Resolução de sistemas de equações lineares determinados

por F. Teixeira de Queiroz

Algoritmos resolventes

Seja

$$(1)\qquad \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n + d_n = 0 \end{array}$$

um sistema de n equações lineares a n incógnitas, determinado, que representaremos com a forma matricial

$$(1') \qquad C \cdot X + D = 0 \qquad |C| \neq 0$$

fazendo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} X^* = [x_1\, x_2 \cdots x_n] \\ D^* = [d_1\, d_2 \cdots d_n] \end{array}$$

Conhecida a matriz C^{-1}, inversa de C, o sistema (1) admitirá a solução

$$(2) \qquad X = -C^{-1} \cdot D$$

Porém, na prática, os diferentes algoritmos que resolvem o sistema (1) obtêm-se, não pelo cálculo de C^{-1}, mas decompondo a matriz C no produto de duas matrizes triangulares A e B, em que uma é triangular esquerda e a outra é triangular direita. Como cada uma destas matrizes tem $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coeficientes que podem ser não nulos, há, na decomposição da matriz C, n elementos arbitrários.

De

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

vemos que terá de ser

$$c_{ij} = \sum_{k \leqq i,j} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ou seja

$$(4) \qquad \begin{array}{l} a_{ij} = 1/b_{jj} \cdot \left(c_{ij} - \displaystyle\sum_{k<j} a_{ik} \cdot b_{kj}\right) \\ b_{ij} = 1/a_{ii} \cdot \left(c_{ij} - \displaystyle\sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{kj}\right) \end{array}$$

A decomposição

$$(4') \qquad a_{ii} \cdot b_{ii} = c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}$$

é arbitrária, o que confirma a conclusão a que chegamos anteriormente de que, na decomposição da matriz C existem n elementos arbitrários. Vemos, também, que tanto a_{ii} como b_{ii} terão de ser diferentes de zero para que a decomposição seja possível. É condição necessária e suficiente para que isso se verifique que alguma cadeia de menores principais da matriz C não tenha elementos nulos. Verificada uma tal condição a decomposição de C não oferece a menor dificuldade.

Decompõe-se c_{11} e em seguida calcula-se a primeira coluna de A e a primeira linha de B, por meio de (4). Decompõe-se em seguida, por meio de (4'), o elemento c_{22} e calculam-se a segunda coluna de A a segunda linha de B, etc.

O cálculo das inversas de A e de B também não oferece dificuldade de maior o mesmo se dizendo da inversa de C, a qual é dada por

$$C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Não é preciso, porém, conhecer esta para resolver o sistema (1'). Com efeito, fazendo em

$$C \cdot X = A \cdot B \cdot X = -D,$$

$$(5') \qquad B \cdot X = Y$$

teremos

$$(5') \qquad A \cdot Y + D = 0$$

O sistema (1) aparece decomposto nos sistemas

$$(5) \quad \begin{array}{l} a_{11} \cdot y_1 \hfill + d_1 = 0 \\ a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 \hfill + d_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \cdots + a_{nn} \cdot y_n + d_n = 0 \end{array}$$

e

$$(5) \quad \begin{array}{r} b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + \cdots + b_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ b_{22} \cdot x_2 + \cdots + b_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{nn} \cdot x_n = y_n \end{array}$$

que se resolvem duma forma imediata.

Conhecida a inversa da matriz A podemos ainda transformar o sistema (1') no sistema equivalente, de resolução imediata,

$$(6') \qquad B \cdot X + A^{-1} \cdot D = 0.$$

É na formação deste sistema que se baseiam os diferentes algoritmos resolventes do sistema (1).

Se em vez de decompormos em matrizes triangulares a matriz C, decompusermos a matriz de ordem $n+1$, obtida daquela pela ampliação duma coluna com os termos independentes e duma linha com os mesmos termos transpostos, teremos

$$\begin{bmatrix} C & D \\ D & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ Y' & U' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & Y \\ O & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & AY \\ YB & Y'Y + U'U \end{bmatrix}$$

o que mostra ser

$$C = A \cdot B \quad \text{e} \quad Y = A^{-1} \cdot D$$

e ainda que o sistema (6') se estabelece, duma forma imediata, sem ser necessário o cálculo de A^{-1}.

É baseado nesta decomposição, que aqui establecemos para sistemas de equações, simétricos ou não, que se constroem os algoritmos de Gauss-Doolitle e de Choleski. Eles distinguem-se um do outro apenas pela forma como decompõem os elementos da diagonal. Enquanto no primeiro se toma $b_{ii} = 1$ e, portanto

$$a_{ii} = c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}$$

no segundo faz-se

$$a_{ii} = b_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k<i} a_{ik} \cdot b_{ki}}\,.$$

Tais decomposições simplificam muito, no caso de sistemas simétricos, o cálculo das matrizes auxiliares A e B. Com efeito no algoritmo de Gauss será $A^* = S \cdot B$, em que S é a matriz diagonal formada pelos elementos da diagonal de C. Com a notação de Gauss será

$$\begin{bmatrix} A & O \\ Y' & U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [ab] & [bb,1] & 0 & \cdots & 0 \\ [ac] & [bc,1] & [cc,2] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [an] & [bn,1] & [cn,2] & \cdots & [nn,u] \end{bmatrix}$$

No algoritmo de CHOLESKI teremos $A^* = B$.

BANACHIEWICZ determina, com o auxílio de cracovianos (que não se distinguem das matrizes a não ser por o produto se fazer coluna por coluna), a inversa da matriz $\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix}$. É fácil de verificar que

$$\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix} = I$$

O cálculo da inversa referida dá-nos assim na última linha, a solução desejada. Da decomposição em matrizes triangulares de

$$\begin{bmatrix} C & D \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & Y \\ O & I \end{bmatrix}$$

resulta que

$$\begin{bmatrix} C^* & O \\ D^* & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & O \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B^* & O \\ Y^* & I \end{bmatrix}^{-1}$$

e portanto que

$$\begin{bmatrix} B^* & O \\ Y^* & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix} = $$
$$= \begin{bmatrix} A^* C^{*-1} & O \\ X^* & I \end{bmatrix}$$

Esta última matriz dar-nos-á, também, na última linha a solução pedida.

Decomposição dum sistema de equações

Como ANDERSEN mostrou o número de operações necessárias para resolver um sistema de equações lineares é sensìvelmente proporcional ao cubo do número de incógnitas (*). Como consequência será muito morosa a resolução de sistemas com mais de meio cento de incógnitas. Por outro lado a resolução de tais sistemas por meio de calculadores electrónicos torna-se difícil por necessitar a utilização de programações que em geral não estão construidas.

Estas razões levam-nos à pesquisa de métodos de decomposição do sistema de equações, noutros de menor número de incógnitas de tal forma que passa a ser possível quer a utilização de programações para a resolução de sistemas com um menor número de incognitas quer a distribuição do trabalho por uma equipe de calculadores.

A possibilidade de utilizar tais métodos é consequência de, em geral, as equações dos sistemas a resolver terem muito poucas incógnitas cada uma, (ou por outras palavras, a matriz do sistema ter muitos zeros).

Admitiremos que a matriz do sistema tem a forma

$$(7') \qquad C = \begin{bmatrix} S_1 & P_1 & 0 & 0 \\ Q_2 & S_2 & P_2 & 0 \\ 0 & Q_3 & S_3 & P_3 \\ 0 & 0 & Q_4 & S_4 \end{bmatrix}$$

em que S_1, S_2, S_3, e S_4 são matrizes quadradas (havendo vantagem em que as matrizes S_2 e S_3 sejam de pequena ordem).

Há vários métodos para decompor o sistema (1′) quando a matriz é da forma (7′). Os mais importantes são os de BOLTZ e os de PRANIS PRANIEWICH.

BOLTZ dá-nos dois métodos de decomposição ambos baseados no cálculo das matrizes inversas

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 \\ Q_2 & S_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_3 & P_3 \\ Q_4 & S_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

as quais podem ser determinadas simultaneamente por dois calculadores.

Multiplicando à esquerda o sistema (1′), em que C é dado por (7′), pela matriz

(*) A resolução pelo método de CRAMER levaria a cerca de n^4 operações.

$$(8') \quad R_1 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \end{bmatrix}$$

somos conduzidos ao sistema equivalente

$$(9') \quad \begin{bmatrix} I & 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & I & Z_2 & 0 \\ 0 & Z_3 & I & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_1 \\ D'_2 \\ D'_3 \\ D'_4 \end{bmatrix}$$

em que $Z_1 = B \cdot P_2$, $Z_2 = D \cdot P_2$, $Z_3 = E \cdot Q_3$ e $Z_4 = G \cdot Q_3$. BOLTZ chama a estes coeficientes os correlativos de ligação.

O sistema não simétrico, (9'), pode agora ser resolvido nas variáveis X_2 e X_3 e, em seguida, por substituição, nas variáveis X_1 e X_4. É nisso que consiste o método de substituição de BOLTZ. Se designarmos por $\begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{bmatrix} I & Z_2 \\ Z_3 & I \end{bmatrix}$ o sistema (9') resolver-se-á multiplicando consecutivamente à esquerda pelas matrizes

$$(10') \quad R_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & N & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & -Z_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -Z_4 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Caso se deseje determinar a inversa da matriz C, ela ser-nos-á dada por

$$C^{-1} = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 .$$

Porém a não ser que esta seja explicitamente pedida não é preciso calculá-la para resolver o sistema de equações lineares.

As matrizes Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4 são soluções das equações matriciais

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 \\ Q_2 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} S_3 & P_3 \\ Q_4 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que as matrizes incógnitas e termos independentes têm o mesmo número de linhas e colunas. Por decomposição em matrizes triangulares das matrizes

$$\begin{bmatrix} S_1 & P_1 & 0 & D_1 \\ Q_2 & S_2 & P_2 & D_2 \\ 0 & P_2 & I & 0 \\ D_1 & D_2 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} S_3 & P_3 & Q_3 & D_3 \\ Q_4 & S_4 & 0 & D_4 \\ Q_3 & 0 & I & 0 \\ D_3 & D_4 & 0 & I \end{bmatrix}$$

determinam-se os Z e os D'.

Este método de decomposição dum sistema de equações lineares com um grande número de incógnitas é válido para sistemas simétricos e não simétricos. Porém, no caso de sistemas simétricos há a possibilidade de utilizar outros métodos que simplificam o cálculo. Os mais importantes são o de desenvolvimento de BOLTZ e o de PRANIS PRANIEWICH.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. MARCHAND, *La compensation des mesures surabondantes.*

[2] LEVALOIS, *Compensation des réseaux géodésiques par la métode des gisements*, Bol. de géodésie (1947).

[3] E. ANDERSEN, *Solution of great systems of normal equations*, Bol. de géodésie (1950).