MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S T. — Matemáticas Gerais — 2 de Outubro de 1962.

5564 — Estabeleça a fórmula de Moivre para o cálculo das raízes de índice n de um complexo.

Designando por Z a imagem de um complexo z, represente no plano d'Argand o conjunto

$$C = \{Z : 4\sqrt{2} < |z| \leqslant 32 \wedge 0 \leqslant \arg z < \pi/4\}$$

e indique qual o seu transformado por meio da relação $z = w^5$.

5565 — Determine a operação do plano que passa por $P(1,-1,1)$ e é perpendicular ao plano $2x+3y=4z+1$ e paralelo à recta $x = z+3 = \dfrac{y+1}{2}$

Qual o polo do plano *dado* em relação à quádrica $2x^2+y^2-4xy-4yz=4$?

R: $11x-6y+z=18$; $P(12,8,-14)$.

5566 — Determine

a) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-e^{sh\,x}}\right)$

b) A área do plano $x0y$ caracterizada por $x \geqslant 3$ e $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x^2-1}$

R: $\dfrac{1}{2}$; $\log\sqrt{2}$.

5567 — Designe por D e J transformações (ou operadores) definidas por $Df(x)=f'(x)$ e $Jf(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.

Mostre que D e J são transformações lineares e que $DJ=JD$.

Designando por $\sum\limits_0^\infty a_i D^i = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots$ o operador que aplicado à função $f(x)$ origina a série $a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots$ (suporte convergente) e tendo presente a teoria das séries de Taylor, estude a possibilidade de representar $f(x+h)$ por $e^{hD} f(x)$.

Enunciados e soluções dos n.^{os} 5564 a 5567 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 13-3-1963.

I

5568 — 1) Sejam $A, B, C \cdots$ subconjuntos de um conjunto fundamental U. Mostre que a relação «$\subseteq$» definida por «$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$», é reflexiva, antisimétrica e transitiva.

2) Dados os números reais positivos $[A_1, A_2]$ e $[r]$, prove que $[A_1, A_2]\cdot[r] = [A_1 r, A_2 r]$. Aproveite esta propriedade para mostrar que $[1]$ é o elemento unidade de R.

3) Considere o número complexo $z = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta + i}$ e mostre que $|z| = |\cos\theta|$. Determine θ por forma que a imagem de z esteja sobre a recta $y=-x$.

R: 1) *Como* $A \cup A = A$ *tem-se, evidentemente,* $A \subseteq A$ *(reflexividade). Tendo-se* $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, *vem* $A \cup B = B \wedge B \cup A = A$ *e, como* $A \cup B = B \cup A$, *resulta* $A = B$ *(antisimetria). Finalmente,* $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longleftrightarrow A \cup B = B \wedge B \cup C = C$ *e, como* $A \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = B \cup C = C$, *vem* $A \subseteq C$ *(transitividade).*

3) $z = \dfrac{1}{tg\,\theta + i} = \dfrac{tg\,\theta - i}{tg^2\theta + 1} = \dfrac{tg\,\theta}{sec^2\theta} - cos^2\theta\, i = sen\,\theta\cos\theta - cos^2\theta\, i$.

$$|z| = \sqrt{sen^2\theta\cos^2\theta + cos^4\theta} = |\cos\theta|.$$

Sendo $\alpha = arg\,z$, *vem* $tg\,\alpha = -\dfrac{cos^2\theta}{sen\,\theta\cos\theta} = -cotg\,\theta$ *e, portanto, terá de ser* $cotg\,\theta = 1$, *isto é,* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *ou* $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$.

II

5569 — 1) Se u_n e v_n têm limites finitos u e v, e se $u > v$, mostre que, a partir de uma certa ordem, $u_n > v_n$.

Calcule

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)(\sqrt[n]{e}-1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

2) Sendo $r_n = \sqrt[n]{a_n}$, prove que $S)\ \Sigma a_n$ $(a_n \geqq 0)$ é convergente se $\overline{r} < 1$ e divergente se $\overline{r} > 1$.

Dada a série $\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\cdots$ $(1<\alpha<\beta)$, verifique que $\overline{\rho}=+\infty$ $\left(\rho_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ mas que ela é convergente. Aproveite o resultado para mostrar que a condição $\overline{\rho}<1$ garante a convergência de $S)$ mas que a condição $\overline{\rho}>1$ não implica a divergência de $S)$.

R: 1) *Como*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}-1\right]\left[\sqrt[n+1]{e}-1\right]\left[\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)(\sqrt[n]{e}-1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\zeta'\frac{1}{n+1}\right)\left(\xi'\frac{1}{n+1}\right)\left(\eta'\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{2}\zeta\frac{1}{n}\right)\left(\xi\frac{1}{n}\right)\left(\eta\frac{1}{n}\right)}=1, \text{ vem}$$

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)(\sqrt[n]{e}-1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$$

2) *A série* $\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\cdots$ *é majorada pela série* $\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots$, *que é convergente, e portanto a primeira também é convergente. No entanto,* $\rho_{2n-1}\to+\infty$.

III

5570 — Dada a função

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1)\\ |x| & (-1\leqq x\leqq 1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$$

resolva os seguintes problemas:

1) Esboce a imagem de $f(x)$.
2) Estude a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.
3) Quais são os extremantes de $f(x)$? Porquê?
4) É aplicável o teorema de ROLLE em $[-1,1]$? Porquê?
5) Determine a partir de $f(x)$ uma função contínua $F(x)$ que satisfaça as relações $F'(x)=f(x)$ e $F(0)=0$.

R: 2) *Descontínua em* $x=-\infty$ *e em* $x=1$. *Derivável em todos os pontos, excepto* $x=-1$, $x=0$ *e* $x=1$.

3) $x=-1$ *é maximizante, pois* $f'_e(-1)=1$ *e* $f'_d(-1)=-1$; $x=0$ *é minimizante porque* $f'_e(0)=-1$ *e* $f'_d(0)=1$.

4) *Não é aplicável o teorema de Rolle em* $[-1,1]$ *porque, embora* $f(x)$ *seja contínua nesse intervalo, não possui derivada em* $x=0$.

5) $$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+2x+1 & (x<-1)\\ -\frac{x^2}{2} & (-1\leqq x\leqq 0)\\ \frac{x^2}{2} & (0<x\leqq 1)\\ 2x-\frac{3}{2} & (x>1)\end{cases}$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º Exame de frequência — (2.ª chamada) — 20-3-1963.

I

5571 — 1) A, B e C designam conjuntos. Prove que $A\subseteq B \wedge A\subseteq C \Longleftrightarrow A\subseteq (B\cap C)$.

2) Sendo $a_1, a_2, \cdots a_n$ números reais positivos, mostre que:

$$a_1 a_2\cdots a_n=1\Longrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n\geqq n.$$

Utilize esta propriedade para provar que, sendo $x_1, x_2, \cdots x_n$ números reais positivos,

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqq n.$$

3) Calcule os números complexos z tais que z^7 e $\frac{1}{z^2}$ sejam conjugados.

R: 1) *Esta proposição sobre conjuntos é transformável na seguinte proposição da lógica matemática:*

$$(x \in A\Longrightarrow x\in B)\wedge(x\in A\Longrightarrow x\in C)\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow[x\in A\Longrightarrow(x\in B\wedge x\in C)].$$

Fazendo $x\in A=p$, $x\in B=q$ *e* $x\in C=r$, *vem*

$$(p\Longrightarrow q)\wedge(p\Longrightarrow r)\Longleftrightarrow[p\Longrightarrow(q\wedge r)]$$

ou

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Longleftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge r)],$$

proposição que é verdadeira pois exprime a propriedade distributiva da adição lógica em relação à multiplicação lógica.

2) $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

e, como $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$, *vem imediatamente*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq 1 \quad ou \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n.$$

Como $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$, *vem logo*

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n.$$

3) *Sendo* $z = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, *vem*

$$z^7 = \rho^7(\cos 7\alpha + i \operatorname{sen} 7\alpha)$$

e $\frac{1}{z_2} = \rho^{-2}[\cos(-2\alpha) + i \operatorname{sen}(-2\alpha)]$. *Para* z^7 *e* $\frac{1}{z^2}$ *serem complexos conjugados têm de se cumprir as condições:*

$$\rho^7 = \rho^{-2} \qquad 7\alpha - 2\alpha = 2k\pi$$

isto é,

$$\rho = 1 \quad e \quad \alpha = \frac{2k\pi}{5}.$$

$$z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

II

5572 — 1) Sejam $\bar{u} = \overline{\lim}\, u_n$ e $\underline{u} = \underline{\lim}\, u_n$ ($\bar{u}$ e $\underline{u}$ finitos). Prove que, dado $\varepsilon > 0$, então $u_n < \bar{u} + \varepsilon$ para todo o valor de n suficientemente grande e $u_n > \bar{u} - \varepsilon$ para uma infinidade de valores de n. Enuncie uma proposição análoga em que intervenha $\underline{u}$.

Indique os sublimites e os valores de $\bar{u}$ e $\underline{u}$ para a sucessão

$$u_n = n^2 \log\left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right) + \cos\frac{n\pi}{3}.$$

2) Mostre que a série $\Sigma a_n x^n$, sendo divergente para $x = x_0$, diverge em qualquer ponto $x = x_1$ mais afastado da origem. Sendo λ o seu raio de convergência e $f(x)$ a sua soma, prove que $f(x)$ é contínua em $]-\lambda, \lambda[$.

R. 1) *Como* $n^2 \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = n^2 \eta \frac{1}{n^2} \to 1$ $(\eta \to 1)$, *basta achar os sublimites de* $v_n = \cos\frac{n\pi}{3}$ *para se obterem fàcilmente os sublimites de* u_n. Ora.

$v_{3k} = \cos k\pi$ *tem sublimites* -1 e 1

$v_{3k+1} = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ *tem sublimites* $-\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{2}$

$v_{3k+2} = \cos\left(k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$ *tem sublimites* $-\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{2}$

e os sublimites de u_n *são* $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, *e* 2. $\bar{u} = 2$ *e* $\underline{u} = 0$.

III

5573 — 1) Calcule $P\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)}$.

2) Sendo c um extremante interior de $g(x)$ em $[a, b]$ e existindo $g'(c)$, prove que $g'(c)$ é nula ou infinita de duplo sinal.

R: 1) $$\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{x^3} + \frac{S_0}{x^2 + 2}.$$

Cálculo de a_0, a_1 e a_2:

$R_0(x) = \frac{-1 + x + x^2}{2 + x^2}$ *e, fazendo a divisão ascendente do numerador pelo denominador, obtém-se* $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{4}$.

Cálculo de S_0:

$R_\Delta(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3} = \frac{(x - 3) + \Delta}{-2x + x\Delta}$, *com* $\Delta = x^2 + 2$.

Como $x - 3$ *não é divisível por* $-2x$, *determine-se* α_0 *por forma que* $(x - 3 - \alpha_0 \Delta)_{x=0} = 0$. *Vem imediatamente* $\alpha_0 = -\frac{3}{2}$ *e* $S_0 = \frac{x - 3 + \frac{3}{2}(x^2 + 2)}{-2x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)} = -\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x} - \frac{3}{4}\frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$P \frac{x^2+x-1}{x^3(x^2+2)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{4} log\,|x| - \frac{3}{8} log\,(x^2+2)\,.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência (1.ª chamada) — 17-6-963.

I

5574 — 1) Demonstre que uma série de potências é série de Taylor da sua própria soma.

Escreva o desenvolvimento em série de Taylor da função $\frac{1}{x^2+2x+5}$ segundo as potências de $x+1$. Indique o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

2) Determine a por forma que as assíntotas da curva representativa da função $y = \frac{a x^2+1}{x-1}$ se interceptem num ponto de ordenada 2.

R: 1) $\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}$. *O desenvolvimento é válido para todos os valores de* x *que façam* $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 < 1$, *isto é,* $-3 < x < 1$.

2) *A curva admite as assíntotas* $X=1$ *e* $Y=aX+a$ *e portanto terá de ser* $2 = a+a$ *ou* $a=1$.

II

5575 — 1) Quando se diz que $f(x,y)$ é diferenciável em $P(a,b)$? Enuncie e demonstre uma condição suficiente de diferenciabilidade.

2) Considere o polinómio real $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Atribuindo a x n valores distintos $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$, construa-se a tabela

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$

e seja $I(x)$ o polinómio interpolador para estes n pares de valores. Prove que $f(x) = I(x) + a_0(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$.

R: 2) *Como se sabe,* $f(x) = I(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$ *e, como* $f^{(n)}(x) = n!\,a_0$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

III

5576 — 1) Determine k por forma que a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ seja igual a 2.

2) Mostre que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y - z - u &= 0 \\ 2x - 2y \quad\quad - u &= 0 \\ x - 3y + z \quad\quad &= 0 \\ 4x \quad - 2z - 3u &= 0 \end{aligned}$$

tem soluções não nulas. Determine um sistema fundamental de soluções e aproveite-o para apresentar a solução geral do sistema.

R: 1) *Com* $k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & k-3 \\ 0 & k & 1 & 5-3k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2-k & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & 2-k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3k \end{bmatrix}$$

Só com $k=2$ *a característica da matriz é* 2. *É fácil verificar que com* $k=0$ *a característica da matriz é* 3.

A matriz do sistema é

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ *e o determinante principal é* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$. *O sistema tem soluções não nulas porque é indeterminado (grau de indeterminação* $d=2$*).*

Para determinar um sistema fundamental de soluções (duas soluções independentes) considere-se o sistema constituido pelas equações principais:

$$\begin{aligned} x + y - z - u &= 0 \\ 2x - 2y \quad\quad - u &= 0\,. \end{aligned}$$

Fazendo $z=1$ *e* $u=0$, *obtém-se a solução* $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=1$, $u=0$ *e, tomando* $z=0$ *e* $u=1$, *deriva-se* $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=0$, $u=1$.

As soluções $((x^1)) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ 0\right)$ *e* $((x^2)) = \left(\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ 0\ 1\right)$ *são independentes e a solução geral pode escrever-se na forma*

$$((x)) = \alpha\,((x^1)) + \beta\,((x^2))$$

isto é

$$x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\beta$$

$$y = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta$$

$$z = \alpha$$

$$u = \beta\,.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência (2.ª chamada) — 22-6-963.

I

5577 — 1) Deduza a regra de Cauchy para o levantamento de uma indeterminação da forma ∞/∞.

Calcule $\lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{e^{x^2}+\log x}{x^2+\log x}$.

2) Mostre que uma condição suficiente de convexidade de $f(x)$ em $x=c$ é que $f'(x)$ seja crescente neste ponto.

Determine a e b por forma que a assíntota da curva representativa de $y = \dfrac{a\,x^2+b\,x+\log x}{x}$ seja paralela a $y=x$ e passe pelo ponto $(1,2)$.

R: 1) $\lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{e^{x^2}+\log x}{x^2+\log x} = \lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{e^{x^2}2\,x+1/x}{2\,x+1/x} = \lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{e^{x^2}2\,x^2+1}{2\,x^2+1} = \lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{2\,(e^{x^2}2\,x^3+e^{x^2}2\,x)}{4\,x} = \lim\limits_{x=+\infty} (e^{x^2}x^2+e^{x^2}) = +\infty\,.$

2) *A assíntota da curva representativa de* $y(x)$ *é* $y = a\,x+b$ *e portanto terá de ser* $\begin{cases} a=1 \\ 2=a+b \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} a=1 \\ b=1\,. \end{cases}$

II

5578 — 1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente para que $f(x,y)$ (diferenciável) seja homogénea é que verifique a identidade de Euler.

Supondo que $f(x,y)$ (diferenciável) satisfaz à igualdade $f(tx,ty)=\varphi(t)\,f(x,y)$, prove que $f(x,y)$ é homogénea. Qual é o seu grau de homogeneidade?

2) Dada a tabela

x	$\operatorname{sen} x$
a	$\operatorname{sen} a$
$a+1$	$\operatorname{sen}(a+1)$

, escreva a fórmula interpoladora de Gregory-Newton com resto. Mostre que um limite superior do erro que se comete ao proceder a uma interpolação é 0,5.

R: 1) *De* $f(tx,ty)=\varphi(t)\,f(x,y)$ *vem* $f'_x(tx,ty)\,x + f'_y(tx,ty)\,y = \varphi'(t)\,f(x,y)$ *e, fazendo* $t=1$, $x\,f'_x(x,y)+y\,f'_y(x,y)=\varphi'(1)\,f(x,y)$. *Esta última igualdade mostra que* $f(x,y)$ *é homogénea de grau* $\varphi'(1)$.

2) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\left[\operatorname{sen}(a+1)-\operatorname{sen} a\right] + \dfrac{\operatorname{sen}(\xi+\pi)}{2!}(x-a)(x-a-1)\,.$

Ora $|R(x)| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}(\xi+\pi)}{2!}(x-a)(x-a-1)\right| < \dfrac{1}{2!}(a+1-a)^2 = 0{,}5$

III

5579 — 1) Demonstre que uma condição necessária para que a matriz A tenha inversa é que seja quadrada. Existindo inversa, prove que esta matriz é única.

Mostre seguidamente que a condição necessária e suficiente para que A tenha inversa é que seja regular.

2) Deduza a regra de Cramer para a resolução de um sistema de equações lineares possível determinado. Como pode utilizar a mesma regra para a resolução de um sistema possível indeterminado?

Enunciados e soluções dos n.os 5568 a 5579 de Fernando de Jesus

F. C. Porto — Matemáticas Gerais — (Exame final) — Cursos de Engenharia Civil e Química — Junho 1963.

Ponto n.º 1

I

5580 — Defina, com precisão, os seguintes conceitos utilizados no Curso:

1) — *Complemento algébrico* de um elemento de um determinante;

2) — *Dimensão* de um espaço vectorial.

3) — *Limite* (numérico) de uma sucessão real.

4) — *Convergência uniforme* de uma sucessão de funções [reais, da variável real, com o mesmo domínio].

5) — *Parâmetros directores* de uma recta.

6) — *Fracções simples* [numa indeterminada, sobre um corpo K de números].

7) — *Diâmetro e centro* de uma cónica.

8) — *Números de Rôlle* de uma equação [algébrica, inteira, de coeficientes reais].

II

5581 — 1 — a) Resolver o sistema de equações lineares (nas incógnitas x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ 3x + y + 4z + 3t = 11 \\ -2x + 6y + 4z + 10t = 18 \end{cases}$$

b) Escrever o sistema anterior como igualdade de matrizes, uma das quais seja o produto de uma matriz conveniente pela matriz-coluna

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix}$$

2 — No espaço $K[X]$ dos polinómios numa indeterminada sobre um corpo K de números, considerar a correspondência $f \rightarrow f'$ que a cada polinómio $f \in K[X]$ associa o respectivo *derivado* $f' \in K[X]$: seja D essa correspondência.

a) Mostrar que D é um *operador linear* sobre $K[X]$.

b) Mostrar que, fixado um número natural n, a totalidade dos polinómios $f \in K[X]$ tais que $D^n f = 0$, constitui um *subespaço vectorial* de $K[X]$.

3 — Considerar a recta r, de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e o ponto $A(1, -2, 0)$.

a) Determinar a equação cartesiana do plano que passa por A e é perpendicular à recta r.

b) Achar a distância do ponto A à recta r.

c) Determinar equações cartesianas da recta p, que passa por A, é perpendicular a r, e encontra esta recta.

(Eixos rectangulares)

4 — a) Calcular todos os valores do parâmetro real λ que tornam *degenerada* a cónica de equação

$$(1) \qquad x^2 - y^2 + 2\lambda x y - 4\lambda x + \lambda^2 = 0$$

b) Para um valor não nulo de λ encontrado em a), determinar um ponto comum às rectas em que (1) degenera.

c) Determinar a *polar* da origem (das coordenadas) em relação à cónica associada a (1) no plano projectivo (supondo (1) não degenerada).

d) Mostrar que para todos os valores de λ admissíveis na alínea c), a polar aí encontrada passa por um *ponto fixo* do plano projectivo, que deverá ser determinado.

5 — Derivar as seguintes funções reais:

a) $|x - 1| \mid R$ (Desenhar o gráfico)

b) $\text{Arc}\, tg\, ch\, x \mid R$

c) $\log\,(1 + 2^x) \mid R$

6 — Seja $f(x) \mid I$ uma função real contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$, $a < b$; designaremos por $\|f\|$ o *máximo* da função $|f(x)| \mid I$. (Leia-se: $\|f\|$ = *norma* de f).

Designaremos por $[f]$ a classe das funções reais contínuas em I, que diferem de f por uma constante, isto é, a classe das funções $\overline{f}(x) \mid I$ tais que, para todo o $x \in I$, é $\overline{f}(x) = f(x) + k$, com k constante real.

(*Notar* que o gráfico de cada função $\overline{f}$ pode deduzir-se do gráfico de f mediante uma *translação*).

a) Justificar a existência do *máximo* de $|f(x)| \mid I$.

b) Mostrar que sendo

$$\inf_{\overline{f} \in [f]} \|\overline{f}\| = 0$$

(isto é, sendo nulo o ínfimo do conjunto das normas de todas as funções $\overline{f}$ que constituem a classe $[f]$) então f é uma função *constante*.

F. C. Porto — Matemáticas Gerais — **(Exame final) — Cursos de Engenharia Civil e Química — Junho 1963.**

Ponto n.º 3

I

5582 — Defina os seguintes conceitos utilizados no Curso:

1) — *Elemento simples* do corpo $K(X)$ (das fracções racionais numa indeterminada sobre o corpo numérico K).

2) — Vectores (livres) *complanares*.

3) — *Majorante, minorante, supremo, ínfimo* de um

conjunto de números reais (convenientemente limitado).

4) — *Soma* e *resto de ordem* n de uma série numérica real.

5) — *Convergência pontual de uma série* de funções, (reais, da variável real) com o mesmo domínio.

6) — *Forma linear* sobre um espaço vectorial.

7) — Superfície *regrada*. Exemplos.

8) — Direcção *conjugada* de um diâmetro; *assíntota* de uma cónica.

II

5583 — 1 — *a*) Escrever uma expressão geral dos complexos cujos afixos pertencem à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 .$$

Indicação: começar por re-escrever a equação, de modo a evidenciar o *centro* e o *raio* da circunferência.

b) Determinar, de entre esses complexos, o que tem *módulo máximo*.

2 — Considerar, no espaço vectorial real R^3, os vectores:

$$u_1 = (2, 3, -1)$$
$$u_2 = (-1, 2, 0)$$
$$u_3 = (3, 0, 4)$$

a) Averiguar se esses vectores constituem uma *base* de R^3.

b) Justificar a existência de um *único* operador linear A, sobre R^3, tal que $A u_1 = e_1$, $A u_2 = e_2$, $A u_3 = e_3$, sendo $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, e estudar a *invertibilidade* desse operador.

c) Indicar (justificando a resposta) o número de soluções da equação (na incógnita vectorial $x \in R^3$) $A x = 0$.

3 — *a*) Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências

$$x^2 + y^2 + 2(1-\lambda)x - 4\lambda^2 y - 1 - (1-\lambda)^2 = 0$$

(onde λ é um parâmetro real arbitrário).

b) Classificar a linha obtida, e determinar os respectivos eixos de simetria.

4 — Classificar as seguintes séries reais:

a) $$\sum_1^\infty \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n!}$$

b) $$\sum_1^\infty \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$$

c) $$\sum_1^\infty \frac{n^n}{(n+1)!}$$

5 — Determinar a equação cartesiana do cilindro, de geratrizes paralelas à recta

$$r \begin{cases} x - 3z = 1 \\ y = -2z \end{cases}$$

que admite como directriz a linha de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x - z = 1 . \end{cases}$$

6 — *a*) Desenhar o *gráfico* da função real $G(x) \mid R$, onde $G(x)$ designa a distância do número real x ao mais próximo número inteiro.

b) Mostrar que é *uniformemente convergente em* R a série de funções reais

$$\sum_0^\infty \frac{G(2^n \cdot x)}{2^n} .$$

c) Pondo, para cada $x \in R$,

$$H(x) = \sum_0^\infty \frac{G(2^n \cdot x)}{2^n} ,$$

mostrar que é *contínua* em R a função real $H(x) \mid R$.

Enunciados dos n.os 5580 a 5583 de A. Andrade Guimarães

NOTA — *Na elaboração dos precedentes enunciados, teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto, em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira* (1450, *no corrente ano lectivo*) *as* duas *aulas práticas por semana, prescritas por lei, sendo* uma *apenas dada em cada turma.* (*E mesmo assim, cada turma comporta por vezes* 60 *alunos*).