

una exposición más natural que justifica su explicación si se hace simultáneamente con la noción de probabilidad.

Análogas consideraciones podríamos hacer de la geometría analítica de la recta, que puede introducirse en forma más natural, agradable y útil al alumno presentándola como necesaria para la expresión de las leyes físicas lineales y las correlaciones lineales en los fenómenos biológicos, sociales, etc.

Una objeción a la inclusión de la Estadística en los planes de estudio podría ser el que estos ya se encuentran bastante recargados. A nuestro juicio la solución no está en crear una nueva asignatura con el nombre de Estadística, sino en hacer una distribución adecuada de materias en los programas de matemáticas, teniendo en cuenta para romper la inercia de la tradición su importancia en el estado actual del desarrollo científico y social. Creemos que no hay duda para preferir las nociones básicas de la Estadística a multitud de teoremas, corolarios y

escolios que abundan en los libros que suelen estudiar los escolares de matemáticas. He aquí un botón de muestra de teoremas (que desgraciadamente recordamos haber estudiado a los doce años): Teorema. Si se resta de un número el cubo de las decenas de su raíz cúbica exacta o entera por defecto y se divide la diferencia por el triplo del cuadrado de dichas decenas, la parte entera del cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades de la referida raíz. Demostración:

Escolio 1.º. En la práctica se acostumbra, al dividir  $N - (d \cdot 10)^3$  por  $3(d \cdot 10)^2$ , o sea,  $3d^2 \cdot 100$ , suprimir los dos ceros del divisor y las dos últimas cifras de la derecha en el dividendo. Por tanto, es dividir las centenas de  $N - (d \cdot 10)^3$  por  $3d^2$ .

¿Es que alguien puede sostener que los escolares de doce años se forman mejor y más completamente estudiando estos y análogos teoremas que adquiriendo y manejando nociones como las de promedio, dispersión, probabilidad, correlación lineal, etc.?

## Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares

por José Gaspar Teixeira

(Conclusão do PROBLEMA I)  
Fluxos Neutrónicos

### 7. Problemas de valores próprios

Sob o ponto de vista matemático, no cálculo dos fluxos e densidades neutrónicas dum RN surgem naturalmente dois problemas fundamentais que conduzem à determinação dos valores próprios - e correspondentes funções próprias - de dois operadores diferenciais diferentes.

O primeiro problema fundamental resulta naturalmente da

#### 7.1. *Separabilidade das variáveis de espaço e energia na distribuição neutrónica estacionária.*

O estado de criticalidade de um RN é definido pelas *condições de criticalidade* que determinam relações entre as constantes nucleares e as propriedades geométricas - forma e dimensões - do RN.

Nas condições de criticalidade intervém o chamado factor de criticalidade que toma,

nestas e apenas nestas condições, o valor  $um$  (1).

Então a distribuição dos fluxos neutrónicos é estacionária, isto é, independente do tempo.

Ora, no mais simples dos modelos conhecidos de RN (2) — o reactor homogéneo e nú, expresso analiticamente pela aproximação da teoria do transporte, denominada teoria da difusão — a distribuição neutrónica estacionária verifica as condições enunciadas no *Primeiro Teorema Fundamental* da TRN (5):

*A distribuição neutrónica estacionária,  $\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega)$ , dum reactor nú e homogéneo é separável nas variáveis espaço e energia*

$$\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega) = \varphi(E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \Omega),$$

*sendo a distribuição espacial  $\psi(\mathbf{x}, \Omega)$  a solução fundamental da equação ondulatória*

$$A) \quad \Delta \psi(\mathbf{x}, \Omega) + B^2 \psi(\mathbf{x}, \Omega) = 0,$$

*isto é, a função de onda  $\psi(\mathbf{x}, \Omega)$  é solução positiva sobre o núcleo do reactor e nula sobre a fronteira extrapolada (4).*

Aqui surge o primeiro problema de determinação de valores próprios — os da equação A).

Com efeito, o anulamento da solução de A) sobre a fronteira extrapolada determina, em primeiro lugar, os valores admissíveis de  $B^2$ ; a cada valor admissível  $B_n^2$  corresponde,

por sua vez, um modo ou seja, uma função própria,  $\psi_n$ , tal que

$$A_1) \quad \Delta \psi_n(\mathbf{x}, \Omega) + B_n^2 \psi_n(\mathbf{x}, \Omega) = 0,$$

e um factor de criticalidade,  $c_n$ .

É evidente que o RN divergirá se alguns dos factores de criticalidade for superior à unidade, pois que à menor excitação o modo correspondente crescerá além de todo o limite. Por esta razão o maior dos factores de criticalidade deve ser considerado como o verdadeiro factor crítico, e a reacção em cadeia será auto-mantida ou divergente, segundo esse factor iguale ou exceda a unidade.

Por outro lado, correspondendo o maior factor de criticalidade ao modo de ordem mais baixa e ao menor dos valores  $B_n^2$ , como é fácil provar (1), será efectivamente este o verdadeiro factor crítico do reactor.

Como, para reactores da mesma forma, a valores  $B_n^2$  crescentes correspondem dimensões igualmente crescentes, conclue-se que o único reactor fisicamente realizável é o correspondente ao menor valor próprio  $B^2$ . E assim o problema da determinação dos valores próprios da equação A) tem por objectivo a fixação das dimensões geométricas do reactor.

Observe-se que o Primeiro Teorema Fundamental é válido apenas em modelos de reactores constituídos por meio homogéneo infinito, em que as dimensões finitas do reactor são introduzidas postulando o anulamento dos fluxos neutrónicos sobre uma superfície convexa bem definida (na prática o Teorema é válido nos reactores uniformes nas regiões longe da fronteira (2)).

Além disso, o teorema poderá ser válido para a teoria do transporte, mas não se

(1) No estado sub-crítico o factor é inferior à unidade e no sobre-crítico superior à unidade.

(2) Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S. 1959.

(3) Cf. WEINBERG and WIGNER — *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, p. g. 382

(4) A fronteira extrapolada dum reactor define-se teoricamente como a superfície convexa sobre a qual se anula o fluxo neutrónico, tendo em consideração o facto de a corrente neutrónica proveniente do exterior do reactor ser nula. Na prática é uma superfície fechada, exterior ao reactor, distando da fronteira física deste cerca de  $0,71 \lambda_{tr}$ .

(1) Cf. WEINBERG and WIGNER, op. cit., pag. 203.

(2) Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S. 1959, pag. 7.

conhece ainda neste caso uma formulação apropriada, equivalente às referidas condições de fronteira para a equação ondulatória.

Observe-se ainda que as características intrínsecas dos materiais de constituição e estrutura de um reactor se determinam, em primeira fase, pela teoria do reactor homogéneo e nú, como teoria das propriedades multiplicativas dos meios infinitos; por esta razão a teoria do reactor nú tem o nome de *Teoria Assintótica dos Reactores* e é fundamental na TRN.

O segundo problema fundamental refere-se à

## 7.2. Separabilidade da variável tempo na distribuição neutrónica não estacionária.

Como vimos, a equação de BOLTZMANN para um RN pode escrever-se

$$B) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = B \Phi$$

onde o operador  $B$  — linear e independente do tempo — se decompõe em duas parcelas, já indicadas em 5)

$$\begin{aligned} B_1 &= -v(\Omega \cdot \text{grad}) \\ B_2 &= -v \Sigma(\mathbf{x}, E) + \\ &+ v \int dE' \int d\Omega' \Sigma(\mathbf{x}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega). \end{aligned}$$

Recordemos que a linearidade de  $B$  resulta de se desprezar as colisões entre neutrões, e a independência no tempo, de serem lentas as variações no reactor originadas quer pelas operações das barras de comando quer pelas reacções nucleares, como a subida da temperatura.

Ora, associado a um operador linear há um problema de valores próprios, neste caso,

$$B_1) \quad B \psi_n = \nu_n \psi_n$$

de forma que, se as soluções  $\psi_n$  constituírem

um espaço completo, a solução geral de  $B$  pode escrever-se

$$3) \quad \Phi(\mathbf{x}, E, \Omega, t) = \Sigma a_n \psi_n(\mathbf{x}, E, \Omega) e^{\nu_n t},$$

com  $a_n$  constantes arbitrárias dependentes de condições iniciais.

No caso afirmativo, o comportamento dinâmico do reactor nas condições independentes do tempo (por exemplo em seguida a uma operação das barras de comando) seria determinado pela expressão anterior.

Na realidade, infelizmente,  $B$  não pertence à classe dos operadores caracterizados por possuírem um conjunto completo de funções características, e em alguns casos tem pelo menos um espectro contínuo com indicações de possuir um «carácter patológico» (1).

Interesse especial tem, porém, o maior valor característico de  $B$  e prova-se (2) que o valor de  $\nu_n$  de maior parte real  $\nu$ , é de facto real e que a correspondente função própria,  $\psi$ , é igualmente real e tem o mesmo sinal para todos os valores das respectivas variáveis, isto é, é uma função positiva. A  $\psi$  dá-se o nome de *solução persistente* e a ela corresponde uma distribuição exponencial,

$$\Phi_0 = \psi(\mathbf{x}, E, \Omega) e^{\nu t},$$

a *distribuição persistente* (3).

Na realidade, o operador  $B$  não pertence à classe dos operadores normais: a parte  $B_1$  é anti-hermítica, precisamente como os operadores da mecânica quântica, mas a parte  $B_2$  não tem características algumas deste

(1) WEINBERG and WIGNER, op. cit., pag. 408.

(2) BIRKHOFF and VARGA — Reactor Criticality and Non-negative Matrices (WAPD-166), 1957.

(3) Existindo neutrões retardados, a *distribuição persistente* desdobra-se na soma de várias exponenciais da variável  $t$ . Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S., pag 5

tipo. Assim, nem as características do espectro de  $B$  nem a «completicidade» das respectivas funções próprias estão convenientemente estabelecidas. WEINBERG e WIGNER estabeleceram<sup>(1)</sup> certas propriedades para  $B$  baseadas em certas condições de natureza física. BIRKHOFF e VARGA<sup>(2)</sup> notaram que  $B$  pertence a certa classe de operadores estudados por FROBENIUS<sup>(3)</sup> PERRON e JENTZSCH.

Os resultados destas e outras subsequentes investigações, que constituem algumas das mais brilhantes investigações matemáticas estimuladas pela TRN, foram apresentadas no Simpósio da AMS.

Tais resultados respondem, porém, apenas a algumas questões significativas: apenas as relacionadas com o maior valor próprio. As características do espectro neutrónico, a extensão das suas componentes discreta e contínua e, sobretudo a possibilidade e unicidade do desenvolvimento de uma função arbitrária  $\Phi(x, E, \Omega, 0)$  em série  $\sum$ , são problemas ainda não resolvidos. WIGNER<sup>(4)</sup> formula duas perguntas em relação com este assunto. «Primeiramente, a questão da unicidade que não intervém no problema equivalente em mecânica quântica, dadas as relações de ortogonalidade entre as funções próprias. Em segundo lugar, a necessidade de um critério prático, para decidir se uma solução singular da equação de valores próprios  $B_1$ ) pertence ao espectro contínuo. A teoria das distribuições deve ser um instrumento mais sólido para o estabelecimento de um critério utilizável e eficiente».

(1) WEINBERG and WIGNER - *The Physical Theory of Neutron Chain Reactores*, pag. 406.

(2) G. BIRKHOFF and VARGA. *Reactor Criticality and Non-negative Matrices* (WAPD-166), 1957, op cit.

(3) FROBENIUS - *S-Ber. Akad. Wiss. Berlin* 1912, pag. 456.

(4) Symposium of the A. M. S., pag. 95.

Em face do que acabamos de expor e transcrever, consideramos que outro objectivo fundamental de uma actividade de aperfeiçoamento de conhecimentos de matemática aplicada à TRN, é o estudo dos

## OPERADORES LINEARES VALORES E FUNÇÕES PRÓPRIAS

### 8. Aplicações

Um exemplo em que as soluções singulares de  $B_1$ ) formam um espectro contínuo, refere-se a um dos mais simples problemas da teoria de transporte: a difusão dos neutrões monoenergéticos em geometria plana. Neste caso, o fluxo é independente das variáveis  $t$  e, por exemplo,  $y$  e  $z$ . Além disso, como o fluxo é identicamente nulo excepto para um único valor de  $E$ , a energia deixa de ser na realidade uma variável de  $\Phi$ . Finalmente a dupla variável  $\Omega$  pode ser substituída por  $\mu = \Omega_x$ , coseno do ângulo das direcções da velocidade com o eixo dos  $x$ , pois que o fluxo não depende do ângulo azimutal. Admitindo a hipótese suplementar de a difusão ter simetria esférica, e medindo a secção eficaz total em unidades apropriadas, a equação de transporte toma a forma<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad -\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} - \Phi(x, \mu) + \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = 0$$

em que  $s$  é a relação das secções eficazes de difusão e total.

Admitindo que

$$\Phi(x, \mu) = \psi(\mu) e^{\nu x}$$

temos

$$(2) \quad \mu \nu \psi(\mu) + \psi(\mu) = \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu,$$

e, como o segundo membro é constante,

$$\psi(\mu) = \frac{c}{1 + \mu \nu}.$$

Evidentemente, existe a condição de compatibilidade

$$c = \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \frac{c}{1 + \mu \nu} d\mu = \frac{cs}{2\nu} \log \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

que se escreve também

$$\frac{s}{2\nu} \log \frac{1 + \nu}{1 - \nu} = 1,$$

(1) Symposium of the A. M. S., pag. 96.

equação cujas raízes  $\pm v_0$  constituem o espectro discreto da equação (2) As correspondentes funções características são respectivamente

$$\frac{e^{v_0 x}}{1 + \mu v} \quad \frac{e^{-v_0 x}}{1 - \mu v},$$

a primeira válida para os grandes valores de  $-x$  e a segunda para os grandes valores de  $x$ .

Evidentemente estas duas funções não constituem um espaço completo de funções de  $\mu$ , nos termos das quais todas as funções de  $\mu$  definidas no intervalo  $(-1, 1)$  possam exprimir-se linearmente.

Para  $-1 < v < 1$  ou para  $v$  complexo, as funções próprias são funções regulares de  $\mu$  no intervalo  $-1 < u < 1$ .

Se houver um espectro contínuo, ele existirá apenas numa das regiões reais  $v < -1$  ou  $v > 1$ . Para estes valores de  $v$  as soluções próprias tornam-se singulares mas podemos adoptar

$$\psi_\lambda(\mu) = \frac{c_1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} + \frac{c_2}{\mu - \lambda - i\varepsilon} \quad \lambda = -\frac{1}{v}$$

e considerar  $\frac{c}{1 + \mu v}$  como limite de  $\psi_\lambda$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A nova equação de compatibilidade é agora

$$-\frac{1}{\lambda}(c_1 + c_2) = \frac{1}{2}s \left\{ c_1 \left( \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - i\pi \right) + c_2 \left( \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + i\pi \right) \right\}$$

ou

$$\left( sk + \frac{2}{\lambda} \right) (c_1 + c_2) = i\pi s (c_1 - c_2) \quad k = \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Fazendo  $c_1 + c_2 = -\pi s$ , temos

$$c_1 = \frac{i}{\lambda} + \frac{is}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - \frac{\pi s}{2}$$

$$c_2 = -\frac{i}{\lambda} - \frac{is}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - \frac{\pi s}{2},$$

$$(3) \quad \psi_\lambda(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \pi s \frac{\lambda - \mu}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} + \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{s}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \frac{2\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \right\},$$

e podemos tomar esta função como correspondente ao espectro contínuo. Nos integrais da forma

$$(4) \quad \varphi = \int f g(\lambda) \psi_\lambda(\mu) d\lambda$$

a primeira fracção de (3) transforma-se num termo

preponderante e a segunda fracção conduz à função  $\delta$  de DIRAC.

Então (4) mostra que (1)

$$(5) \quad \Phi(x, \mu) = -\pi s P \int_{-1}^1 \frac{g(\lambda)}{\mu - \lambda} e^{-x/\lambda} d\lambda + 2\pi \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} s \log \frac{1+\mu}{1-\mu} \right] g(\mu) e^{-x/\mu}$$

é solução de (1) onde  $g(\lambda)$  é uma função arbitrária que tende para zero com  $\lambda$ . O fluxo total que corresponde a  $\Phi(x, \mu)$  de (5) é (2)

$$(5a) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \pi \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu} g(\mu) e^{-x/\mu}.$$

A solução geral de (1) será então (5) mais as duas funções características do espectro discreto com coeficientes arbitrários.

WIGNER, que apresenta resumidamente este exemplo, observa ainda que a expressão usual do fluxo devido a uma fonte plana isotrópica (3) pode decompor-se numa parte assintótica que corresponde a um espectro discreto e a um integral envolvendo a exponencial  $e^{-v x}$  de  $x$  em que  $v$  percorre todo o espectro contínuo. Deve notar-se porém que a possibilidade de tal decomposição do fluxo total em exponenciais de  $x$  não prova que existe uma solução da equação homogénea que corresponda separadamente a cada exponencial. O exemplo precedente mostra como, mesmo no caso duma simplicidade trivial, é difícil o reconhecimento do espectro contínuo.

Encontra-se na literatura uma variedade de casos interessantes nos quais os operadores relacionados com  $B$  da equação de BOLTZMANN tem em parte, ou não tem em parte, espectros contínuos (4). Da mesma forma, o espectro confinado no caso anterior ao eixo real, pode ou não ter valores no plano complexo.

O problema espectral é tratado no Symposium AMS por HABETLER e MARTINO, WING e CARLSON (método  $S_n$  e harmónicas esféricas). Em geral o problema de completicidade das funções características e da unicidade dos desenvolvimentos não foi satisfatoriamente resolvido. A situação é ainda mais obscura no que res-

(1) Cf. WIGNER - Symposium of the A. M. S. 1959 pag. 97.  
 (2) O primeiro e último termo de (5) anulam-se depois da integração sobre  $\mu$ .  
 (3) Veja p. ex. WEINBERG e WIGNER, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, equat. (9 26), (9 27) e (9 29).  
 (4) G. WING - J. Math. Mech. vol. 7 (1958) pp 757; LEHNER e WING - Comm. Pure Appl. Math. vol. 8 (1955) pg. 217 e G. WING, in Symposium of the A. M. S. 1959.

peita às aproximações das equações de BOLTZMANN. Assim, por exemplo, o aparecimento dos fluxos neutrônicos negativos na solução do problema de MILNE em harmónicas esféricas, mostra que o teorema da positividade de BIRKHOFF e VARGA não é válido neste caso das soluções aproximadas (1).

## 9. Métodos de aproximação

Terminaremos estas considerações subordinadas ao problema que constitui a primeira parte enunciada no início deste artigo — Densidades e Fluxos Neutrônicos — com um resumo do exposto por WIGNER (Symposium of the A. M. S. — pg. 100). Com a divulgação destes pontos de vista queremos promover o estudo de outro ramo da matemática fundamental à TRN:

### RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS

Nos parágrafos anteriores são encarados os problemas gerais da teoria matemática das equações dos RN ou os da determinação das respectivas soluções rigorosas. Na prática, os métodos de aproximação desempenham um papel tão importante como o das soluções rigorosas, que merecem uma atenção especial. Devido à grande variedade de métodos de aproximação, estas observações serão, em extensão, ainda mais resumidas que as dos capítulos anteriores.

Quer nos agrade ou não, é evidente que o cálculo automático desempenha um papel de importância crescente na resolução das equações do reactor. Mas a acção no nosso espírito proveniente das soluções obtidas por calculadores electrónicos é menos nítida, até porque, as máquinas electrónicas dão-nos informações experimentais, do mesmo tipo portanto que as obtidas nas experiências críticas.

Os calculadores dão-nos resultados obtidos com menor esforço e mais rapidamente que as experiências críticas, mas não nos auxiliam na visualização dos factores que determinam o resultado final, muito mais que as mesmas experiências. Por esta razão, os resultados obtidos por máquinas de cálculo são menos aptos a orientarem-nos no sentido de uma atitude superior à obtida através dos métodos analíticos de cálculo, e mesmo menos aptos que os métodos menos mecanizados dos cálculos numéricos. O papel que os calculadores poderão vir a desempenhar no campo dos reactores nucleares e em muitos outros campos, dependerá não só do uso que deles soubermos fazer não só na obtenção dos resultados finais como também na explicação dos mesmos resultados. Certamente grandes progressos poderão obter neste campo com os calculadores automáticos (1).

Entre os métodos de aproximação não numéricos a eficiência dos métodos variacionais é talvez mais surpreendente (2). Estes métodos servem para determinar os valores próprios dos operadores lineares. Como a variável tempo pode ser eliminada de quasi todas as equações dos reactores, transformando-as num problema de valores característicos, o método variacional pode ter largas aplicações na teoria dos reactores. O seu uso tem sido limitado ao máximo invocando-se o facto de o operador de BOLTZMANN não ser nem auto-adjunto nem normal. Está ainda por provar se esta limitação tem razão de ser. A causa da grande precisão do princípio variacional nos problemas simples da

(1) No Symposium de AMS falaram sobre calculadores, EHRLICH, VARGA, RICHMYER e CARLSON.

(2) Veja GREULING e MARVIN, *Graphical method of obtaining critical masses of water-tamped boilers*. Los Alamos Report 493. Veja ainda WEINBERG e WIGNER, op. cit. pag. 531 e «Papers» n.º 36 e 627 da 2ª Conf. de Genebra (1958).

(1) Veja, WEINBERG e WIGNER, op. cit. (fig. 9.6 pag. 262).

mecânica quântica reside no facto de toda a função positiva e com um único máximo em todo o seu domínio de existência poder ter uma boa aproximação por outra função com características idênticas. Assim  $\frac{1}{1+x^2}$  pode ser aproximada por  $e^{-\alpha x^2}$  com  $\alpha = 0,5$  a mais de 98%. Com isto queremos significar que o coseno do ângulo destas duas funções no espaço de HILBERT é superior a 0,98. O princípio variacional torna-se menos efectivo na mecânica quântica para problemas relativos a várias partículas, pois devido ao princípio de exclusão, a função de onda não pode ser positiva em todo o domínio. Na teoria do reactor, por outro lado, o fluxo correspondente ao maior valor característico, de acordo com o teorema BIRKHOFF-VARGA, é sempre positivo, o mesmo se verificando quanto ao fluxo adjunto. Por esta razão, pelo menos, o princípio variacional é mais adoptável aos problemas da teoria do transporte que aos da mecânica quântica. Parece porém, que isto é aplicável apenas à própria equação de BOLTZMANN e não às suas aproximações. Como se disse, as soluções das equações aproximadas são em geral «não positivas em todo o domínio». BROOKS e CALAME<sup>(1)</sup> utilizaram o princípio variacional, aplicando-o directamente à equação de BOLTZMANN e não às equações dos métodos de aproximação. Desta forma preservaram as vantagens da positividade das verdadeiras soluções.

O segundo método a ser mencionado é o da teoria da difusão. Sabe-se que esta teoria dá uma boa distribuição do fluxo nas regiões suficientemente afastadas das superfícies de separação de meios diferentes. A dificuldade está em que nos reactores heterogéneos todos

os pontos estão demasiadamente próximos das superfícies de separação de meios diferentes. Parece razoável, porém, que uma conveniente modificação das usuais condições de fronteira possa permitir não só uma aceitável representação dos fluxos assintóticos longe das fronteiras, mas possa ainda reproduzir as variações do fluxo, próximo das mesmas fronteiras. Esta sugestão já foi apresentada por DAVIDSON<sup>(1)</sup>. O cálculo de INÖNÜ do efeito rápido pode servir de exemplo de como isto se pode fazer. O efeito rápido foi sempre considerado o processo por excelência para o qual a teoria da difusão é inaplicável pois o efeito dá-se num meio que é pequeno em relação ao livre percurso médio. É certo que o cálculo do efeito rápido pela teoria da difusão com as condições de fronteira mais simples conduz a resultados francamente inaceitáveis. Mas quando INÖNÜ introduz 0,71 do livre percurso médio como a distância de extrapolação linear a situação muda completamente. É certo que 0,71 do livre percurso médio é um elemento estranho à teoria da difusão. Mas a proposta é precisamente a de introduzir tais elementos estranhos na teoria da difusão, na base dum conhecimento de soluções rigorosas relativas a casos simples. A prescrição de INÖNÜ aplica-se ao caso dum meio multiplicativo rodeado de um meio completamente absorvente, uma vez que se supõe o moderador em torno do elemento de combustível capaz de retirar aos neutrões rápidos, por meio de uma simples colisão, a sua faculdade de provocar ulteriores cisões rápidas. Um simples cálculo mostra que a condição de fronteira de INÖNÜ é equivalente a revestir o elemento de combustível com uma película infinitamente delgada cuja secção eficaz de difusão seja infinitamente ele-

(1) BROOKS e CALAME não puderam apresentar no Symposium considerações novas sobre este assunto.

(1) DAVIDSON — *Neutron transport theory*, Oxford, Clarendon Press 1957, pag. 98

(2) INÖNÜ — *J. Nucl. Sci. Eng.* 5 (1959) pag. 248.

vada por forma que o produto da espessura pela secção eficaz de difusão macroscópica seja finita, nomeadamente  $0,71 - 0,33 = 0,38$ . A solução do problema da difusão com tal elemento dispersivo entre o meio multiplicativo e o completamente absorvente que o rodeia, apresenta para o interior do meio multiplicativo (o elemento de combustível) o mesmo fluxo que o calculado por  $\text{INÖNÜ}$ . Considerando a variação de fluxo neutrónico nas vizinhanças da fronteira entre dois meios diferentes, verifica-se que é pouco provável que a introdução de uma superfície dispersiva explique adequadamente em todos os casos as perturbações no fluxo dessa vizinhança. Ainda preferível, em geral, é o considerar-se em adição à superfície dispersiva uma superfície absorvente, positiva ou negativa. De facto, para dividir a absorção res-

ponsável pela variação do fluxo entre os dois meios, será necessário atribuir parte da absorção superficial a um, parte ao outro meio, isto é, será necessário introduzir duas superfícies absorventes. Juntamente com a superfície dispersiva, dever-se-ia reproduzir desta forma o efeito das perturbações junto das fronteiras em termos da teoria da difusão.

## 10. Conclusão

O objectivo destas observações é o de exprimir a ideia de que a ciência dos reactores pode ser altamente auxiliada pela atenção dos matemáticos por estes problemas; mas também a convicção de que os matemáticos encontrarão muito interessantes problemas na ciência dos reactores.

# Decomposição de ideais em ideais primos: teoria de Kummer-Dedekind

por *Ubiratan D'Ambrosio*

Faculdade de Filosofia, Ciências, Letras de Rio Claro, S. P., Brasil

O. O teorema fundamental da teoria dos ideais estabelece a decomposição única de ideais não triviais num produto de ideais primos [1, pág. 45](+), isto é,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_g^{e_g}.$$

Como se verifica, a demonstração do teorema não nos dá nenhum processo de determinar efectivamente tal decomposição.

Para efectuar a decomposição, sendo  $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  basta conhecer a decomposição dos ideais principais  $(\alpha_i)$ , pois  $\mathfrak{A}$  se

obtém como m. d. c. destes [1, pág. 43], que pode ser calculado com facilidade a partir das decomposições de  $(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_r)$ . [2, pág. 110].

Para decompor  $(\alpha)$ , observamos que  $(\alpha) | N(\alpha)$ , e sendo  $N(\alpha)$  racional inteiro, temos  $N(\alpha) = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$ . Então só entram na decomposição de  $(\alpha)$  os ideais primos  $\mathfrak{P}$  que entram na decomposição dos  $(p_i)$ ; efectuando então a decomposição dos números primos racionais(++) em ideais primos, obtemos os ideais primos do corpo.

(+) Os números em colchetes referem-se à bibliografia. A notação adotada é em geral a usada em [1].

(++) Por números primos racionais queremos dizer ideais principais gerados por números primos racionais.