

## 29. Fonctions spéciales.

1) Fonction  $\Gamma(z)$ . Développements asymptotiques.

2) Un choix entre les fonctions suivantes:  
 — fonctions de BESSEL-HANKEL-NEUMANN;  
 expression asymptotique, expressions intégrales.  
 — fonctions de LEGENDRE, de LEGENDRE

associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) éventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes :

- fonctions hypergéométriques;
- polynômes de LAGUERRE;
- polynômes d'HERMITE;
- fonctions de MATHIEU;
- fonctions elliptiques.

## L'Enseignement des Mathématiques dans les Lycées Danois

par Hans Jorgen Helms

Le lycée danois dure trois ans et l'âge normal des élèves varie de 16 à 18 ans.

L'enseignement est presque entièrement assuré par des professeurs agrégés, et bien qu'un curriculum soit fixé par le Ministère de l'Education Nationale, les professeurs conservent une assez grande liberté dans leur enseignement journalier ainsi que dans leur sélection des manuels.

L'enseignement se termine à la troisième classe du lycée, sanctionné par un examen sous contrôle d'état (Baccalauréat). Le baccalauréat est l'examen d'admission aux universités et grandes écoles.

Pour chaque matière enseignée au lycée, le Ministère de l'Education Nationale a nommé deux inspecteurs qui rendent régulièrement visite aux professeurs dans un but d'inspection et de consultation. Entre autres responsabilités, ils assurent la surveillance de l'instruction pédagogique des jeunes professeurs. Les inspecteurs sont choisis parmi des professeurs agrégés éminents et ils continuent à enseigner à mi-temps dans leurs propres lycées.

A partir de la nouvelle année scolaire (août 1963), la structure du lycée danois sera celle indiquée au tableau 1.

Première Classe	Série Linguistique			Série Mathématique		
Deuxième Classe	Branche Langues Modernes	Branche Langues Classiques	Sciences Politiques	Sciences Politiques	Mathématique-Physique	Biologie
Troisième Classe						

L'enseignement des mathématiques est donné dans toutes les séries et branches. Les heures des cours de mathématiques sont en série Mathématique et Branche Mathématique-Physique: Première classe, 5 heures, Deuxième classe, 6 heures, et Troisième classe, 6 heures.

Simultanément avec l'adoption de la nouvelle structure, on a révisé les curricula dans les diverses matières et le curriculum des mathématiques a subi un changement assez radical.

Les pages suivantes donnent une traduction française du curriculum fixé pour l'enseignement des mathématiques dans la Série Mathématique et la Branche Mathématique-Physique. Ce curriculum est inclus dans un arrêt publié par le Ministère de l'Education Nationale.

Le curriculum est rédigé par un petit comité composé par des mathématiciens et professeurs agrégés de mathématique, nommés par le Ministère.

Des groupes de mathématiciens et professeurs de mathématiques ont récemment publié des manuels tenant compte du nouveau curriculum. De plus, on a fait des efforts considérables pour faire adopter par les professeurs les idées modernes dans l'enseignement des mathématiques. Entre autres, on a organisé un certain nombre de cours d'été, qui ont été fréquentés par un grand nombre de professeurs sur une base volontaire.

#### a. Table des matières

##### 1. *Conceptions générales auxiliaires de la théorie des ensembles et de l'algèbre.*

Ensemble, sous-ensemble, complément d'un ensemble, intersection des ensembles, réunion des ensembles. Relation d'équivalence, relation d'ordre. Application d'un ensemble à et dans un ensemble (conception de la fonction), application biunivoque, application réciproque (fonction réciproque). Ensembles dénombrables. Lois de composition, les conceptions de groupe, d'anneau et de corps.

##### 2. *Les nombres entiers, rationnels, réels et complexes.*

Les nombres entiers naturels. Axiome de récurrence. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide. L'anneau des nombres entiers, classes de restes. Le corps des nombres rationnels. Le théorème: L'ensemble des nombres rationnels est un ensemble dénombrable. Le corps des nombres réels, les propriétés de continuité de l'ensemble des nombres réels, le théorème: L'ensemble des nombres réels est un ensemble non-dénombrable. Borne supérieure et inférieure. Fractions décimales infinies. Le corps des nombres complexes. Valeur absolue.

##### 3. *Analyse combinatoire.*

Combinaisons et permutations, formule du binôme. Espaces finis de probabilité. Exemples de calcul de probabilité basé sur les combinaisons.

##### 4. *Equations et inégalités.*

Equations et inégalités de premier et deuxième ordre à une grandeur inconnue. Equations et inégalités de premier ordre à deux grandeurs inconnues. Exemples simples d'autres équations. Equation binôme et équation de second degré dans le corps des nombres complexes.

##### 5. *Géométrie plane.*

Coordonnées cartésiennes. Changement des coordonnées. Vecteurs et leurs coordonnées. Calcul des vecteurs y inclus le produit scalaire de deux vecteurs. Applications analytiques des droites. Distances et angles.

Applications analytiques des cercles. Aire du triangle et du parallélogramme. Définition et application analytique de la parabole, ellipse et hyperbole. Application d'un plan

sur lui-même : Translation, rotation, homothétie et produits de ses transformations. Affinité linéaire.

### 6. Géométrie dans l'espace

Coordonnées cartésiennes. Vecteurs et leurs coordonnées. Calcul des vecteurs y inclus le produit scalaire de deux vecteurs. Applications paramétriques des droites. Applications analytiques des plans. Distances et angles. Equation de la sphère. Coordonnées sphériques. Distance sphérique entre deux points (formules du cosinus). Polyèdres. Théorème d'Euler, les polyèdres réguliers. Volume du prisme, pyramide, cylindre de révolution, cône de révolution et sphère. Aire de surface du cylindre de révolution, cône de révolution et sphère, aire d'un triangle sphérique. Coïncidence et symétrie.

### 7. Fonctions élémentaires

La fonction linéaire d'une variable. La fonction linéaire de deux variables. Lignes de niveau. Polynômes d'une variable, décomposition d'un polynôme en facteurs, nombre maxima des racines, détermination des racines rationnelles d'un polynôme des coefficients entiers. Fractions rationnelles d'une variable. Fonctions logarithmiques. Échelle logarithmique, utilisation de la règle à calcul et la table logarithmique. Fonctions exponentielles, fonctions puissances. Fonctions trigonométriques, règles d'addition, règles logarithmiques. Applications des fonctions trigonométriques à l'étude des oscillations et calcul des triangles. Fonction linéaire d'une variable complexe et son interprétation géométrique.

### 8. Calcul infinitésimal

Limites. Continuité et dérivation d'une fonction réelle d'une variable. Continuité et dérivation d'une fonction vectorielle d'une

variable réelle (vecteur tangente). Propriétés de dérivation. Formule de Taylor (polynômes approximatif), différentielles. L'intégrale définit comme limite des sommes. Primitives. Opérations sur intégrales et primitives y inclus intégration par parties et changement de variable.

### 9. Applications du calcul infinitésimal.

Étude de l'ensemble des valeurs d'une fonction et de la variation d'une fonction. Exemples simples sur l'étude des propriétés asymptotiques d'une fonction. Construction des courbes planes représentées par une fonction explicite ou une application paramétrique simple. Vecteur vitesse, vecteur accélération. Calcul des aires et volumes au moyen d'intégrales. Exemples sur l'étude des espaces probabilités au moyen de fonctions fréquences. Exemples d'équations différentielles simples. Exemples sur l'application du calcul infinitésimal aux problèmes tirés d'autres spécialités.

### 10. Sujet facultatif.

#### b. Remarques générales

La table des matières établie paragraphe a., n'est pas une liste chronologique donnant une suite ou les sujets doivent être obligatoirement traités dans l'enseignement. Le professeur peut modifier l'ordre dans lequel il lui paraît le plus satisfaisant, en considération de ses propres vues pédagogiques et systématiques en tenant compte des relations étroites avec la physique, la chimie et la biologie.

On accorde une grande importance et il est considéré comme très utile pour l'enseignement des mathématiques ainsi que pour la physique que soit établie une coordination propre entre les programmes relatifs aux

deux sujets. En conséquence de cet enseignement parallèle, on peut dire par exemple que le chapitre consacré au calcul infinitésimal sera traité au plus tard au début de la deuxième classe.

En relation avec les matières convenables présentées aux élèves, ces derniers doivent résoudre les problèmes que posent le calcul numérique. A ce titre on donne les exemples suivants: Résolution des équations de premier et deuxième ordre avec nombres décimaux comme coefficients, calcul des triangles, calculs des probabilités basés sur les fonctions fréquences. Résolution approximative des équations algébriques et transcendantes simples, calcul approximatif des valeurs des fonctions au moyen des polynômes approximatifs, et calcul approximatif des intégrales par sommation. Pour résoudre ces problèmes sur le plan pratique on doit utiliser: La règle de calcul (25 cm) qui outre les échelles de base ordinaires doit porter des échelles pour  $x^{-1}$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\log x$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ . On doit également utiliser la table de logarithmes à quatre chiffres, les tables trigonométriques à quatre chiffres et la table des carrés. Occasionnellement d'autres moyens sont bons pour faire des calculs, notamment les nomogrammes, feuilles de fonctions ou des tables sur des fonctions autres que celles déjà mentionnées.

Pour des raisons professionnelles et plus particulièrement culturelles il est d'importance de ne pas sous-estimer l'origine et l'évolution historique de quelques unes de ces conceptions fondamentales en relation avec le procédé général de ces conceptions. De plus on doit introduire des courtes analyses biographiques sur ces mathématiciens. Leurs œuvres, l'importance qu'elles ont eues dans le cadre des matières traitées.

On suppose que la connaissance des élèves à «l'école royale» (école préparant le lycée) relative aux opérations simples algébriques est supplée par un enseignement au lycée.

Par exemple, les élèves doivent connaître et être capables d'appliquer les formules de la somme d'une série arithmétique et géométrique.

La théorie sur les nombres distances des droites et des arcs, nombres aires des domaines plans et surfaces, et nombres volumes des solides, peut être basé sur un système de axiomes où l'on suppose l'existence de telles mesures additives.

Occasionnellement, on doit traiter des problèmes et exemples tirés d'autres spécialités (la physique, la chimie, la biologie, les sciences politiques etc.). Ces exemples doivent être vus sous un angle très vaste et plus particulièrement montrer d'une manière approfondie les applications mathématiques dans la mesure du possible.

Des exemples tirés de la physique, le professeur doit essayer de montrer à ses élèves, que l'application dans la physique des conceptions mathématiques suit la définition de ces conceptions, bien que le langage et le raisonnement dans la physique, pour des raisons pratiques, soient très souvent plus courts que dans ceux des mathématiques.

### c. Remarques relatives aux différents points de la table des matières

#### *Au point 1.*

Les conceptions générales sur la théorie des ensembles ont pour but d'éclairer des conceptions fondamentales, ainsi que d'être le fondement d'une manière d'expression précise et moderne. Les conceptions sur la théorie des ensembles doivent être définies lorsque d'autres conceptions sont étudiées et dans ces circonstances peuvent illustrer les conceptions générales au moyen d'exemples divers. De plus, on attache beaucoup d'importance à démontrer aux élèves comment

quelques unes de ces conceptions simples trouvent leur application dans la logique.

D'une manière générale la conception de fonction doit être exposée comme suit: Application d'un ensemble dans un ensemble, démonstration qui permet de faire comprendre aux élèves comment la conception de fonction est une conception qui s'applique partout dans les mathématiques de même qu'elle permet de démontrer et illustrer les moyens par lesquels une fonction représentée doit être variée selon la nature des deux ensembles.

En ce qui concerne les conceptions algébriques on ne doit pas exposer une théorie systématique. Les conceptions, lois de composition, groupe, anneau et corps doivent servir comme base pour une description des propriétés algébriques des ensembles de nombres. De plus, divers exemples sur ces conceptions fondamentales permettent de montrer une homogénéité entre les différentes disciplines qui d'ailleurs ne paraissent pas à priori s'apparenter.

#### *Au point 2.*

Dans la partie consacrée aux entiers naturels, on doit faire remarquer le rôle fondamental de l'axiome de récurrence ainsi que son utilisation fréquente comme moyen de démonstration.

En ce qui concerne les nombres premiers on peut se borner au théorème: La série des nombres premiers est infinie, et le théorème sur la décomposition unique d'un nombre en facteurs premiers.

Les élèves devront être attentifs quand sera étudié l'important chapitre sur la valeur absolue, car ils trouveront maintes applications dans leurs problèmes tant dans les équations et inégalités que dans l'étude des fonctions.

Concernant les nombres réels, on ne

réclame pas une théorie constructive des nombres irrationnels.

#### *Au point 3.*

Les élèves doivent prendre connaissance de la conception générale suivante: Un espace probabilité fini, également, on ne doit pas se borner à des espaces où toutes les épreuves ont la même probabilité.

En d'autres termes, cela consiste à présenter un modèle mathématique simple et utiliser la langage propre qui s'attache à ce modèle.

#### *Au point 4.*

Parmi les différents types d'équations où il se révèle nécessaire de citer des exemples, il faut mentionner: Un système à trois équations linéaires avec trois grandeurs inconnues, un système de deux équations avec deux grandeurs inconnues, où une équation est du premier ordre et l'autre du deuxième ordre équations où la grandeur inconnue est sous signe radical, équations exponentielles et trigonométriques avec une grandeur inconnue. Tous les exemples d'équations et systèmes d'équations doivent être simples et le sujet ne doit pas subir une conclusions systématique.

#### *Au point 5.*

Les transformations des coordonnées doivent inclure translation et rotation du système des coordonnées.

En géométrie analytique la conception des vecteurs doit jouer un rôle central et les élèves doivent avoir l'habitude d'opérer avec des vecteurs de manière à ce qu'une transformation en coordonnées ne soit pas toujours nécessaire.

L'expression «applications analytiques des

droites» comprend d'une part équation coordonnée, et par ailleurs équation vectorielle, ainsi que l'application paramétrique et équation normée.

L'étude sur la théorie des coniques peut se limiter à la dérivation des équations pour la parabole, l'ellipse et l'hyperbole, ayant pour base les définitions géométriques de ces courbes. On doit déterminer les asymptotes d'une hyperbole. Les propriétés spéciales des coniques peuvent être étudiées dans le cadre réservé aux exercices. Il s'agit notamment des théorèmes sur les tangentes, des diamètres.

Comme il est indiquée à la table des matières, on suppose que les applications mentionnées doivent être traitées comme applications d'un plan sur lui-même, non seulement comme applications des figures singulières, mais comment doivent être étudiées les propriétés des figures (mesure distance, angles et aires) et leur évolutions pendant l'application (propriétés variantes et non-variantes). Plus particulièrement, on doit montrer que l'ellipse est l'image d'un cercle par une affinité linéaire. On étudiera l'application paramétrique de l'ellipse.

#### *Au point 6.*

Sans preuve, on détermine les théorèmes fondamentaux sur le parallélisme et l'orthogonalité des droites et plans dans la mesure où c'est nécessaire pour l'introduction des coordonnées cartésiennes et le traitement des polyèdres.

L'application analytique du plan doit inclure l'équation coordonnée, l'équation vectorielle, ainsi que l'équation normée.

Les exercices pratiques des coordonnées sphériques doivent renfermer entre autres des problèmes géographiques et astronomiques.

En ce qui concerne les polyèdres regu-

liers, on suppose seulement une étude développée pour le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre.

#### *Au point 7.*

Dans l'étude de la fonction linéaire à deux variables, et ses lignes de niveau, on peut traiter les problèmes sur la détermination des maxima et minima d'une telle fonction dans un domaine représenté par un système d'inégalités linéaires (programmation linéaire).

La mention des polynômes doit en regard de l'étude du point de vue théorie des fonctions tenir également compte du rapport algébrique sur l'ensemble des polynômes est un anneau et un soulignement d'analogie entre l'ensemble des entiers et l'ensemble des polynômes.

L'étude de la règle à calcul doit se résumer à son principe même et à l'exercice des opérations fondamentales. On ne doit pas consacrer beaucoup de temps à démontrer des finesses techniques. L'importance des calculs logarithmiques étant en régression, ces calculs doivent s'effacer du programme dans les lycées. Dans le calcul des triangles, il est rationnel de montrer aux élèves que les fonctions trigonométriques servent de base pour la détermination générale des côtés et angles d'un triangle basé sur la connaissance de trois d'entre eux. De manière à ne pas introduire l'étude du système des formules logarithmiques, on peut se limiter à indiquer les formules de sinus et cosinus.

A travers les diverses applications des fonctions trigonométriques à l'étude des oscillations, on suppose qu'en démontrant le théorème, une combinaison linéaire d'oscillations harmoniques avec la même fréquence est une oscillation harmonique, et on peut donner des exemples sur la décomposition des fonctions trigonométriques dans les oscillations harmoniques.

*Au point 8.*

En rapport avec la conception des limites, il faut mentionner les théorèmes sur les opérations des limites des séries des nombres et des fonctions. On peut se borner à démontrer un seul de ces théorèmes.

Concernant les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, le professeur appréciera lui-même combien et quels théorèmes il doit démontrer.

En relation avec la formule de Taylor, les élèves doivent être capables de réaliser eux-même des calculs approximatifs des valeurs de certaines fonctions.

*Au point 9.*

Le calcul du volume par l'intégration doit inclure l'étude du volume des solides à révolution et de la pyramide.

On suppose que la place des fonctions de fréquence comme base de détermination des espaces probabilité finie dans le cas singulier doit être fondée sur un postulat concernant l'existence d'une telle fonction telle que la répartition de probabilité correspondant à n'importe quelle division finie d'intervalle peut se déterminer par l'intégration de cette fonction sur les intervalles individuels. On insère le sujet dans le cadre des espaces probabilité fini et de cette manière les problèmes sont essentiellement des problèmes d'intégration exposés au langage de la théorie de probabilité. L'étude des équations différentielles peut être limitée aux équations suivantes :

$$dy/dx = f(x) \text{ et } dy/dx = g(y) (g(y) \neq 0).$$

A titre d'exemples des applications en physique notons entre autres des calculs simples de moments d'inertie et déterminations simples du centre de gravité.

*Au point 10.*

On suppose que le sujet facultatif s'étendant sur une période de travail de deux mois environ, peut être inclus dans l'instruction générale au moment le plus favorable, et ceci bien entendu en fonction du caractère du sujet. Il ressort donc que le sujet facultatif n'est pas nécessairement étudié à la fin de la troisième classe. D'ailleurs, on peut judicieusement faire coordonner un enseignement parallèle entre le sujet facultatif et ceux obligatoires.

Le choix du sujet facultatif doit supposer être fait de telle sorte qu'il ne soulève pas de difficultés insurmontables pour les élèves, et doit se situer dans un niveau de compréhension égal au niveau des mathématiques enseignés dans les lycées.

Le sujet facultatif pourra être tiré des exemples suivants : Histoire des mathématiques, théorie des nombres, matrices et déterminants, théorie des groupes, théorie des ensembles, l'algèbre logique, équations différentielles, séries et développement en séries, théorie de probabilité, théorie de statistique, théorie de jeu, topologie, géométrie projective, théorie des coniques, géométrie non-euclidienne, géométrie à plusieurs dimensions, constructions géométriques.

De plus, le sujet facultatif peut être choisi de manière à ce qu'il soit étudié en combinaison avec l'étude spéciale dans l'enseignement de la physique (sujet facultatif dans l'enseignement de la physique). Comme exemples, on donne : Théorie de probabilité et théorie moléculaire cinétique, équations différentielles et circuits d'oscillation.

Enfin, on peut traiter le sujet facultatif en relation avec des matières autres que la physique. A titre d'exemple, on cite : Théorie de probabilité et génétique.

Le sujet facultatif doit être soumis à l'inspecteur général pour son approbation.