niveau des Universités. Ce programme couvre le cours des études universitaires, à partir du moment où l'étudiant entre à l'Université, jusqu'au moment où, en France ou en Belgique par exemple, il termine sa « licence » (le procès-verbal des travaux du Colloque de Paris précise, pour chaque pays, la période d'études sur laquelle porte le programme de base). Bien que l'organisation des études et des examens diffère considérablement d'un pays à l'autre, il a paru possible d'établir un programme de base pour les enseignements fondamentaux, sans préjuger de la répartition des matières au cours des études, et en laissant de côté certains enseignements plus avancés ou spécialisés. La mécanique et les mathématiques appliquées sont restées en dehors de la discussion. Il a aussi été précisé que le programme de base était un programme minimum, auquel il faudrait ajouter, pour la formation des futurs

mathématiciens, des matières à option que l'on n'a pas voulu préciser. Enfin, le programme de base a été conçu à *deux niveaux*, étant entendu qu'une même question peut être traitée deux fois, à des niveaux différents. Les deux niveaux correspondent en gros à ce qui, en France, s'appelle « enseignement propédeutique » et « enseignement de licence ».

A la suite des échanges de vues qui ont suivi, dans chaque pays, le Colloque de Paris, le « programme de base » a été publié, et découpé en 16 rubriques (7 pour le premier niveau, 9 pour le deuxième niveau). Ce découpage est destiné à faciliter les références. On a en effet décidé, à Paris, d'instituer un *livret européen de l'étudiant*, qui pour le moment n'aurait aucun caractère officiel, mais serait simplement un outil d'information pour les professeurs : lorsqu'un étudiant changerait d'Université, il pourrait demander à ses professeurs de mentionner, sur son livret, les parties du programme de base dont il a une sérieuse connaissance (cette inscription sera facilitée par le découpage du programme en numéros), et éventuellement de fournir toute autre information sur les autres connaissances de l'étudiant. L'étudiant pourra alors être utilement conseillé à son arrivée dans une Université d'un autre pays. Bien entendu, le livret de l'étudiant ne saurait constituer déjà une solution au problème de l'équivalence des diplômes, mais son institution devrait contribuer à faciliter ultérieurement cette solution.

Un projet précis a été établi pour le Livret de l'Étudiant et a été soumis aux participants du Colloque de Paris. Mais il a été décidé d'attendre, pour le mettre en pratique, qu'un second colloque ait étudié la possibilité d'étendre aux « mathématiques appliquées » les projets d'harmonisation établis à Paris pour les « mathématiques pures ». Tel est le but de la présente réunion de Düsseldorf.

2. Conclusions du Colloque

Il n'a pas été jugé utile de consigner en détail, dans ce procès-verbal, les discussions qui se sont déroulées pendant deux journées et demie. Il suffit d'énumérer les conclusions auxquelles on a unanimement abouti.

I — Niveau un

Il est décidé qu'à un *premier niveau* (qui couvre à peu près deux années d'études), *une même formation est souhaitable pour tous les futurs mathématiciens*, qu'ils se destinent aux mathématiques pures ou aux mathématiques appliquées. Cette décision de principe conduit à introduire des modifications au programme de base adopté à Paris pour le premier niveau.

Aux sept anciens numéros du programme, qui subissent quelques légers remaniements, sont adjoints trois nouveaux numéros :

- n.° 8 — analyse numérique («numerische Analysis»);
- n.° 9 — cinématique et cinétique (ce numéro absorbe une partie de l'ancien numéro 7);
- n.° 10 — introduction au calcul des probabilités (une quinzaine de leçons de 60 minutes).

Il est entendu que les numéros 1 à 7 sont considérés comme constituant un programme de base minimum, programme qu'il est souhaitable de compléter par *deux au moins* des trois numéros 8, 9 et 10. Il est précisé que le n.° 9 est enseigné, dans certains pays, soit au titre de la physique théorique, soit au titre de la mécanique.

II — Niveau deux (mathématiques pures)

Rien n'est changé en ce qui concerne le programme de base minimum du deuxième niveau, *pour les mathématiques pures*. Seul

l'ancien numéro 9 (algèbre linéaire) subit de légères modifications. Il est rappelé que ce programme de base peut être complété par des options, que l'on ne veut pas préciser.

III — Niveau deux (mathématiques appliquées)

Les participants du Colloque de Düsseldorf sont partis du principe que les Mathématiques appliquées s'orientent, en gros, dans trois grandes directions :

- Analyse numérique et machines calculatrices;
- Probabilités et statistique;
- Mécanique et physique mathématique.

(Par «physique mathématique» on entend l'étude mathématique des théories physiques contemporaines).

Sans chercher à proposer des programmes pour ces diverses disciplines, le Colloque a préféré proposer un *programme commun* qui semble utile en tout cas, quelle que soit l'orientation future de l'étudiant. Ce programme se situe *au niveau deux*. Il a été admis que ce programme, qui est plus chargé que le programme de même niveau (deux) pour les mathématiques pures, est un programme *souhaitable*, et qu'on ne prétend pas l'exiger intégralement de chaque étudiant. Voici les rubriques du programme :

- Algèbre.
- Fonctions holomorphes d'une variable complexe.
- Intégrale de Lebesgue-Stieltjes.
- Espaces fonctionnels.
- Equations intégrales.
- Equations différentielles ordinaires.
- Equations aux dérivées partielles.
- Calcul des variations.
- Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.
- Fonctions spéciales.

Le détail du programme est donné ci-dessous.

IV — *Livret européen de l'étudiant*

L'édition du livret soulève le problème des langues à utiliser. La couverture et la première page peuvent facilement être imprimées en 4 langues (allemand, anglais, français, italien), ainsi que les pages intercalaires destinées à recueillir les appréciations des professeurs. Mais il ne saurait être question d'imprimer le programme en quatre langues, car il est désirable que le format et l'épaisseur du carnet ne dépassent pas ceux d'un passeport. La majorité des participants propose que le programme soit imprimé en français; toutefois, il semble avoir été admis qu'il y aura aussi une édition contenant la version anglaise du programme, qui sera préparée par M. TIMMAN.

Un éditeur français semble disposé à faire les frais de l'édition du Livret européen de l'Etudiant, à condition que ses droits soient préservés. Les participants se rallient à l'idée de faire prendre un copyright par l'Association Européenne des Enseignants, à charge pour cette dernière de traiter avec le ou les éditeurs du Livret.

Il est suggéré que les Instituts de Mathématiques d'une part, les Associations d'étudiants d'autre part, pourraient acheter un certain nombre d'exemplaires du Livret de l'Etudiant. Il sera prudent de ne faire qu'un tirage limité, sujet à des révisions qui pourraient s'avérer utiles.

PREMIER NIVEAU (1)

1. Notions générales d'algèbre.

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions. Ensembles finis et analyse combinatoire.

(1) L'énumération des matières du programme n'implique pas un ordre pour les traiter.

Entiers rationnels, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble; relations d'équivalence, relations d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale).

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'ALEMBERT-GAUSS. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. Géométrie analytique et géométrie différentielle classiques à 2 et 3 dimensions.

Equation des droite, plan, cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3 .

Coordonnées polaires dans R^2 .

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Etude d'une courbe plane donnée sous la forme $y=f(x)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou à l'infini.

Etude locale d'une courbe de R^3 au voisinage d'un point: plan osculateur, courbure, formules de FRENÉT; vitesse et accélération d'un mobile, accélération tangentielle et accélération normale.

3. Algèbre linéaire (niveau 1).

Définition des espaces vectoriels; sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels. Indépendance linéaire; bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires; déterminants.

Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme; équation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques; formes hermitiennes.

Espaces affines; parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R : norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Bases orthonormales dans R^n .

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point, angle de deux vecteurs, orientation de R^n ; produit vectoriel dans R^3 .

4. Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire.

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles de nombres réels: majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure. Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de CAUCHY; théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

Fonctions d'une variable réelle: limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un inter-

valle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de ROLLE; théorème des accroissements finis. Formule de TAYLOR. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonctions trigonométriques directes et réciproques d'une variable réelle. Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications; division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de TAYLOR.

Fonctions de plusieurs variables; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point. Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivées d'une fonction composée. Interprétation géométrique: tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'ordre supérieur; permutabilité. Formule de TAYLOR. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

5. Calcul intégral.

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de RIEMANN; intégrabilité des fonctions continues, des fonctions monotones. Propriétés de la forme linéaire définie par l'intégrale. Relation entre intégrale indéfinie et fonctions

primitives. Exemples de fonctions primitives. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle quelconque (éventuellement infini): convergence, convergence absolue.

Définition et propriétés élémentaires de l'intégrale de RIEMANN-STIELTJES par rapport à une mesure positive sur la droite numérique.

Longueur d'une courbe paramétrée; expression de la longueur pour une paramétrisation continuellement dérivable. Intégrales curvilignes.

Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, et aux transformations des intégrales multiples (Stokes). (On ne donnera pas de démonstrations; on pourra se borner à démontrer la formule de RIEMANN, dans le plan, pour un contour simple). Cas particuliers: gradient, divergence, rotationnel.

6. Séries.

Séries à termes réels ou complexes; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs: comparaison, critères classiques de convergence. Séries à termes positifs décroissants: comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions; convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développements en série de e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^a$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \sin x$.

Théorie élémentaire des séries entières d'une variable, réelle ou complexe. Cercle de convergence. Dérivation; intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de e^z , $\sin z$ et $\cos z$ pour z complexe.

Notions élémentaires sur les séries de FOURIER: calcul des coefficients.

7. Equations différentielles.

Notions fondamentales sur les équations différentielles; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrables par quadrature; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables, avec ou sans second membre.

8. Analyse numérique.

Systèmes d'équations linéaires; méthode d'élimination et méthode d'approximations successives. Optimisation linéaire; approximation au sens de TCHEBYCHEFF et au sens de GAUSS. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division, comme exemples simples d'algorithmes. Majoration et calcul de racines, méthode d'approximation de NEWTON, interpolation par les polynômes; fractions continues.

Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires: méthodes d'itération, méthode de RUNGE-KUTTA pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur des machines.

9. Cinématique et cinétique.

Equivalence des systèmes de vecteurs : torseurs.

Cinématique :

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale).

Champ des vitesses d'un solide. Changement de repère : composition des vitesses et des accélérations.

Cinétique :

Masse d'un système. Conservation de la masse. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Torseur des quantités d'accélération. Energie cinétique. Cas du solide. Torseur d'inertie. Exemples simples de mouvements de solides.

10. Introduction au calcul des probabilités.

Axiomes du calcul des probabilités.

Quelques lois de probabilité à une dimension : loi binomiale, loi de POISSON, loi de LAPLACE-GAUSS.

Espérance mathématique d'une fonction ; fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions. Méthode des moindres carrés, corrélation, régression.

DEUXIEME NIVEAU

(Mathématiques pures)

11. Algèbre des ensembles et algèbre (niveau 2).

Notions élémentaires sur le calcul logique.

Opérations sur les ensembles ; notations. Produit d'ensembles.

Applications d'un ensemble dans un autre ; image directe, image réciproque, formules.

Relations binaires : relation d'ordre, relation d'équivalence.

Notions sur les cardinaux ; puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix ; théorème de ZORN (sans démonstration).

Lois de composition ; propriétés (associativité, etc.).

Groupes ; sous-groupes, groupes-quotients ; théorème d'homomorphisme. Exemples : Z/nZ , R/Z . Plongement d'un ensemble muni d'une loi commutative et associative, régulière, dans un groupe ; exemples. Produit de groupes, produit direct de sous-groupes.

Groupe symétrique : signature d'une permutation.

Groupes de transformations ; transitivité, transitivité simple ; trajectoires : exemples. Exercice possible : théorème de SYLOW.

Anneaux et algèbres ; idéaux ; anneau-quotient. Exemples (quaternions).

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs variables.

Corps, règles de calcul. Caractéristique d'un corps ; exemples.

12. Algèbre linéaire (niveau 2).

Révision de l'algèbre linéaire (niveau 1).

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie ; application aux équations linéaires.

Éléments d'algèbre extérieure.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes ; orthogonalité. Formes quadratiques et hermitiennes ; réduction à une somme de carrés ; loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

13. Topologie générale.

Topologie de R , de R^n ; théorème de BOREL-LEBESGUE.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés); exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produits d'espaces topologiques.

Espaces compacts; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion). Méthodes des approximations successives.

Familles sommables dans un espace normé complet; convergence normale.

14. Espaces fonctionnels.

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique; cas où ce dernier est complet; cas des applications continues.

Espaces vectoriels normés; espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de STONE-WEIERSTRASS, ou tout au moins théorème de WEIERSTRASS (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet (avec l'intégrale de LEBESGUE). Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet, et plus généralement sur un convexe complet; la projection est une application contractante. Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation

de SCHMIDT. Applications: suites de polynômes spéciaux, séries de FOURIER.

15. Intégration (niveau 2).

Intégrale (RIEMANN ou LEBESGUE, de préférence LEBESGUE) de fonctions numériques définies dans R^n . Théorème de LEBESGUE-FUBINI (intégrations successives). Changement de variables. Application: calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant de paramètres: continuité, dérivation, intégration. Nombreux exercices comportant des contre-exemples.

16. Calcul différentiel.

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés; calcul.

Théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment différentiables.

Formes différentielles; calcul différentiel extérieur. Formule de STOKES dans des cas simples. Primitives locales d'une forme différentielle fermée de degré un.

Systèmes différentiels: existence et unicité locales dans le cas lipschitzien. Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel: résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

Eléments de calcul des variations.

17. Fonctions analytiques d'une variable complexe.

Séries entières formelles, séries entières convergentes.

Intégrale de CAUCHY.

Développements de TAYLOR et de LAURENT.
Théorème du maximum. Résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact; critère de compacité (familles normales).

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

Systèmes différentiels holomorphes: méthodes des majorantes.

Représentation conforme. Notions sur les surfaces de RIEMANN; exemples.

18. Géométrie différentielle des courbes et des surfaces de R^3 .

Notamment: les deux formes fondamentales d'une surface. Méthode du repère mobile: courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique d'une courbe tracée sur une surface. Géodésiques d'une surface. Courbure totale d'une surface, et peut-être formule de GAUSS-BONNET.

19. Bloc élémentaire.

Théorie des entiers naturels; opérations; divisibilité, nombres premiers, théorème d'unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels: caractérisation axiomatique et existence. Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Géométrie de R^2 ou de R^3 muni du produit scalaire canonique: déplacements, angles, orientation. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes.

Axiomatization de la géométrie euclidienne: notions succinctes.

DEUXIEME NIVEAU (Mathématiques appliquées)

20. Compléments d'algèbre.

Groupes: sous-groupes, groupes-quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels; algèbre tensorielle, contraction.

Formes quadratiques et hermitiennes: loi d'inertie; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive.

Groupe orthogonal, groupe unitaire.

21. Fonctions analytiques d'une variable complexe.

Séries entières convergentes.

Intégrale de CAUCHY.

Développements de TAYLOR et de LAURENT. Théorème du maximum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Exemples de surfaces de RIEMANN. Représentation conforme.

22. Compléments de calcul intégral.

Intégrale de LEBESGUE-STIELTJES dans R^n pour les fonctions numériques: énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

23. Espaces fonctionnels.

Espaces métriques; limite, continuité. Espaces métriques complets.

Espaces vectoriels normés; espaces de BANACH. Exemples: norme de la conver-

gence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de WEIERSTRASS (approximation par les polynomes).

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet.

24. Equations intégrales.

Equation de VOLTERRA.

Equation de FREDHOLM: cas d'un noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en série de fonctions orthogonales.

25. Equations différentielles ordinaires.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

Théorème de FUCHS pour une équation linéaire du second ordre.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, noeud, foyer).

Problèmes aux limites du type STURM-LIOUVILLE.

26. Equations aux dérivées partielles.

Une équation quasi-linéaire du premier ordre: problème de CAUCHY, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi-linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de PFAFF complètement intégrable.

Equation du deuxième ordre: séparation des variables.

Equations du deuxième ordre à coefficients constants:

— Type elliptique: équation $\Delta \varphi = 0$; théorème de la moyenne, solution élémentaire; unicité pour les problèmes de NEUMANN et de DIRICHLET; fonction de GREEN, formule de POISSON pour la sphère; intégrale d'énergie (DIRICHLET). Equation $\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$: la condition de radiation; réduction à une équation intégrale.

— Type hyperbolique: équation des ondes à 1, 3 et 2 variables d'espace; solution élémentaire; problème aux limites; formules de POISSON et de KIRCHOFF. Méthode de descente. Intégrale d'énergie.

— Type parabolique: équation de la chaleur à une variable d'espace; solution élémentaire; problème aux limites.

27. Calcul des variations.

Equations d'EULER-LAGRANGE pour les intégrales simples ou multiples.

Conditions aux limites naturelles. Multipliateurs de LAGRANGE.

28. Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.

Définition des distributions sur R^n . Dérivation des distributions; exemples.

Transformations de FOURIER et de LAPLACE: introduction à la théorie. Applications aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

29. Fonctions spéciales.

1) Fonction $\Gamma(z)$. Développements asymptotiques.

2) Un choix entre les fonctions suivantes:
 — fonctions de BESSEL-HANKEL-NEUMANN;
 expression asymptotique, expressions intégrales.
 — fonctions de LEGENDRE, de LEGENDRE

associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) éventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes :

- fonctions hypergéométriques;
- polynômes de LAGUERRE;
- polynômes d'HERMITE;
- fonctions de MATHIEU;
- fonctions elliptiques.

L'Enseignement des Mathématiques dans les Lycées Danois

par Hans Jorgen Helms

Le lycée danois dure trois ans et l'âge normal des élèves varie de 16 à 18 ans.

L'enseignement est presque entièrement assuré par des professeurs agrégés, et bien qu'un curriculum soit fixé par le Ministère de l'Education Nationale, les professeurs conservent une assez grande liberté dans leur enseignement journalier ainsi que dans leur sélection des manuels.

L'enseignement se termine à la troisième classe du lycée, sanctionné par un examen sous contrôle d'état (Baccalauréat). Le baccalauréat est l'examen d'admission aux universités et grandes écoles.

Pour chaque matière enseignée au lycée, le Ministère de l'Education Nationale a nommé deux inspecteurs qui rendent régulièrement visite aux professeurs dans un but d'inspection et de consultation. Entre autres responsabilités, ils assurent la surveillance de l'instruction pédagogique des jeunes professeurs. Les inspecteurs sont choisis parmi des professeurs agrégés éminents et ils continuent à enseigner à mi-temps dans leurs propres lycées.

A partir de la nouvelle année scolaire (août 1963), la structure du lycée danois sera celle indiquée au tableau 1.

Première Classe	Série Linguistique			Série Mathématique		
Deuxième Classe	Branche Langues Modernes	Branche Langues Classiques	Sciences Politiques	Sciences Politiques	Mathématique-Physique	Biologie
Troisième Classe						

L'enseignement des mathématiques est donné dans toutes les séries et branches. Les heures des cours de mathématiques sont en série Mathématique et Branche Mathématique-Physique: Première classe, 5 heures, Deuxième classe, 6 heures, et Troisième classe, 6 heures.