ANO XXIV — N.º 90-91 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JAN./JUNHO — 1963

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Funções periódicas na recta e no plano complexo. Funções duplamente periódicas; funções elípticas(1)

por *Ruy Luis Gomes*

1. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função sobre R.

DEFINIÇÃO 1. *Seja* $\mathrm{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *uma aplicação de* R *em* R.

Diz-se que $\mathrm{T} \in \mathrm{R}$ *é um período de* f *quando*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{T})=\mathrm{f}(\mathrm{x})$$

para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$.

TEOREMA 1. *O conjunto dos períodos de* f *constitue um subgrupo do grupo aditivo* R *dos números reais.*

Chama-se a este subgrupo G — *grupo dos períodos de* f.

DEMONSTRAÇÃO.

1) $0 \in G$, visto que $f(x+0)=f(x)$ para $\forall\, x \in R$.

2) $T \in G \Rightarrow -T \in G$, visto que a hipótese $T \in G$ permite escrever $f(x-T)=$ $=f[(x-T)+T]=f(x)$, $\forall\, x \in R$.

3) $T_1 \in G$ e $T_2 \in G \Rightarrow T_1+T_2 \in G$, visto que a hipótese $T_1, T_2 \in G$ permite escrever $f(x+(T_1+T_2))=f[(x+T_1)+T_2]=$ $=f(x+T_1)=f(x)$ para $\forall\, x \in R$.

TEOREMA 2. *Se* f *é uma aplicação contínua de* R *em* R, *então* G *é um subgrupo fechado de* R.

DEMONSTRAÇÃO. Seja (T_n) uma sucessão de elementos de G, convergente para $T \in R$.

Precisamos de mostrar que $T \in G$, o que equivale a $f(x+T)=f(x)$ para $\forall\, x \in R$.

Ora como $f: R \to R$ é contínua tem-se

$$f(x+T)=f(x+\lim_n T_n)=\lim_n f(x+T_n)=f(x)$$

para $\forall\, x \in R$.

Vamos agora caracterizar os subgrupos fechados de R.

TEOREMA 3. *Os únicos subgrupos fechados de* R *são:* $\{0\}$, R *e* $\{\mathrm{n}\mathrm{T}\}$, *em que* $0<\mathrm{T}$ *e* $\mathrm{n}=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

DEMONSTRAÇÃO. Que estes três subgrupos são fechados, é evidente; vejamos agora que não existe mais nenhum.

(1) Lição do Curso de Funções Especiais realizado no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

Seja, então, G um subgrupo fechado de R e distingamos as duas hipóteses: *a*) G possue pelo menos um ponto de acumulação; *b*) G não possue nenhum ponto de acumulação.

a) Seja T um ponto de acumulação de G e representemos por (T_n), $T_n \in G$, uma sucessão convergente para T. Sabe-se que é possível construir uma tal sucessão cujos elementos são todos distintos.

Como G é fechado, $T \in G$ e portanto $(T - T_n)$ é uma sucessão de elementos de G convergente para zero, o que nos permitirá concluir que G é denso em R e por conseguinte coincide com R.

Com efeito seja $a > 0$ e consideremos o intervalo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Como $(T - T_n) \to 0$, existe n tal que o período $0 < |T - T_n| = \tau < \varepsilon$.

Designemos por n_0 o número inteiro tal que

$$(n_0 - 1)\,\tau \leqq a + \varepsilon < n_0\,\tau .$$

O período $(n_0 - 1)\,\tau \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, de contrário

$$\tau = n_0\,\tau - (n_0 - 1)\,\tau > a + \varepsilon - (a - \varepsilon) = 2\,\varepsilon ,$$

o que contradiz $\tau < \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, está demonstrado que $a \in G$ para $a > 0$ e como G é um grupo, resulta finalmente $G = R$.

b) Nesta hipótese ou o conjunto dos períodos *positivos* é vasio e, então, $G = \{0\}$, ou não é vasio e, então, admite um primeiro elemento $T_0 > 0$.

Mas neste caso dado $T > 0$, $T \in G$, temos

$$T = n\,T_0 + T'$$

onde $1 \leqq n$ e $0 \leqq T' < T$, o que implica $T' = 0$, de contrário o período $0 \neq T' = T - n\,T_0 < T_0$, contra a hipótese de que T é o primeiro elemento positivo de G.

Consequentemente

$$T \in G \Rightarrow T = n\,T_0 ,$$

com n inteiro (positivo, nulo ou negativo).

2. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função sobre R^2 (função de 2 variáveis).

Definição 2. *Seja* $\mathrm{f} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ *uma aplicação do espaço vectorial* R^2 *em* R. *Diz-se que um vector* $\vec{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^2$ *é um período de* f *quando*

$$\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{T}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) , \ \textit{para}\ \forall\, \vec{\mathrm{x}} \in \mathrm{R}^2 .$$

Teorema 4. *Os períodos de* f *formam um subgrupo* G *aditivo dos vectores de* R^2.

Demonstração. Como a do teorema 1.

Teorema 5. *Se* $\mathrm{f} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ *é contínua, então* G *é um subgrupo fechado.*

Demonstração. Como a do teorema 2.

Para caracterizar os subgrupos fechados de R^2 começamos por demonstrar o seguinte

Teorema 6. *Se um grupo fechado* G *de* R^2 *possui um ponto de acumulação, então contém um subgrupo* $\{\mathrm{t\,a}\}$, *onde* $\mathrm{a} \neq 0$ *é um elemento de* G *e* t *um número real qualquer* (1).

Demonstração. Se G possue um ponto de acumulação, zero é também ponto de acumulação e consequentemente existe uma sucessão (x_p) de pontos de G, tal que $x_p \neq 0$ e $\lim\limits_{p} x_p = 0$.

---

(1) Bourbaki — Topologie Générale, chapitre VII, § 1, 2 — Proposition 3.

Seja P um cubo aberto de centro zero. Resulta do axioma de Arquimedes que existe um inteiro positivo k_p tal que $k_p x_p \in P$, $(k_p+1) x_p \notin P$. Como $k_p x_p \in \bar{P}$, que é um compacto, a sucessão $(k_p x_p)$ tem um valor de aderência a em $\bar{P}$. Vejamos que $a \neq 0$ e para isso demonstremos que $a \notin P$.

Ora de

$$\| (k_p+1) x_p - a \| \leq \| k_p x_p - a \| + \| x_p \|$$

e das hipóteses

$$a \text{ valor de aderência de } (k_p x_p)$$

$$\lim x_p = 0 ,$$

resulta que a é valor de aderência da sucessão $((k_p+1) x_p)$.

Mas $(k_p+1)x_p \in -P = -\bar{P}$, logo $a \in -P$, como queriamos provar.

Por outro lado, como $x_p \in G$ e G é um grupo fechado, vem $a \in G$.

Falta apenas verificar que $t a \in G$ para todo o número real t.

Designando, como é costume, por $[t]$ o maior inteiro menor ou igual a t, tem-se

$$\| [t k_p] x_p - t a \| \leq \| [t k_p] x_p - t k_p x_p \| + \\ + \| t k_p x_p - t a \| = | [t k_p] - t k_p | \| x_p \| + \\ + |t| \| k_p x_p - a \| \leq \| x_p \| + |t| \| k_p x_p - a \| .$$

Mas $x_p \to 0$ e a é um valor de aderência da sucessão (x_p), resulta que $t a$ é um valor de aderência de $([t k_p] x_p)$ e portanto pertence a G (visto G ser um grupo fechado).

Com base neste teorema pode agora demonstrar-se

TEOREMA 7. *Seja* G *um subgrupo fechado de* R^2, *de rang* r; *existe um subespaço vectorial máximo* V *contido em* G. *Se* W *é um subespaço suplementar qualquer de* V, *então* G $\cap$ W *não possue nenhum ponto de acumulação, e* G *é soma directa de* V *e de* G $\cap$ W (1).

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar recordemos que se chama *rang* de uma parte A de R^2 a dimensão do subespaço vectorial gerado por A.

Dizer que G tem *rang* r é, pois, dizer que G gera um subespaço vectorial de dimensão r.

Mostremos que existe um subespaço máximo $V \subset G$.

Como todo o subespaço contido em G é um subconjunto de $\bigcup_{a \in M} R a$, onde M é o conjunto dos elementos $a \in G$ tais que $R a \subset G$, basta demonstrar que $\bigcup_{a \in M} R a$ é um subespaço.

Ora se x, y pertencem a $\bigcup_{a \in M} R a$, tem-se $x = r a$, $y = r' a'$ com $R a \subset G$, $R a' \subset G$, o que implica $\forall \alpha \beta \in R$, $\alpha x + \beta y = \alpha r \cdot a + \beta r' \cdot a' = b \in G$ e

$$\gamma b = \gamma \alpha r \cdot a + \gamma \beta r' \cdot a' \in G ,$$

para todo $\gamma \in R$. Logo,

$$\alpha x + \beta y \in R b \subset G ,$$

isto é,

$$\alpha x + \beta y \in \bigcup_{a \in M} R a, \text{ q. e. d.}$$

Então $V = \bigcup_{a \in M} R a$.

Seja agora W um subespaço suplementar de V. Dado $x \in G$ vem

$$x = z + y , \; z \in V \text{ e } y \in W .$$

Mas como $V \subset G$, resulta $y = x - z \in G$ e portanto

$$G = V + W \cap G .$$

Falta agora mostrar que $W \cap G$ é um subgrupo fechado que não admite nenhum ponto de acumulação.

Mas para isso basta atender a que $W \cap G$ é um grupo fechado (como intersecção de dois grupos fechados) que não pode conter

(1) BOURBAKI, op. cit. Teorema 2, p. p. 65.

nenhum espaço da forma Ra com $a \neq 0$, pois V é máximo.

Se p é a dimensão de V, tem-se $p \leq r$ e $W \cap G$ possue *rang* $r-p$.

O problema da caracterização do grupo G, está agora reduzido ao estudo dos grupos como $G \cap W$ que não admitem pontos de acumulação — *grupos discretos.*

Ora se um grupo discreto $G \in R^2$ tem *rang* zero reduz-se a $\{0\}$ e se tem *rang* um reduz-se a $\{n a\}$, $a \neq 0$ e n inteiro, por força do que já demonstrámos para a recta R.

Resta considerar a hipótese — *rang* de $G=2$ e para isso comecemos por demonstrar o

TEOREMA 8. *Sejam* G *um subgrupo discreto de* R^2, *de rang* 2, $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ *uma base de* R^2 *constituída por elementos de* G *e* P *o paralelogramo construído sobre* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$.

Então o conjunto $\mathrm{G} \cap \mathrm{P}$ *é finito e constitui um sistema de geradores de* G; *além disso todo elemento de* G *se pode exprimir como combinação linear, com coeficientes racionais, de* a_1 *e* a_2 (1).

DEMONSTRAÇÃO. 1) $G \cap P$ é finito, visto que $G \cap P$ é compacto e dicreto; 2) Seja x um ponto qualquer de G; tem-se

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 \,, \; t_1, t_2 \in R \,.$$

mas escrevendo

$$\begin{aligned} x &= [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + x - [t_1] a_1 - [t_2] a_2 = \\ &= [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + (t_1 - [t_1]) a_1 + (t_2 - [t_2]) a_2 = \\ &= x_1 + z_1 \,, \end{aligned}$$

vê-se que

$$z_1 = (t_1 - [t_1]) a_1 + (t_2 - [t_2]) a_2 \in P \,,$$

pois

$$0 \leq t_i - [t_i] \leq 1 \,.$$

(1) BOURBAKI, op. cit. Proposition 1, pp. 62.

Mas como

$$a_1, a_2 \in G \cap P \quad \text{e} \quad z_1 = x - [t_1] a_1 - [t_2] a_2 \in G \,,$$

resulta de $a_1, a_2, z_1 \in G \cap P$ e de

$$x = [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + z_1 \,,$$

que os elementos de $G \cap P$ formam um sistema de geradores de G.

3) Mostremos finalmente que t_1, t_2 são racionais.

Escrevendo

$$\begin{aligned} m x &= [t_1 m] a_1 + [t_2 m] a_2 + \\ &+ m x - [m t_1] a_1 - [m t_2] a_2 \\ m x &= x_m + z_m \,, \quad m \text{ inteiro,} \end{aligned}$$

resulta que

$$z_m = (m t_1 - [m t_1]) a_1 + (m t_2 - [m t_2]) a_2 \in G \cap P \,,$$

pois $0 \leq m t_i - [m t_i] \leq 1$.

Mas como $G \cap P$ é finito e m inteiro qualquer, têm de existir inteiros distintos h, k tais que

$$z_h = z_k$$

o que implica

$$\begin{aligned} h t_i - [h t_i] &= k t_i - [k t_i] \\ (h-k) t_i &= [h t_i] - [k t_i] \end{aligned}$$

donde

$$t_i = \frac{[h t_i] - [k t_i]}{h-k} \,,$$

q. e. d.

COROLÁRIO. *Existe uma base* $\mathrm{a}'_1, \mathrm{a}'_2$ *de* R^2 *tal que para todo* $\mathrm{x} \in \mathrm{G}$

$$\mathrm{x} = \mathrm{m}_1 \mathrm{a}'_1 + \mathrm{m}_2 \mathrm{a}'_2$$

onde $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2$ *são inteiros.*

DEMONSTRAÇÃO. Como os elementos de $G \cap P$ formam um sistema de geradores de G, dado $x \in G$, existem $b_1, \cdots, b_q$ de $G \cap P$

tais que

$$x = \sum_{i=1}^{q} n_i b_i, \quad n_i \text{ inteiros.}$$

Mas pelo teorema anterior

$$b_i = t_1^{(i)} a_1 + t_2^{(i)} a_2,$$

com $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ racionais.

Designando, então, por d um múltiplo comum dos denominadores de $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$, vem

$$x = \left(\sum_{i=1}^{q} n_i t_1^i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{q} n_i t_2^{(i)}\right) a_2$$

$$x = m_1 a_1' + m_2 a_2'$$

onde

$$a_1' = \frac{a_1}{d}, \quad a_2' = \frac{a_2}{d} \quad \text{e} \quad m_1 = d \sum_{i=1}^{q} n_i t_1^{(i)},$$

$$m_2 = d \sum_{i=1}^{q} n_i t_2^{(i)}$$

são inteiros.

Isto significa que G é um subgrupo do grupo gerado pelos elementos $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}$, em que d é um número inteiro conveniente.

Vamos, porém, demonstrar o

Teorema 9. *Todo grupo de* R^2 *discreto e de rang* 2 *coincide com o grupo*

$$\{\mathrm{n}_1 \mathrm{b}_1 + \mathrm{n}_2 \mathrm{b}_2\}$$

em que $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2$ *são elementos independentes de* G.

Demonstração (¹). 1) *Existe um par de elementos independentes* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2$ *de* G *tal que o paralelogramo construido sobre* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2$ *tem área inferior ou igual à do paralelogramo construido sobre qualquer outro par de elementos independentes de* G.

Pelo teorema anterior dados dois elementos x_1, x_2 de G, tem-se

$$x_1 = x_{11} a_1' + x_{12} a_2'$$
$$x_2 = x_{21} a_1' + x_{22} a_2',$$

onde x_{ik} são inteiros.

Ora

$$x_1 \wedge x_2 = \det(x_{ik}) \cdot a_1' \wedge a_2'$$

e portanto o ínfimo das áreas dos paralelogramos construidos sobre os pares x_1, x_2 corresponde ao ínfimo dos $|\det x_{ik}|$, que são sempre números inteiros. O ínfimo é, pois, um mínimo e um mínimo positivo se nos restringirmos aos pares de elementos independentes $(\det(x_{ik}) \neq 0)$.

Seja, então, b_1, b_2 um par de elementos independentes tal que

$$]\det(x_{ik})| \geq \det(b_{ik}) \geq 1.$$

2) *O par* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2$ *gera o grupo* G.

Raciocinemos por absurdo, admitindo que existe $z \in G$ tal que na decomposição

$$z = z_1 b_1 + z_2 b_2$$

um dos coeficientes, z_1, não é inteiro.

Somando a z um elemento conveniente de G

$$z' = n_1 b_1 + n_2 b_2, \quad n_1, n_2 \text{ inteiros,}$$

podemos obter um elemento u de G tal que em

$$u = z + z' = (z_1 + n_1) b_1 + (z_2 + n_2) b_2 =$$
$$= u_1 z_1 + u_2 z_2$$

se tenha

$$0 < u_1 < 1.$$

Consideremos agora o par de elementos independentes de G

$$u = u_1 b_1 + u_2 b_2 = (u_1 b_{11} + u_2 b_{21}) a_1' + $$
$$+ (u_1 b_{12} + u_2 b_{22}) a_2'$$
$$b_2 = b_{21} a_1' + b_{22} a_2'.$$

(¹) Bourbaki, op. cit. Exercice 1, pp. 72.

Teremos

$$u \wedge b_2 = u_1 \det(b_{ik})\, a_1' \wedge a_2'$$

com

$$u_1 \det(b_{ik}) < \det(b_{ik})$$

o que é absurdo.

Logo

$$G = \{n_1 b_1 + n_2 b_2\}.$$

Os resultados anteriores permitem-nos concluir que o conjunto dos períodos de uma função contínua em R^2 pertence a uma destas seis categorias:

1) $G = \{(0,0)\}$;
2) $G = \{r(a,b)\}, r \in R$;
3) $G = \{n(a,b)\}$, n inteiro;
4) $G = \{n(a,b) + r(c,d)\}$, n inteiro e $r \in R$;
5) $G = \{n(a,b) + m(c,d)\}$, n e m inteiros;
6) $G = R \times R$.

DEFINIÇÃO 3. *Quando* $G = \{n(a,b)\}$, $(a,b) \neq 0$, *diz-se que* f *é simplesmente periódica de período fundamental* $\vec{T} = (a,b)$.

Quando $G = \{n(a,b) + m(c,d)\}$, *onde* $(a,b), (c,d)$ *são linearmente independentes, diz-se que* f *é duplamente periódica, de períodos* $\vec{T}_1 = (a,b)$, $\vec{T}_2 = (c,d)$.

3. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função de variavel complexa.

Como o plano complexo C é isomorfo a R^2, podemos enunciar imediatamente o

TEOREMA 10. *O conjunto dos períodos de uma aplicação contínua* $f: C \to C$ *é um subgrupo fechado de* C.

COROLÁRIO. *O conjunto dos períodos de uma função analítica no plano complexo é um subgrupo fechado de* C.

DEFINIÇÃO 4. *Uma função* $f: C \to C$ *diz-se duplamente periódica quando o conjunto* G *dos seus períodos é da forma*

$$G = \{n\,\omega_1 + m\,\omega_2\},$$

onde ω_1, ω_2 *são números complexos independentes com relação a* R $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin R\right)$. *Diz-se que* ω_1, ω_2 *são os períodos fundamentais de* f.

Quando $G = \{n\,\omega\}$ *a função diz-se simplesmente periódica.*

TEOREMA 11. *Uma função* f *analítica no plano complexo e duplamente periódica reduz-se a uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam ω_1, ω_2 os seus períodos fundamentais e designemos por P o paralelogramo construído sobre ω_1, ω_2.

Como P é compacto e f é contínua em P, temos $|f(z)| \leqq M$ em P.

Mas dado $z' \in C$ tem-se

$$z' = t_1\,\omega_1 + t_2\,\omega_2,\ t_1, t_2 \in R$$

e portanto

$$z' = (t_1 - [t_1])\,\omega_1 + (t_2 - [t_2])\,\omega_2 + [t_1]\,\omega_1 + [t_2]\,\omega_2$$
$$z' = z + [t_1]\,\omega_1 + [t_2]\,\omega_2,\ z \in P,$$

o que implica

$$|f(z')| = |f(z)| \leqq M,$$

quere dizer f limitada em todo plano.

Então pelo teorema de Liouville f é constante no plano.

Em face deste resultado, para obter exemplos não triviais de funções duplamente periódicas será necessário considerar funções com pontos singulares.

É o que vamos agora fazer, começando por adaptar a noção do período a esta nova situação.

DEFINIÇÃO 5. *Diz-se que* $T \in C$ *é um período de uma função* f *que admite pontos* *singulares quando*

$$f(z) = f(z + T)$$

para todo o ponto regular z *de* f.

TEOREMA 12. *Seja* f *uma função meromorfa. O conjunto* G *dos seus períodos forma um grupo fechado de* C.

DEMONSTRAÇÃO. 1) G *é um grupo.*

Sejam $T_1, T_2 \in G$ e z um ponto regular de f.

Como $z + T_1$ é ponto regular e T_1, T_2 são períodos, vem

$$f(z + T_1 + T_2) = f((z + T_1) + T_2) = \\ = f(z + T_1) = f(z),$$

logo $T_1 + T_2 \in G$.

Seja agora $T \in G$ e mostremos que $-T \in G$.

Por hipótese $f(z + T) = f(z)$ para tal ponto regular z.

Se $z - T$ não fosse regular, seria um polo e portanto para qualquer sucessão $z_n \to z$ teríamos

$$\infty = \lim_n |f(z_n - T)| = \lim_n |f(z_n - T + T)| = \\ = \lim_n |f(z_n)| = |f(z)|,$$

o que é absurdo.

2) G *é fechado.* Seja $T = \lim T_n$, $T_n \in G$ e z regular.

Se $z + T$ for regular vem imediatamente (pela continuidade de f em $z + T$)

$$f(z + T) = f(\lim(z + T_n)) = \lim_n f(z + T_n) = f(z).$$

Se $z + T$ não fosse regular, então

$$\infty = \lim_n |f(z + T_n)| = \lim_n f(z) = f(z),$$

para z regular, o que é impossível.

Nota. Se f admite *também* pontos singulares essenciais, a demonstração de que G é um grupo continua válida, mas fica em aberto o problema de G ser fechado, pois podem existir sucessões $(z + T_n')$ ao longo das quais $f(z + T_n') \to f(z)$ e isso impossibilita o raciocínio por absurdo anteriormente feito.

DEFINIÇÃO 5. Diz-se função elíptica uma função meromorfa e duplamente periódica.

Quase grupos subtractivos

por *Jayme Machado Cardoso* *

Instituto de Matemática da Universidade do Paraná

Introdução

Um *grupoide* é um par constituido por um conjunto não vazio G e uma lei de composição interna $G \times G \to G$. Um grupoide G diz-se *quase grupo* se, quaisquer que sejam $a, b \in G$, existem, em G, soluções para as equações

$$a x = b \quad \text{e} \quad y a = b$$

e tais soluções são únicas.

Os grupoides associativos denominam-se *semigrupos*.

Uma parte S de um grupoide G denomina-se *subgrupoide* de G se for, também, grupoide relativamente à composição definida em G. Eventualmente um subgrupoide pode apresentar estrutura de semigrupo, de quase grupo ou, mesmo, de grupo (ver exemplo E 3 abaixo).

Ordem de um grupoide finito é o número de seus elementos.

Chama-se *classe lateral* à esquerda (classe lateral à direita) de um subgrupoide S de

* Com os agradecimentos ao Prof. J. MORGADO, por correcções feitas no texto.