ANO XXIII—N.º 88-89 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ.—1962

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Nuevos operadores relacionados con el operador «elasticidad»

por Alberto Sáez Fernández de Toro y José Gallego-Diaz

Definiciones.

Sea $U = U(x, y, z)$ una función uniforme, definida en una cierta región del espacio y sean x, y, z, las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto P, cualquiera, de dicha región. Suponemos, también, que U no se anula en P y que admite derivadas parciales primeras.

Por consiguiente, estarán definidas en P las elasticidades parciales primeras de U, que serán designadas con la siguiente notación:

$$\mathcal{E}_x(U) = \frac{x}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \mathcal{E}_y(U) = \frac{y}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$\mathcal{E}_z(U) = \frac{z}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sea $\vec{F} = \vec{i}\, X + \vec{j}\, Y + \vec{k}\, Z$ un vector cuyas componentes son funciones de las coordenadas de P y que están sujetas a las mismas restricciones que U.

Definiremos el vector **gradiente elastico** de $U(x, y, z)$, como sigue:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \vec{i} \cdot \mathcal{E}_x(U) + \vec{j} \cdot \mathcal{E}_y(U) + \vec{k} \cdot \mathcal{E}_z(U).$$

Definiremos el escalar **divergencia elastica de** $\vec{F}(x, y, z)$ como sigue:

$$\text{Die}\, \vec{F} = \mathcal{E}_x(X) + \mathcal{E}_y(Y) + \mathcal{E}_z(Z)$$

y definiremos el vector **rotacional elastico de** $\vec{F}(x, y, z)$ así:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\, \vec{F} = \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(Z) - \mathcal{E}_z(Y)] +$$
$$+ \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(X) - \mathcal{E}_x(Z)] + \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(Y) - \mathcal{E}_y(X)].$$

Las anteriores definiciones podrían haber sido presentadas en forma sintética, introduciendo, previamente, el siguiente operador vectorial

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{i}\, \mathcal{E}_x + \vec{j}\, \mathcal{E}_y + \vec{k}\, \mathcal{E}_z$$

en donde: E_x, E_y, E_z son los operadores elasticidad parcial primera respecto de x, y, z, respectivamente.

Entonces, se puede escribir:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \vec{\mathcal{E}}\, U$$
$$\text{Die}\, \vec{F} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{F} \quad \text{(producto escalar)}$$
$$\overrightarrow{\text{Roe}}\, \vec{F} = \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{F} \quad \text{(producto vectorial)}$$

Relación entre $\overrightarrow{Gre}\, U$ *y* $\overrightarrow{Grad}\, U$.

Consideremos el afinor diagonal τ, cuya expresión en función de las díadas unidad sea la siguiente:

$$\tau = x\vec{i}\,\vec{i} + y\vec{j}\,\vec{j} + z\vec{k}\,\vec{k}.$$

La matriz de dicho afinor es:

$$\|\tau\| = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{Vmatrix}$$

y los elementos de la diagonal no son otra cosa que las coordenadas de P.

Formemos el producto escalar:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

en donde:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

Resulta:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = X\vec{i}\,(\vec{i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U) + y\vec{j}\,(\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U) + \\ + Z\vec{k}\,(\vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U)$$

Y, por consiguiente:

$$\mathfrak{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{i}\,x\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,y\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,z\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

Recordando la definición de Gre U, se observa que se verifica la relación:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \mathfrak{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} = \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

designando por $\mathfrak{A}$ el afinor diagonal:

$$\mathfrak{A} = \frac{x}{U}\,\vec{i}\,\vec{i} + \frac{y}{U}\,\vec{j}\,\vec{j} + \frac{z}{U}\,\vec{k}\,\vec{k}$$

cuya matriz es:

$$\|\mathfrak{A}\| = \begin{Vmatrix} \frac{X}{U} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y}{U} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z}{U} \end{Vmatrix}$$

Es de subrayar que, por ser $\mathfrak{T}$ un afinor diagonal, puede permutarse el orden de los factores y escribir:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} \cdot \mathfrak{T} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \mathfrak{A}$$

Elasticidad segun una direccion.

La elasticidad de $U(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ y según la dirección y el sentido del vector:

$$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

podremos definirla así:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U) = \frac{x}{U}\,\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{y}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \\ + \frac{z}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

Es evidente que el concepto de «elasticidad según una dirección» coincide con el de «elasticidad parcial primera» en el caso de que $\vec{n}$ coincida con uno de los tres versores fundamentales.

Se podrá escribir:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U) = \mathcal{E}_x(U)\cos\alpha + \mathcal{E}_y(U)\cos\beta + \\ + \mathcal{E}_z(U)\cos\gamma = \vec{n} \cdot \mathcal{E}\, U = \vec{n} \cdot \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \\ = \vec{n} \cdot \mathfrak{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U}$$

Y teniendo presente que $\mathfrak{A}$ es un afinor diagonal:

$$\vec{n} \cdot \mathfrak{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \mathfrak{A} \cdot \vec{n}$$

y por consiguiente:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(u) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U} \cdot \mathfrak{T} \cdot \vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, U}{U}\,\vec{t}$$

en donde hemos designado por $\vec{t}$ al vector transformado del $\vec{n}$ por la aplicación del afinor $\mathfrak{T}$:

$$\vec{t} = \mathfrak{T} \cdot \vec{n} = \vec{i}\,x\cos\alpha + \vec{j}\,y\cos\beta + \vec{k}\,z \cdot \gamma$$

Puesto que: $\overrightarrow{\text{Gre}}\, U = \mathfrak{A}\,\overrightarrow{\text{Grad}}\, U$, se verificará:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(u) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{Gre}}\, U$$

y, por consiguiente, la elasticidad de U según la dirección y el sentido de $\vec{n}$ no es otra cosa que la proyección del gradiente elástico de U sobre el eje definido por n. Evidentemente, esta propiedad hubiera podido servir como definición de «elasticidad según una dirección».

En el caso de que $\vec{n}$ fuera perpendicular a $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$, se cumple:

$$\mathcal{E}_{\vec{n}}(U)=0$$

o sea:

$$x\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+y\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+z\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma=0$$

y si, en tal caso, consideramos un desplazamiento elemental, a partir de P, definido por:

$$\overrightarrow{ds}=\vec{n}\cdot ds=\vec{i}\cdot dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$$

se verificará:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds};\ \cos\beta=\frac{dy}{ds};\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

y, por consiguiente:

$$x\frac{\partial U}{\partial x}dx+y\frac{\partial U}{\partial y}dy+z\frac{\partial U}{\partial z}=0\,.$$

Si las componentes del desplazamiento elemental $(dx,\ dy,\ dz)$ satisfacen la relación anterior, la elasticidad de U en la dirección del desplazamiento es nula y podremos decir que dicho desplazamiento se efectúa sobre una «Superficie de Elasticidad Nula».

El valor máximo de la $\mathcal{E}_{\vec{n}}(U)$ en el punto P, se producirá cuando $\vec{n}$ sea paralelo y del mismo sentido que $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$, para lo cual ha de cumplirse:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}}=\frac{\cos\beta}{\frac{y}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{z}{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}}\,.$$

En tal caso, las componentes de un desplazamiento elemental paralelo a $\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\, U$ deberan satisfacer al sistema:

$$\frac{dx}{x\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{dy}{y\frac{\partial U}{\partial y}}=\frac{dz}{z\frac{\partial U}{\partial z}}$$

que son, pues, las ecuaciones diferenciales de las «*Líneas de Máxima Elasticidad*». Evidentemente, las referidas líneas son las trayectorias ortogonales de las antes citadas «*Superficies de Elasticidad Nula*».

Potencial elastico.

Diremos que $\Psi=\Psi(x,y,z)$ es el potencial elástico de $\vec{F}=\vec{i}\,X+\vec{j}\,Y+\vec{k}\,Z$ cuando se verifique:

$$\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi$$

$$\text{O sea: }\begin{cases} X=\mathcal{E}_x(\Psi)=\dfrac{x}{\Psi}\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\\[2mm] Y=\mathcal{E}_y(\Psi)=\dfrac{y}{\Psi}\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\\[2mm] Z=\mathcal{E}_z(\Psi)=\dfrac{z}{\Psi}\cdot\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}\end{cases}.$$

En tal caso, llamando $\overrightarrow{ds}$ a un vector elemental tangente a una curva en un punto genérico de la misma, la circulación elemental de $\vec{F}$ sobre dicha curva será:

$$d\mathcal{C}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi\cdot\vec{n}\,ds=\mathcal{E}_{\vec{n}}(\Psi)\,ds$$

Y la circulación por unidad de longitud será: $\frac{d\mathcal{C}}{ds}=\mathcal{E}_{\vec{n}}(\Psi)$ es decir, igual a la elasticidad del potencial según la dirección de la tangente a la curva.

Teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi=\mathcal{T}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}$$

se verificará:

$$d\mathcal{C}=\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi\,\overrightarrow{ds}=\overrightarrow{ds}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Gre}}\,\Psi=$$

$$=\overrightarrow{ds}\cdot\mathcal{T}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}\mathcal{T}\,\overrightarrow{ds}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi}{\Psi}(\vec{i}\,x\,dx+\vec{j}\,y\,dy+\vec{k}\,z\,dz)=$$

$$=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx\frac{x}{\Psi}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\frac{y}{\Psi}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz\cdot\frac{z}{\Psi}\,.$$

Es evidente que la circulación elemental de $\vec{F}$ a lo largo de una curva situada sobre una superficie de elasticidad nula (de Ψ) es cero, y que lo mismo ocurrirá con la circulación a lo largo de una trayectoria no elemental situada sobre una de dichas superficies.

Calculemos ahora Die $\vec{F}$, en la hipótesis de existir «Potencial Elástico»

$$\text{Die}\,\vec{F} = \text{Die}\,\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi =$$
$$= \mathcal{E}^2_{xx}(\Psi) + \mathcal{E}^2_{yy}(\Psi) + \mathcal{E}^2_{zz}(\Psi)$$

en donde: $\mathcal{E}^2_{xx}(\Psi)$ es la elasticidad parcial segunda respecto de x dos veces y análogamente las demás.

Recordando que:

$$\text{Die}\,\vec{F} = \mathcal{E} \cdot \vec{F}$$
$$\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi = \mathcal{E}\,\Psi$$

será posible también escribir:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Gre}}\,\Psi = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}\,\Psi\,(\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})\,\Psi = \mathcal{E}^2\,\Psi$$

Podremos, por tanto, considerar a

$$\mathcal{E}^2 = (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}) = \mathcal{E}^2_{xx} + \mathcal{E}^2_{yy} + \mathcal{E}^2_{zz}$$

como un operador análogo al «Laplaciano».

Otras relaciones interesantes.

Comencemos por desarrollar la expresión:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F}:$$

Se verifica:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(z) - \mathcal{E}_z(y)] + \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(x) - \mathcal{E}_x(z)] +$$
$$+ \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(y) - \mathcal{E}_y(x)]\,.$$

Con lo cual se obtiene:

$$\text{Die}\,\overrightarrow{\text{Roe}}\,\vec{F} = \mathcal{E}_x\,[\mathcal{E}_y(z) - \mathcal{E}_z(y)] +$$
$$+ \mathcal{E}_y\,[\mathcal{E}_z(x) - \mathcal{E}_x(z)] + \mathcal{E}_z\,[\mathcal{E}_x(y) - \mathcal{E}_y(x)]\,.$$

Veamos, a continuación, el desarrollo de $\overrightarrow{\text{Roe}}\,\overrightarrow{\text{Gre}}\,U$:

Como $\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U) + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U)\,.$

$$\text{Será: Roe}\,\overrightarrow{\text{Gre}\,U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \\ \mathcal{E}_x(U) & \mathcal{E}_y(U) & \mathcal{E}_z(U) \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}\,[\mathcal{E}^2_{zy}(U) - \mathcal{E}^2_{yz}(U)] +$$
$$+ \vec{j}\,[\mathcal{E}^2_{xz}(U) - \mathcal{E}^2_{zx}(U)] +$$
$$+ \vec{k}\,[\mathcal{E}^2_{yx}(U) - \mathcal{E}^2_{xy}(U)]$$

que, en general, es un vector no nulo. Pero si U adopta una de las dos formas siguientes:

$$U = U(W) \text{ siendo } W = XYZ$$

o bien:

$$U = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$$

es sabido que en estos dos casos y solo en estos dos casos se verifica [1]

$$\mathcal{E}^2_{xy} = \mathcal{E}^2_{yx}\,; \quad \mathcal{E}^2_{yz}(u) = \mathcal{E}^2_{zy}\,; \quad \mathcal{E}^2_{zx}(u) = \mathcal{E}^2_{xz}(u)$$

y, por consiguiente, en tales casos, se cumplirá:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\;\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = 0$$

Supongamos ahora que $U = U(x, y, z)$ pueda ser descompuesta en el producto de dos funciones

$$U_1 = U_1(x, y, z) \text{ y } U_2 = U_2(x, y, z)\,.$$

Teniendo en cuenta que el operador elasticidad posee la propriedad siguiente:

$$\mathcal{E}_x(f \cdot \varphi) = \mathcal{E}_x(f) + \mathcal{E}_x(\varphi)$$

Tendremos:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}\,U = \text{Gre}\,(U_1 \cdot U_2) = \vec{i}\,E_x(U_1\,U_2) +$$
$$+ \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_1\,U_2) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U_1\,U_2) = \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U_1) +$$
$$+ \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_1) + \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U_1) + \vec{i}\,\mathcal{E}_x(U_2) + \vec{j}\,\mathcal{E}_y(U_2) +$$
$$+ \vec{k}\,\mathcal{E}_z(U)\,.$$

---

(1) Véase: J. Gallego-Díaz «Gazeta Matemática», Lisboa, n.º 50, Diciembre 1951.

Y, por tanto:

$$\overrightarrow{\text{Gre}}(U_1\, U_2) = \overrightarrow{\text{Gre}}\, U_1 + \overrightarrow{\text{Gre}}\, U_2$$

Consideremos, a continuación, un vector $\vec{F} = \vec{i} \cdot X + \vec{j} \cdot Y + \vec{k} \cdot Z$ cuyas componentes adopten la forma:

$$X = X_1\, X_2\,,, \quad Y = Y_1\, Y_2\,,, \quad Z = Z_1\, Z_2$$

Y desarrollemos la expresión $\text{Die}\,\vec{F}$: Resulta:

$$\text{Die}\ \vec{F} = \mathcal{E}_x(X_1\, X_2) + \mathcal{E}_y(Y_1\, Y_2) + \mathcal{E}_z(Z_1\, Z_2)$$

Y si, por ejemplo, consideramos los vectores:

$$\vec{F}_1 = \vec{i}\, X_1 + \vec{j}\, Y_1 + \vec{k}\, Z_1$$

y
$$\vec{F}_2 = \vec{i}\, X_2 + \vec{j}\, Y_2 + \vec{k}\, Z_2$$

se podrá escribir:

$$\text{Die}\ \vec{F} = \text{Die}\ \vec{F}_1 + \text{Die}\ \vec{F}_2$$

Veamos, finalmente, el desarrollo de $\text{Roe}\,\vec{F}$, en el mismo caso que antes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Roe}}\ \vec{F} = {} & \vec{i}\,[\mathcal{E}_y(Z_1\, Z_2) - \mathcal{E}_z(Y_1\, Y_2)] + \\ & + \vec{j}\,[\mathcal{E}_z(X_1\, X_2) - \mathcal{E}_x(Z_1\, Z_2)] + \\ & + \vec{k}\,[\mathcal{E}_x(Y_1\, Y_2) - \mathcal{E}_y(X_1\, X_2)] \end{aligned}$$

Y, por consiguiente:

$$\overrightarrow{\text{Roe}}\ \vec{F} = \overrightarrow{\text{Roe}}\ \vec{F}_1 + \overrightarrow{\text{Roe}}\ \vec{F}_2\,.$$

Nota: La generalización a espacios de n dimensiones no presenta dificultad alguna.

Constituição do Centro de Tratamento da Informação (CENTI)

A — Origem e objectivos

Por iniciativa da Cooperativa da Actividade Científica DIÁLOGO, numa sala da Faculdade de Ciências de Lisboa reuniu-se a 3 de Novembro de 1961 um grupo de cientistas portugueses com o objectivo de promover em Portugal a utilização das técnicas decorrentes do *Tratamento da Informação* e o desenvolvimento do necessário apoio científico.

Das decisões tomadas resultou a constituição no seio da mesma Cooperativa do CENTRO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO — CENTI cujos objectivos primários são os indicados atrás, e dos quais se dará em seguida maior pormenorização.

Estabeleceu-se contrato com o Sócio Colectivo «SOLOR» no sentido de assegurar ao CENTRO a possibilidade de utilização de equipamento de cálculo.

B — Organização, pessoal e sede

1 — São Orgãos do CENTI:

a) *Direcção que se compõe de*

1 Representante da Direcção ou da Junta Executiva da DIALOGO.

1 Representante do Sócio Colectivo «SOLOR».

1 Responsável (sócio da DIALOGO) da Secção *Evolução de Material.*

1 Responsável (sócio da DIÁLOGO) pela actividade *Promoção Científica.*

1 Responsável (sócio da DIÁLOGO) da Secção *Publicações.*

b) *Secretariado que se compõe*

3 Sócios da DIALOGO.

1 Representante da «SOLOR».

2 — A Sede do CENTI é a Sede da DIÁLOGO.