ções: equações diferenciais, ordinárias ou parciais, equações integrais, etc. (1).

Em conformidade, propomos aos matemáticos portugueses a consideração de dois problemas:

a) necessidades nacionais de cálculo automático;

b) o problema da tradução automática em português, que exigirá a elaboração de novos meios de análise e discrição da nossa língua por métodos precisos com base na matemática, nomeadamente na Álgebra.

21 de Agosto de 1961

José Gaspar Teixeira

(1) Em apêndice foi apresentado resumo dos programas de matemática necessários aos elementos responsáveis pela actividade de um Centro de Cálculo.

Cf. E. M. Grabbe, S. Ramoo, D. E. Wooldridge, «Handbook of Automation, Computation and Control», Vol. I, John Willey & Sons.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 15-7-1963.

5584 — 1) Prove que a sucessão $u_1 = a$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$ é monótona. Qual é o seu limite?

Nota: Considere os casos $a > 0$ e $a < 0$.

R: *Com* $a > 0$ *todos os termos da sucessão são positivos e tem-se* $u_{n+1} < u_n$, *isto é, a sucessão é decrescente e* $\lim u_n = l \geq 0$. *Como* l *deve satisfazer à equação* $l = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+l^2}}$, *resulta imediatamente* $l = 0$.

Com $a < 0$ *todos os termos da sucessão são negativos e, como* $|u_{n+1}| < |u_n|$, *vem* $u_{n+1} > u_n$, *isto é, a sucessão é monótona crescente e* $\lim u_n = l_1 \leq 0$. *Como* l_1 *deve satisfazer à equação* $l_1 = \dfrac{l_1}{1+\sqrt{1+l_1^2}}$, *resulta imediatamente* $l_1 = 0$.

2) Seja $B_0 + \dfrac{B_1}{1!}x + \dfrac{B_2}{2!}x^2 + \cdots$ o desenvolvimento em série de Mac-Laurin da função

$$\frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots}.$$

Deduza a fórmula de recorrência

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$$

e aproveite-a para calcular, em particular, os valores de B_0, B_1, B_2 e B_3.

R: *Será*

$$1 = \left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots\right)$$

ou

$$1 = B_0 + \left(\frac{B_0}{2!\,0!}+\frac{B_1}{1!\,1!}\right)x + \cdots + \left(\frac{B_0}{n!\,0!}+\frac{B_1}{(n-1)!\,1!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!}\right)x^{n-1}+\cdots$$

isto é, $B_0 = 1$ *e* $\dfrac{1}{n!}\dfrac{B_0}{0!}+\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{B_1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{1!}\dfrac{B_{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot (n = 2, 3 \cdots)$.

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $n!$ *vem imediatamente a fórmula pretendida. Tem-se* $B_0 = 1$ *e os valores de* B_1, B_2 *e* B_3 *obtêm-se das equações:*

$$\binom{2}{0}B_0+\binom{2}{1}B_1 = B_0+2B_1 = 1+2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -1/2$$

$$\binom{3}{0}B_0+\binom{3}{1}B_1+\binom{3}{2}B_2 = B_0+3B_1+3B_2 = 1-\frac{3}{2}+3B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

$$\binom{4}{0}B_0+\binom{4}{1}B_1+\binom{4}{2}B_2+\binom{4}{3}B_3 = B_0+4B_1+6B_2+4B_3 = 1-2+1+4B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = 0.$$

3) Refira-se à utilização da fórmula de TAYLOR no estudo dos máximos e mínimos de $f(x)$.

Ache os extremantes de $y = x^m (b - x)^n$ (m e n naturais, $b > 0$).

R: $$y' = m\,x^{m-1}(b-x)^n - n\,x^m (b-x)^{n-1} = \\ = x^{m-1}(b-x)^{n-1}[m\,b - x\,(m+n)]$$

Os pontos de estacionaridade são $x_1 = 0$, $x_2 = b$ *e* $x_3 = \dfrac{m\,b}{m+n}$. *Fàcilmente se reconhece que em* $x_1 = 0$ *a função é crescente se* m *é ímpar e tem um mínimo se* m *é par; em* $x_2 = b$ *a função é decrescente se* n *é impar e tem um mínimo se* n *é par; em* $x_3 = \dfrac{m\,b}{m+n}$ *a função tem um máximo.*

4) Estude a continuidade de

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - y^2} & (y \neq \pm x) \\ 0 & (y = \pm x) \end{cases}$$

no seu campo de existência e nos conjuntos

$$C_1 = \{(x, y) / y = x\} \text{ e } C_2 = \{(x, y) / y = -x\}.$$

Calcule $g'_x(0, 0)$ e $g'_y(0, 0)$.

R: *A função não é contínua no seu campo de existência pois as rectas* $y = x$ *e* $y = -x$ *são linhas de descontinuidade. No entanto, nos conjuntos* C_1 *e* C_2, *a função é contínua pois* $g(x, y) \equiv 0$.

$$g'_x(0, 0) = \lim_{x=0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x^3} = \mp\infty$$

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y=0} \frac{g(0, y) - g(0, 0)}{y} = \lim_{y=0} -\frac{1}{y^3} = \pm\infty$$

5) Sejam $y_i = y_i(x_1, \cdots x_n)$ $(i = 1, \cdots n)$ n funções diferenciáveis das n variáveis $x_1, \cdots x_n$ e designem $x_i = x_i(t_1, \cdots t_m)$ n funções diferenciáveis das m variáveis $t_1, \cdots t_m$. Prove a igualdade matricial $\left\{\dfrac{\partial y_i}{\partial t_k}\right\} = \left\{\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right\} \times \left\{\dfrac{\partial x_j}{\partial t_k}\right\}$.

R: *Pelo teorema da derivação de uma função composta vem* $\dfrac{\partial y_i}{\partial t_k} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial t_k}$ (j *mudo corrente de* 1 a n) *e daqui resulta imediatamente a igualdade matricial proposta.*

6) Discuta, utilizando a teoria dos determinantes, o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= k \end{aligned}$$

Interprete geomètricamente a discussão.

R: *Considere-se a matriz do sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fàcilmente se vê que o determinante principal é $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *e, construindo o característico*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = k - 1,$$

o teorema de ROUCHÉ *permite afirmar que o sistema é possível (simplesmente indeterminado) quando* $k = 1$ *e impossível quando* $k \neq 1$.

A interpretação geométrica é óbvia: no primeiro caso, o plano representado pela equação $2x + 3y + z = 1$ *contem a recta definida pelos outros dois; no segundo caso, o plano* $2x + 3y + z = k$ $(k \neq 1)$ *é paralelo à recta definida pelos outros dois.*

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita — 19-7-1963.

5585 — Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

R: *Considerando a serie associada* $\displaystyle\sum_0^\infty \left|\frac{x}{1+x}\right|^n$, *como* $\sqrt[n]{\left|\dfrac{x}{1+x}\right|^n} = \left|\dfrac{x}{1+x}\right|$, *a série dada será absolutamente convergente quando* $\left|\dfrac{x}{1+x}\right| < 1$, *isto é, quando* $x > -\dfrac{1}{2}$.

Quando $\left|\dfrac{x}{1+x}\right| > 1$, *ou* $x < -\dfrac{1}{2}$, *a série é divergente pois o termo geral não tende para zero.*

Para $x = -\dfrac{1}{2}$ *obtem-se a série de* EULER $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n$ *que é divergente.*

2) Enuncie e demonstre o teorema de ROLLE para as funções regulares. Aplicando esta proposição a $\varphi(x) = f(x)\,e^{-kx}$, prove o seguinte teorema: «Se $f(x)$ é regular e não identicamente nula em $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = 0$, a função $f'(x)/f(x)$ assume todo o valor real k em $[a, b]$.

R: *Como* $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ *e* $\varphi(x)$ *é regular em* $[a,b]$, *o teorema de* Rolle *aplicado a esta função diz que* $\varphi'(c)=0\ (a<c<b)$. Ora $\varphi'(x)=e^{-kx}[f'(x)-k\,f(x)]$ *e* $\varphi'(c)=0\Longrightarrow k=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$.

3) Calcule $P\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

R: $$\frac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2}{(x-1)^3}+$$
$$+\frac{S_0}{x^2+1}$$

Cálculo de a_0, a_1 e a_2:

$R_1(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+1}$ *e, fazendo* $x-1=t$, *vem* $R_1(1+t)=\dfrac{2+4t+5t^2+\cdots}{2+2t+t^2}$.

Efectuando a divisão ascendente do numerador pelo denominador e levando o cociente até ao grau 2, obtem-se $1+t+t^2=1+(x-1)+(x-1)^2$, *isto é,* $a_0=a_1=a_2=1$.

Cálculo de S_0:

Fazendo $\Delta=x^2+1$, *ordene-se o numerador e o denominador de* $R_\Delta(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-1)^3}$ *segundo as potências crescentes de* Δ. *Obtem-se*

$$R_\Delta(x)=\frac{-4x+\cdots}{(2+2x)+\cdots}$$

e, como $-4x$ *não é divisível por* $2+2x$ *tome-se* α_0 *por forma que* $-4x-\alpha_0\Delta$ *fique divisível por* $2+2x$. *A equação* $(-4x-\alpha_0\Delta)_{x=-1}=0$ *dá* $\alpha_0=2$ *e o novo coeficiente será* $-2x^2-4x-2$. *Vem imediatamente* $S_0=\dfrac{-2x^2-4x-2}{2+2x}=-x-1$.

$$\frac{x^3+2x^2-3x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$P\frac{x^3+2x^2-3x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=P\frac{1}{(x-1)^3}+P\frac{1}{(x-1)^2}+$$
$$+P\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1}-P\frac{1}{x^2+1}=$$
$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\log|x-1|-$$
$$-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\operatorname{artg}x.$$

4) Mostre que a equação $x^2y^3+x^2y^2-2xy+x+y=0$ define uma função implícita $y(x)$ na vizinhança de $P(0,0)$. Escreva a equação da tangente à curva representativa de $y(x)$ em $P(0,0)$ e verifique que, na vizinhança deste ponto, a curva está abaixo da tangente.

R: *Fazendo* $f(x,y)=x^2y^3+x^2y^2-2xy+x+y$, *vem* $f(0,0)=0$, $f'_x(x,y)$ *e* $f'_y(x,y)$ *contínuas e* $f'_y(0,0)\neq 0$, *o que garante a existência de* $y(x)$.

Como $y'(0)=-\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)}=-1$, *a equação da tangente em* $P(0,0)$ *é* $y=-x$.

Como

$$y''(0)=-\frac{f''_{x^2}(0,0)+2f''_{xy}(0,0)\,y'(0)+f''_{y^2}(0,0)\,[y'(0)]^2}{f'_y(0,0)}=$$
$$=-4<0$$

a curva tem a concavidade voltada para baixo na vizinhança de $P(0,0)$.

5) A tabela

x	$g(x)$
1	1
4	0,25

foi construída tomando $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ache o polinómio de grau mínimo que para aqueles valores de x toma os correspondentes valores de $g(x)$.

Supondo que utiliza esse polinómio para achar valores de $g(x)$ em $[1,4]$, mostre que o erro máximo que se pode cometer é 0,25 (em valor absoluto) e indique o valor de x para o qual o erro assume esse valor.

R: *O polinómio interpolador é*

$$I(x)=1-0{,}25\,(x-1)=-0{,}25\,x+1{,}25.$$

Fazendo $R(x)=\dfrac{1}{x}-(-0{,}25\,x+1{,}25)=\dfrac{1}{x}+0{,}25\,x-1{,}25$, *determine-se o extremo desta função em* $[1,4]$. *Como* $R'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+0{,}25$, *a equação* $R'(x)=0$ *dá* $x=2$ *(minimizante). Como* $R(2)=-0{,}25$, *vem* $|R(2)|=0{,}25$ *como se queria demonstrar.*

6) Seja A uma matriz quadrada real de ordem n cujos elementos satisfazem à condição $|a_i^j| \leqq k$. Mostre que os elementos de $A^2, \cdots A^p$ são majorados, respectivamente, por $n\,k^2, \cdots n^{p-1}\,k^p$.

Aproveite este resultado para mostrar que cada um dos elementos da matriz

$$S_p = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^p}{p!}$$

tende para um limite finito quando $p \to \infty$.

R: *Fazendo* $B = A^2$, *é* $b_i^j = a_i^\alpha\, a^j$ *e portanto* $|b_i^j| \leqq |a_i^\alpha|\,|a_\alpha^k| \leqq n k^2$. *O elemento generico de* $C = A^3$ *é* $c_i^j = b_i^\alpha\, a_\alpha^j$, *donde* $|c_i^j| \leqq |b_i^\alpha|\,|a_\alpha^j| \leqq n^2 k^3$, *etc.*

Designando por $s_{i\,(p)}^j$ *o elemento genérico de* S_p, *vem*

$$s_{i\,(p)}^j = \varepsilon_i^j + a_i^j + \frac{b_i^j}{2!} + \frac{c_i^j}{3!} + \cdots + \frac{h_j^i}{p!} \text{ e, como}$$

$$|\varepsilon_i^j| \leqq 1, \; |b_i^j| \leqq n\,k^2, \cdots |h_i^j| \leqq n^{p-1}\,k^p,$$

resulta imediatamente

$$|s_{i\,(p)}^j| \leqq 1 + k + \frac{n\,k^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{p-1}\,k^p}{p!}.$$

A série $1 + k + \dfrac{n\,k^2}{2!} + \cdots + \dfrac{n^{p-1}\,k^p}{p!} + \cdots$ *é absolutamente convergente (com qualquer* n *e* k*) e assim cada termo de* S_p *tem limite finito quando* $p \to \infty$.

É costume escrever

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^p}{p!} + \cdots$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro — Prova escrita — 1-10-1963.

5586 — 1) Dá-se o nome de *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B, e designa-se por $A \Delta B$, ao conjunto definido do seguinte modo:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Demonstre as seguintes propriedades da diferença simétrica:

a) $A \Delta A = \emptyset$

b) $A \Delta B = B \Delta A$

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

d) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

R: *a*) $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

b) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$

c) $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)] = [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] = (A \cap B - A \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

d) *Em virtude da definição de diferença simétrica, tem-se*

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B \Longleftrightarrow{} & \{(x \in A) \wedge [\sim (x \in B)]\} \vee \{(x \in B) \wedge \\ & \wedge [\sim (x \in A)]\} \Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge \{(x \in A) \vee \\ & \vee [\sim (x \in A)]\} \wedge \{[\sim (x \in B)] \vee (x \in B)\} \wedge \\ & \wedge \{[\sim (x \in B)] \vee [\sim (x \in A)]\} \Longleftrightarrow [x \in A \cup B] \wedge \\ & \wedge [\sim (x \in A \cap B)] \Longleftrightarrow x \in [(A \cup B) - (A \cap B)]. \end{aligned}$$

2) No conjunto das funções reais de variável real considere a seguinte relação binária:

$$\varphi(x) \sim \psi(x) \Longleftrightarrow \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

a) Mostre que se trata de uma relação de equivalência.

b) Estarão na relação dada as funções $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x$ e $\operatorname{tg} x - x$, com $a = 0$?

R: *a*) *A relação é visivelmente reflexiva, simétrica e transitiva.*

b) *Como*

$$\begin{aligned} \lim_{x=0} \frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x}{\operatorname{tg} x - x} &= \\ = \lim_{x=0} \frac{2 \cos x - \cos 2x - 1}{\sec^2 x - 1} &= \\ = \lim_{x=0} \frac{-2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x}{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x} &= \\ = \lim_{x=0} \frac{-2 + 4 \cos x}{2 \sec^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos x}} &= 1, \end{aligned}$$

as funções estão na relação dada.

3) Calcule:

a) $P \dfrac{x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.

b) $P \dfrac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$:

R:

a) $$P \frac{x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = P \frac{x}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})} = $$

$$= P \frac{x}{e^x} = -P\, x\, e^{-x} (-1) = -e^{-x} x + P\, e^{-x} = $$

$$= -e^{-x} x - e^{-x} + C.$$

b) *Faça-se* $\operatorname{tg} x = t$. *Então*

$$\mathrm{P}\frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \mathrm{P}\frac{1}{1-t^2} = -\mathrm{P}\frac{1}{(t-1)(t+1)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{tg\,x+1}{tg\,x-1}\right| + C.$$

4) Seja $f(x,y)$ homogénea de grau α, isto é,

$$f(x+xt, y+yt) = (1+t)^{\alpha} f(x,y)\cdot$$

Desenvolvendo $f(x+xt, y+yt)$ pela fórmula de Taylor e $(1+t)^{\alpha}$ pela fórmula do binómio, deduza as seguintes igualdades:

$$x f'_x + y f'_y = \alpha f,\ x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = \\ = \alpha(\alpha-1)f, \text{ etc.}$$

R: $$f(x,y) + (x f'_x + y f'_y)\,t + \\ + \frac{1}{2!}(x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2})\,t^2 + \cdots = \\ = f(x,y) + \alpha f(x,y)\,t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} f(x,y)\,t^2 + \cdots$$

e, identificando ambos os membros, ficam deduzidas as igualdades.

5) Deduza as fórmulas de Girard e aproveite-as para determinar o valor de m tal que as raízes do polinómio $x^3 - 3x^2 - x + m$ estejam em progressão aritmética. Indique também as raízes.

R: *As raízes são* r_1, r_1+h *e* r_1+2h *e, como* $r_1 + (r_1+h) + (r_1+2h) = 3$, *vem imediatamente* $r_1 + h = 1$. *Assim uma das raízes é* 1 *e portanto* $1 - 3 - 1 + m = 0 \Rightarrow m = 3$.

Dividindo $x^3 - 3x^2 - x + 3$ *por* $x-1$, *obtem-se o cociente* $x^2 - 2x - 3$ *que tem as raízes* -1 *e* 3. *As raízes do polinómio dado são pois* -1, 1 *e* 3.

6) Determine k por forma que os planos

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= k \end{aligned}$$

tenham um ponto comum. Mostre que esse ponto é único e calcule as suas coordenadas.

Escreva as equações da recta que passa por esse ponto e faz ângulos de 45° com os eixos Ox e Oy (eixos coordenados triortogonais).

R: *A matriz do sistema é* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e, como $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$, *a característica de* A *é* $r = 3$. *Construindo o característico*

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{vmatrix},$$

terá de ser $\Delta'_4 = 0$ *o que implica* $k = 2$.

Como $r = n$, *o sistema será determinado e a sua solução obtem-se fàcilmente pela regra de Cramer:* $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$.

Como os cosenos directores da recta satisfazem à relação $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ *vem*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos\gamma = 0.$$

A recta pretendida terá as equações normais

$$\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-1}{0} \quad ou \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Enunciados e resoluções dos n.os 5584 a 5586 de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Exame final da 6.ª cadeira — Epoca de Julho — 1962-1963.

(Responda apenas a quatro questões)

5587 — 1 — Considere o campo vectorial definido pelo vector $\mathbf{v} = v_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$ sendo v_1, v_2, v_3 funções continuamente deriváveis até à segunda ordem num certo domínio $\mathcal{D}$.

a) Defina divergência e rotacional do campo e mostre que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0.$$

b) Supondo que $\mathbf{a}$ é um vector constante mostre que

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) = -\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}).$$

2 — Mostre que as superfícies

$$xy + yz - 4zx = 0 \quad \text{e} \quad -5x + y + 3z^2 = 0$$

tem planos tangentes perpendiculares no ponto (comum) $P = (1, 2, 1)$. Determine nesse ponto as equações cartesianas e equações vectoriais da tangente e do plano normal à linha intersecção das superfícies.

3 — *a*) Quando é que se diz que um sistema de funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ integráveis no intervalo $[\alpha, \beta]$ é ortogonal nesse intervalo?

Mostre que o sistema formado pelas funções

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(nx), \quad n = 1, 2, \cdots$$

é ortogonal no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Mostre que para $0 < x < a$ se tem

$$x = \frac{2a}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{a} - \cdots\right)$$

4 — Calcule o valor do integral

$$\iiint_{\mathfrak{D}} z\, dv$$

sendo $\mathfrak{D}$ o domínio limitado pelo plano xOy e compreendido entre as superfícies de revolução obtidas por rotação em torno do eixo dos zz das linhas

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, & z \leqslant 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{4}y^2 - 1, & z \leqslant 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

5 — *a*) Mostre que $y = x$ e $y = xe^x$ são soluções particulares da equação

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 0.$$

b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar, pelo método da variação das constantes arbitrárias, o integral geral da equação

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = \frac{1}{2}x^3.$$

Enunciado de A. César de Freitas

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

155 — B. A. Trahtenbrot — **Algorithmes et machines à calculer** — Monographies Dunod — Dunod — Paris VI.

A teoria das funções recursivas, mais propriamente a TEORIA dos ALGORITMOS é um ramo da matemática com pouco mais de um quarto de século de existência, e que desempenha no século XX um papel equivalente ao da Teoria dos Conjuntos no século XIX e no correspondente desenvolvimento de toda a matemática dos nossos dias.

A presente monografia constitui uma iniciação na referida Teoria dos Algorítmos e traduz algumas das características fundamentais da Escola russa matemática contemporânea, de uma maneira geral, e particularmente neste domínio:

a) preocupação da ligação entre esta Teoria e os problemas de automatismo, questões na ordem do dia na URSS.

b) preocupação de natureza pedagógica, essencial em domínios onde as complicações técnicas decorrentes do rigor necessário «encobrem por vezes a simplicidade do raciocínio».

c) preocupação de avaliar a potência máxima dos calculadores automáticos.

Na base deste livro situam-se conferências populares e exposições gerais realizadas pelo Autor, desde 1951, na pequena cidade de Penza, perante diversos auditórios, e vários artigos escritos no jornal elementar *Matemática na Escola* (n.os 4-5, 1956).

A exposição esclarece de forma particularmente feliz as duas noções de base da teoria dos algorítmos: a noção de algorítmo e a noção de autómato de memória infinita (máquina de Turing). Depois da descrição da noção de algorítmo, a diferença entre algorítmos pràticamente realizáveis e algorítmos realizáveis apenas teòricamente é exemplificada pela «táctica» e pela «estratégia» do jogo de xadres: este exemplo é precedido pelo estabelecimento dum algoritmo de estratégia, para certos jogos, pelo método «arborescente». Em seguida, o estudo das máquinas automáticas em geral e dos algorítmos ou «programas» para estas máquinas precede o estudo das máquinas de Turing e das máquinas universais. Finalmente nos últimos dois capítulos são tratados problemas algorìtmicamente insolúveis, os primeiros resultados dos quais, publicados em 1855 pelo jovem Novikov, produziram grande impressão no mundo matemático.

Esta pequena obra destina-se a matemáticos e engenheiros, mas pode ser lida por estudantes das escolas de engenharia e ciências, pois não exige conhecimentos profundos.

J. G. T.