Mecânica Estatística

I — *Princípios fundamentais*

A) Teorema de Liouville
B) Entropia e os conjuntos microcanómicos
C) Funções termodinâmicas e conjuntos canómicos
D) Distribuições de Fermi-Dirac
E) Distribuições de Boose-Einstein
F) Mecânica estatísrica quântica

II — *Processos estocásticos*

III — *Teoria do Transporte*

Para a realização desta e de outras actividades consequentes muito deseja e espera o Centi da valiosa colaboração com a Indústria Portuguesa, nomeadamente com as empresas e entidades já contactados.

A Direcção do CENTI

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1961.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

5546 — 1) Dada a cónica definida pela equação $x^2 = -8y$, estude esse lugar e ache a área do triângulo formado pelas tangentes à curva tiradas do ponto $(8, 0)$ e a recta que une os dois pontos de tangência.

Escreva a equação das tangentes.

R: *A cónica* $x^2 = -8y$ *ou* $y = -\frac{1}{8}x^2$ *é uma parábola cujo eixo é o eixo dos* yy, *de vértice na origem e existindo toda ela no 3.º e 4.º quadrantes. A equação geral das rectas que passem pelo ponto* $(8, 0)$ *é* $y = m(x - 8)$, *e duas delas serão tangentes à curva. Para determinar os valores de* m *correspondentes procuraremos os valores de* m *para os quais as rectas da família tem um único ponto de comum com a curva. Teremos então* $m(x-8) = -\frac{1}{8}x^2$ *ou* $x^2 + 8mx - 64m = 0$; *e para que esta equação tenha uma raiz dupla deverá ser* $(8m)^2 + 4 \times 64m = 0$, *equação cujas raizes são* $m = 0$ *e* $m_2 = -4$. *As equações das tangentes são então* $y = 0$ *e* $y = -4x + 32$. *Os pontos de contacto são* $(0, 0)$ *e* $(16, -32)$. *O triângulo tem como base o segmento do eixo dos* xx *compreendido entre a origem e o ponto de abcissa* 8 *e tem, portanto, por medida* 8. *A altura será então, em valor absoluto, a ordenada do ponto* $(16, -32)$ *e a área do triângulo é* $S = \frac{1}{2} \times 32 \times 8 = 126$ *unidades de área.*

2) Justifique a igualdade

$$\overset{m+1}{A}_p = p!\,\overset{m}{C}_{p-1} + \overset{m}{A}_p$$

e calcule m para $p = 3$, sabendo $\overset{m}{C}_{p-1} = 10$.

R: $$p!\,{}^mC_{p-1} + {}^mA_p = p! \times \frac{m!}{(p-1)!\,(m-p+1)!} + \frac{m!}{(m-p)!} = \frac{p \times m! + m!\,(m-p+1)}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,[p + (m-p+1)]}{(m-p+1)!} = \frac{m!\,(m+1)}{(m+1-p)!} = {}^{m+1}A_p$$

c. q. j.

Se $p = 3$ *e* ${}^mC_{p-1} = 10$ *teremos:* ${}^{m+1}A_3 = 3! \times 10 + {}^mA_3$ *ou* $(m+1)\,m\,(m-1) = 6 \cdot 10 + m\,(m-1)\,(m-2)$ *ou* $m\,(m-1)\,[(m+1)-(m-2)] = 60$ *ou* $m^2 - m - 20 = 0$, *o que dá* $m = 5$.

3) O que entende por $y = a^x$ com $a > 0$ e $x \neq 1$?

Como varia essa função com x para $0 < a < 1$?

Ache a função inversa da função

$$y = 3^{2 - \frac{x}{3}}.$$

R: $y = a^x$, *com* $a > 0$, *representa a função exponencial de base* a, *cujo domínio é constituido por todos os números reais. É uma função contínua. Quando*

$a > 1$, *a função é crescente, tende para* $+\infty$, *se* $x \to +\infty$ *e tende para zero, se* $x \to -\infty$. *Quando* $0 < a < 1$, *a função é decrescente, tende para zero, se* $x \to +\infty$ *e tende para* $+\infty$, *se* $x \to -\infty$.

Para obter a função inversa de $y = 3^{2-\frac{x}{3}}$, *considera-se* $2 - \frac{x}{3} = \log_3 y$ *donde* $x = 6 - 3\log_3 y$.

4) **A soma de dois números inteiros é 26 e o seu menor múltiplo comum é 60. Ache os dois números.**

R: *Sejam* $a + b = 26$ *e* $m.\ m.\ c.\ (a\,;b) = m = 60$.
Sabe-se que $m.\ d.\ c\ (a\,;b) = m.\ d.\ c.\ (a+b\,;m)$.
Isto é, $m.\ d.\ c.\ (a\,;b) = m.\ d.\ c.\ (26\,;60) = 2$.
Como $a = 2\cdot q$ *e* $b = 2\cdot q'$, *em que* q *e* q' *são primos entre si, vem:* $a + b = 2q + 2q' = 2(q+q')$.
E $26 = 2\cdot(q+q')$, *donde* $q + q' = 13$.
Mas, $13 = 3 + 10$ *(primos entre si única decomposição que satisfaz ao m. m. c. dado).*
Então, $a = 2 \times 3 = 6$ *e* $b = 2 \times 10 = 20$.

5) **Calcule os valores de α e β sabendo que**

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2}.$$

R:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \\ \cos(\alpha-\beta) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \cos 2\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \qquad 2\beta = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad \beta = K\pi \pm \frac{\pi}{6} \qquad \begin{cases} para\ \beta = +\dfrac{\pi}{6} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sabemos que $\begin{cases} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{cases}$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \times \cos(\alpha-\beta) = \frac{2}{16}(3-1) = \frac{1}{4}$$

$$(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha +$$

$$+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + (-1)^k\pi$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{2} \to \quad para \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$para\ \beta = -\frac{\pi}{6} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha +$$

$$+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \to \textit{solução que não serve.}$$

6) **Justifique a expressão da derivada de uma função composta.**

R: *Seja* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$. *Reconhece-se imediatamente que é* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$, *e daqui resulta*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x};$$ *e como* Δx *e* Δu *são infinitésimos simultâneos* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$.

Ponto n.º 2

5547 — 1) São dadas duas circunferências: uma de raio 2 e de centro $(3,-2)$ e outra passando pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(2,4)$.

Escreva a equação dessas duas circunferências e a equação da recta perpendicular a meio do segmento que une os dois centros.

R: *Usando a equação* $(x-\alpha)^2+(y-\beta)=R^2$, *a primeira circunferência será definida analìticamente por* $(x-3)^2+(y+2)^2=4$ *ou* $x^2+y^2-6x+4y+9=0$. *Para obtermos a equação da outra podemos usar* $x^2+y^2+dx+ey+f=0$. *Como os pontos dados têm de pertencer à circunferência, teremos o sistema:* $f=0$, $36+6e+f=0$ *e* $4+16+2d+4e+f=0$. *Resolvendo-o, temos:* $d=2$, $e=-6$, $f=0$. *Então* $x^2+y^2+2x-6y=0$ *será a segunda equação. Coordenadas do centro desta última circunferência:* $(-1,3)$. *Coordenadas do ponto médio do segmento dos centros:* $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. *Coeficiente angular da recta definida pelos dois centros:* $m=-\frac{5}{4}$. *Equação da recta pedida:* $y-1=\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *ou* $4x-5y+3=0$.

2) O que entende por símbolo de impossibilidade? Haverá valores de x que dêem ao produto

$$(x^3-x^2+3x-3)\cdot\frac{x-2}{x^2-1}$$

a forma de uma indeterminacão? Se sim, qual o valor do produto para esses valores de x?

R: *Os zeros de* x^2-1 *são* ± 1. *Ora* $x=1$ *dá ao produto referido a forma indeterminada* $0\times\infty$. *Procuremos o verdadeiro valor do produto dado para este valor de* x. *Para isso escrevamo-lo com a forma de fracção, factorizemos os dois termos e simplifiquemo-la:* $\frac{(x-1)(x^2+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x^2+3)(x-2)}{x+1}$. *Teremos:* $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)(x-2)}{x+1}=-2$, *valor do produto.*

3) Prepare para o cálculo logarítmico a expressão numérica

$$\frac{a^3\sqrt{b}}{c\sqrt{\frac{d}{e}}}.$$

Diga como varia com x a função $y=\log_a x$ para $a>1$.

Como muda da base a para outra b?

R: *Se representarmos por* X *o valor da expressão, teremos:* $\log X=3\cdot\log a+\frac{1}{2}\cdot\log b+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{colog} d+\frac{1}{2}\log e$. *A função logarítmica de base* a, $y=\log_a x$, *quando* $a>1$, *é uma função crescente e contínua; tende para* $+\infty$, *quando* $x\to+\infty$ *e tende para* $-\infty$, *se* $x\to 0$, *podendo tomar qualquer valor entre* $-\infty$ *e* $+\infty$. *Adquire um valor positivo, nulo ou negativo, conforme* $x>1$, $x=1$ *ou* $x<1$.

A mudança da base a *para outra* b, *faz-se por intermédio da fórmula de transformação*

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

4) Escreva no sistema de base 4 o número 431 do sistema decimal.

R: $431_{(10)}\equiv 12233_{(4)}$

$$\begin{array}{lllll}
431 & \underline{\vert\,4} & & & \\
031 & 107 & \underline{\vert\,4} & & \\
3 & 27 & 26 & \underline{\vert\,4} & \\
 & 3 & 2 & 6 & \underline{\vert\,4} \\
 & & & 2 & 1
\end{array}$$

5) Calcule o valor da expressão

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

sabendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

R: *Consideremos* α *do 1.º quadrante. Será* $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$. *A expressão* $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, *dá* $tg^2\alpha=\frac{1}{5}$. *Então, para a expressão dada virá* $\frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$.

6) O que entende por números complexos conjugados? Exemplifique.

R: *São dois complexos que têm as partes reais iguais e as partes imaginárias simétricas. Por exemplo,* $2-3i$ *e* $2+3i$.