singulares quando

$$f(z) = f(z + T)$$

para todo o ponto regular z *de* f.

TEOREMA 12. *Seja* f *uma função meromorfa. O conjunto* G *dos seus períodos forma um grupo fechado de* C.

DEMONSTRAÇÃO. 1) G *é um grupo.*

Sejam $T_1, T_2 \in G$ e z um ponto regular de f.

Como $z + T_1$ é ponto regular e T_1, T_2 são períodos, vem

$$f(z + T_1 + T_2) = f((z + T_1) + T_2) = \\ = f(z + T_1) = f(z),$$

logo $T_1 + T_2 \in G$.

Seja agora $T \in G$ e mostremos que $-T \in G$.

Por hipótese $f(z + T) = f(z)$ para tal ponto regular z.

Se $z - T$ não fosse regular, seria um polo e portanto para qualquer sucessão $z_n \to z$ teríamos

$$\infty = \lim_n |f(z_n - T)| = \lim_n |f(z_n - T + T)| = \\ = \lim_n |f(z_n)| = |f(z)|,$$

o que é absurdo.

2) G *é fechado.* Seja $T = \lim T_n$, $T_n \in G$ e z regular.

Se $z + T$ for regular vem imediatamente (pela continuidade de f em $z + T$)

$$f(z + T) = f(\lim (z + T_n)) = \lim_n f(z + T_n) = f(z).$$

Se $z + T$ não fosse regular, então

$$\infty = \lim_n |f(z + T_n)| = \lim_n f(z) = f(z),$$

para z regular, o que é impossível.

Nota. Se f admite *também* pontos singulares essenciais, a demonstração de que G é um grupo continua válida, mas fica em aberto o problema de G ser fechado, pois podem existir sucessões $(z + T'_n)$ ao longo das quais $f(z + T'_n) \to f(z)$ e isso impossibilita o raciocínio por absurdo anteriormente feito.

DEFINIÇÃO 5. Diz-se função elíptica uma função meromorfa e duplamente periódica.

Quase grupos subtractivos

por *Jayme Machado Cardoso* *

Instituto de Matemática da Universidade do Paraná

Introdução

Um *grupoide* é um par constituido por um conjunto não vazio G e uma lei de composição interna $G \times G \to G$. Um grupoide G diz-se *quase grupo* se, quaisquer que sejam $a, b \in G$, existem, em G, soluções para as equações

$$a x = b \quad \text{e} \quad y a = b$$

e tais soluções são únicas.

Os grupoides associativos denominam-se *semigrupos*.

Uma parte S de um grupoide G denomina-se *subgrupoide* de G se for, também, grupoide relativamente à composição definida em G. Eventualmente um subgrupoide pode apresentar estrutura de semigrupo, de quase grupo ou, mesmo, de grupo (ver exemplo E 3 abaixo).

Ordem de um grupoide finito é o número de seus elementos.

Chama-se *classe lateral* à esquerda (classe lateral à direita) de um subgrupoide S de

* Com os agradecimentos ao Prof. J. MORGADO, por correcções feitas no texto.

um grupoide G ao conjunto aS (respectivamente Sa) dos elementos as, com s em S e a elemento fixo de G.

Uma parte não vazia A de um grupoide G diz-se *ideal* à direita de G se $ax \in A$, com $x \in G$ e $a \in A$.

Definição e exemplos

O nosso objectivo é estudar grupoides G que satisfazem as seguintes condições:

(J 1) Existe em G um elemento i, dito *identidade à direita*, tal que

$$a i = a\,,$$

(J 2) $$(ab)c = (ac)b\,,$$

(J 3) $$a(bc) = c(ba)\,,$$

(J 4) $$aa = i\,,$$

quaisquer que sejam a, b, c em G.

Tais grupoides serão, por nós, denominados *grupoides subtractivos*.

Exemplos.

(E 1) O conjunto dos reais com a operação de subtracção é um grupoide subtractivo. O zero é identidade à direita. O conjunto dos inteiros é subgrupoide; o mesmo se diz para o conjunto dos fraccionários.

(E 2) O conjunto $\{i, a, b\}$ com a composição definida pela tábua

	i	a	b
i	i	b	a
a	a	i	b
b	b	a	i

é um grupoide subtractivo que não possui subgrupoides próprios além do subgrupoide $\{i\}$.

(E 3) O grupoide subtractivo de 4 elementos

	i	a	b	c
i	i	c	b	a
a	a	i	c	b
b	b	a	i	c
c	c	b	a	i

possui, além do subgrupoide $\{i\}$, um único subgrupoide próprio, $\{i, b\}$, que é grupo.

Algumas propriedades

Proposição 1. Se i é identidade à direita de um grupoide subtractivo, então

$$i(rs) = sr\,,$$

quaisquer que sejam r e s no grupoide.

Demonstração. Pela J 3, $i(rs) = s(ri)$ e pela J 1, $ri = r$, c. q. d.

Corolário 1. 1. *Um grupoide subtractivo é comutativo se, e sòmente se, sua identidade é bilateral.*

Demonstração. Seja G um grupoide com identidade i bilateral. Então, quaisquer que sejam a e b em G, tem-se

$$ab = i(ba) = ba\,.$$

Recìprocamente, se G é comutativo,

$$i(ab) = i(ba) = ab = (ab)i$$

qualquer que seja o elemento $x = ab = ba$ de G.

Proposição 2. Se a, b, c, d são elementos quaisquer de um grupoide subtractivo, temos

(2. 1) $$(ab)(cd) = (ac)(bd)$$
(2. 2) $$= (db)(ca)$$
(2. 3) $$= (dc)(ba)$$
(2. 4) $$= (a(cd))b$$
(2. 5) $$= (a(bd))c$$
(2. 6) $$= (d(ca))b$$

(2. 7) $= (d(ba))c$
(2. 8) $= a(b(dc))$
(2. 9) $= d(b(ac))$
(2. 10) $= a(c(db))$
(2. 11) $= d(c(ab))$.

Demonstração. Limitar-nos-emos a verificar a (2. 6).

Pela J3, $d(ca) = a(cd)$, donde

$$(d(ca))b = (a(cd))b$$

e, pela J2,

$$(a(cd))b = (ab)(cd).$$

Proposição 3. Num grupoide subtractivo valem as «leis do corte», isto é, cada uma das igualdades

(3. 1) $ax = bx$

(3. 2) $xa = xb$

implica $a = b$.

Demonstração. Operando à direita da (3. 1) com o elemento ix, vem

$$(ax)(ix) = (bx)(ix)$$

donde, pela (2. 1),

$$(ai)(xx) = (bi)(xx)$$

e, como $ai = a$ e $xx = i$, resulta

$$ai = bi$$

ou, finalmente

$$a = b$$

Do mesmo modo, operando à esquerda da (3. 2) com o elemento ix, vem

$$(ix)(xa) = (ix)(xb)$$

e, pela (2. 2),

$$(ax)(xi) = (bx)(xi)$$

e, pela aplicação sucessiva da primeira parte desta proposição,

$$a = b.$$

Proposição 4. Num grupoide subtractivo as equações

(4. 1) $ax = b$

e

(4. 2) $yr = s$

têm soluções únicas $x = ab$ e $y = s(ir)$.

Demonstração. $x = ab$ é solução de (4. 1), pois

$$a(ab) = b(aa) = bi = b.$$

Também, $y = s(ir)$ é solução de (4. 2), pois

$$(s(ir))r = (rr)(is) = i(is) = s(ii) = si = s.$$

A unicidade das soluções é consequência imediata das «leis do corte».

Observações. 1. A proposição 4 mostra que os grupoides subtractivos são quase grupos (com identidade à direita, cuja existência é garantida por J 1) e, por este motivo, no que segue serão denominados *quase grupos subtractivos* e indicados abreviadamente por qgs.

2. Em outro trabalho [2], construimos, entre outras, uma estrutura que satisfaz J 1 e J 4 e na qual têm soluções as equações que intervêm na proposição 4, mas que não verifica J 2 e J 3. Várias proposições semelhantes às aqui apresentadas valem para esta estrutura (ver [3]).

Corolário 4.1. *Num qgs a identidade à direita é única.*

Demonstração. Com efeito, a identidade à direita é a solução (única) da equação $ax = a$.

Proposição 5. Os qgs não possuem ideais próprios.

Demonstração. Realmente, suponhamos, por absurdo, que exista no qgs G um ideal próprio à direita A, e seja x um elemento de G que não está em A. Mas

$$a(ax) = x$$

pertence à A, o que é contrário à hipótese.

Quase grupos subtractivos finitos

PROPOSIÇÃO 6. O qgs de 2 elementos é grupo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja i a identidade à direita e a o outro elemento do qgs. A identidade i é bilateral, pois se tal não fosse teríamos

$$ia = i = ii,$$

e, pela lei do corte, $a = i$, que é contrário à hipótese.

PROPOSIÇÃO 7. Todo qgs finito com número par de elementos possui pelo menos um subquase grupo distinto de $\{i\}$ que é grupo.

DEMONSTRAÇÃO. Se o quase grupo é de ordem par, os elementos distintos da identidade à direita i são em número ímpar. Logo existe pelo menos um elemento x, no quase grupo, tal que $ix = x$. O conjunto $\{i, x\}$ é, pois, grupo.

Teorema de Lagrange

Vamos estabelecer para os qgs o teorema equivalente ao de Lagrange para grupos. Note-se que tal não se verifica para os quase grupos em geral (cf [4], p. 476).

LEMA 1. *Se* S *é um subquase grupo de um qgs finito* G, *toda classe lateral à esquerda de* S *tem exactamente o mesmo número de elementos que* S.

DEMONSTRAÇÃO. A transformação que leva cada $s \in S$ ao as de aS é biunívoca. Assim, cada elemento $t = as$ de aS é a imagem de um, e um só, elemento $s = at$ de S.

LEMA 2. *Quaisquer que sejam* a, s *e* s′ *em um qgs, tem-se*

$$\mathrm{a\,s} = (\mathrm{a\,s}')(\mathrm{s\,s}').$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, pela (2. 2),

$$(as')(ss') = (s's')(sa)$$

donde

$$(as')(ss') = i(sa) = as.$$

LEMA 3. *Seja* S *um subquase grupo de um qgs* G. *Duas classes laterais à esquerda de* S *ou são idênticas ou são disjuntas.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que aS e bS têm um elemento comum $c = as' = bs''$ (s' e s'' em S). Então, bs contém todos os elementos

$$as = (as')(ss') = (bs'')(ss') = b(s''(s's))$$

de aS e, anàlogamente, aS contém todos os elementos de bS. Portanto, $aS = bS$.

OBSERVAÇÃO. Como a identidade i do qgs G pertence a todos seus subquase grupos, cada classe aS contém sempre o elemento $a = ai$. Então, G se esgota em suas classes laterais à esquerda. Em conclusão,

TEOREMA. *A ordem de um qgs finito é múltiplo da ornem de qualguer de seus subquase grupos.*

REFERÊNCIAS

[1] BRUCK, R. H. *Contributions to the theory of loops.* Trans. Amer. Math. Soc. v. 60 (1946), p. 245-354.

[2] CARDOSO, J. M. & CARNEIRO JR., D. *Non associative structures.* A aparecer em Math. Mag. v. 35 (1962).

[3] CARDOSO, J. M. *On a right loop.* A aparecer em Math. Mag.

[4] GARRISON, G. N. *Quasi-groups.* Annals Math. v. 41 (1940) p. 474-487.

[5] HAUSMANN, B. A. & ORE, O. *Theory of quasi groups.* Amer. J. Math. v. 59 (1937), p. 983-1004