MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 1.ª Chamada — 8-2-1962.

5548 — 1) Seja E um conjunto e seja $(A_i)_{i\in I\neq\emptyset}$ uma família de partes de E.

a) Defina $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$.

b) Nas hipóteses: $E=R\times R$; $I=[0,1]$; $A_i=\{(\alpha,\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant 1+i\}$, $i\in I$, quais os conjuntos $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$?

2) Seja E um conjunto não vazio e ρ uma relação definida em E.

a) Represente, na linguagem da Lógica simbólica, as proposições: «ρ é anti-simétrica»; «ρ não é anti-simétrica».

b) Considere as proposições:

$$P_1=\underset{x\in E}{\exists}\ \underset{y\in E}{\forall}\ (y\,\rho\,x\Rightarrow y=x)\,;$$

$$P_2=\underset{u\in E}{\forall}\ \underset{v\in E}{\exists}\ (v\neq u\wedge v\,\rho\,u)\,.$$

Que sabe sobre os valores lógicos de $P_1\vee P_2$ e $P_1\wedge P_2$? Justifique. Supondo que ρ é uma relação de ordem, que significa ser P_i, $i=1,2$, verdadeira?

3) Enuncie o teorema da condensação de Cauchy e, em seguida, aplique-o, mostrando a legitimidade dessa aplicação, à série $\sum_{n\in N} 1/n^{1+1/2}$.

4) Seja f a função real definida em $E=[0,1[\,\bigcup\,]1,2]$ cujo valor no ponto $x\in[0,1[$ é 1 e cujo valor no ponto $x\in\,]1,2]$ é 2.

a) Represente f. Considere a proposição «qualquer que seja $a\in E$, f tem limite $f(a)$ no ponto a». Indique, de preferência simbòlicamente, duas proposições cuja conjunção seja a proposição referida e verifique que elas são verdadeiras.

b) f é pois contínua. f terá algum prolongamento contínuo a $[0,2]$? Justifique a resposta exclusivamente à custa do teorema de Bolzano-Cauchy.

5) f é uma função real definida em R, contínua e com limite $+\infty$ nos pontos $+\infty$ e $-\infty$.

a) Mostre que $f(R)$ é minorado.

b) Mostre que o ínfimo de $f(R)$ pertence a $f(R)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 17-2-1962.

Ponto n.º 1

5549 — 1) Seja I um conjunto não vazio e ρ uma relação de ordem definida em I, relativamente à qual há primeiro elemento, notado u_0, e há último elemento, notado u_1.

a) Qual o conjunto dos majorantes (minorantes) de I? I tem supremo (ínfimo)? Justifique as respostas.

b) Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de um conjunto F tal que: se $i\,\rho\,j$, então $A_i\supset A_j$. Quais os conjuntos $\bigcup_{i\in I} A_i$ e $\bigcap_{i\in I} A_i$? Justifique.

2) Seja E um conjunto não vazio e seja ρ uma relação definida em E.

a) Escreva, na linguagem da Lógica simbólica, as proposições: «ρ é simétrica»; «ρ não é transitiva».

b) Supondo que ρ é reflexiva, mostre que é 1 o valor lógico da proposição $P_1\Rightarrow P_2$, com:

$$P_1=\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{y\in E}{\forall}\ (x\,\rho\,y\vee y\,\rho\,x)\,;$$

$$P_2=\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{y\in E}{\forall}\ \underset{z\in E}{\exists}\ (x\,\rho\,z\wedge y\,\rho\,z)\,.$$

3) Enuncie o critério de d'Alembert e, em seguida, aplique-o à série $\sum_{n\in N} a_n$, com: $a_{2n-1}=2^{-n}\,3^{-n}$ $(n\in N)$; $a_{2n}=2^{-n-1}\,3^{-n}$ $(n\in N)$.

4) Seja f uma função real definida em R.

a) Indique, de preferência simbòlicamente, duas proposições cuja conjunção seja a proposição «f é contínua»; verifique que elas são verdadeiras na hipótese de ser verdadeira a proposição «existe $\alpha \geqslant 0$ tal que, quaisquer que sejam $x \in R$ e $y \in R$, é $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$».

b) Supondo que $f(x) = |x|$, qualquer que seja $x \in R$, represente f e verifique que f possui a propriedade referida na alínea a).

5) Sejam f e g funções reais definidas em R e cujas restrições a Q são iguais: $f_{|Q} = g_{|Q}$. Mostre que $f = g$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — **(Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 17-2-1962.**

Ponto n.º 2

5550 — 1) Sejam E e F conjuntos não vazios e seja f uma aplicação de E em F.

a) Defina: gráfico de f; $f(A)$, $A \in P(E)$; $\overset{-1}{f}(B)$, $B \in P(F)$.

b) Diga quais os elementos de $F(E, F)$ na hipótese: $E = F = \{1, 2, 3\}$.

2) Seja $(E, +, \cdot)$ um corpo e seja $\leqslant$ uma relação de ordem total definida em E.

a) Traduza, para a linguagem da Lógica simbólica, as proposições:

$P_1 =$ «se $x \leqslant y$, então $x + z \leqslant y + z$, para todo o $z \in E$»;
$P_2 =$ «se $0 \leqslant x$ e $0 \leqslant y$, então $0 \leqslant x \cdot y$».

b) Supondo que $P_1 \wedge P_2$ é verdadeira, isto é, $(E, +, \cdot, \leqslant)$ é corpo ordenado, mostre que é 1 o valor lógico de cada uma das proposições:

$$\underset{x \in E}{\forall} \; \underset{y \in E}{\forall} \; \underset{z \in E}{\forall} \; (x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z)$$

$$\underset{x \in E}{\forall} \; \underset{y \in E}{\forall} \; (x < y \Rightarrow \underset{z \in E}{\exists} \; x < z < y).$$

3) Exprima, de preferência simbòlicamente, que «$\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in N}$ não converge para zero» e verifique, à custa do que disse, que assim é.

4) Seja E um conjunto não vazio e sejam f e $(f_n)_{n \in N}$, respectivamente, uma função real definida em E e uma sucessão de funções reais definidas em E.

a) Indique, de preferência simbòlicamente, o significado do que segue:

«$(f_n)_{n \in N}$ converge para f»; «$(f_n)_{n \in N}$ converge uniformemente para f».

b) Nas hipóteses: $E = R$; $f(x) = 0$, qualquer que seja $x \in R$; $f_n(x) = x/n$, qualquer que seja $x \in R$ e qualquer que seja $n \in N$, responda ao seguinte: represente f e f_n; escreva uma proposição P tal que a conjunção de P e da proposição verdadeira(!) «qualquer $x \in R$ é ponto de acumulação de R» seja a proposição «f é contínua» e verifique que P é verdadeira atendendo à sua construção (de preferência escrever P simbòlicamente).

5) Seja f uma função real definida em R, monótona e cujo contradomínio é um intervalo. Mostre que f é contínua.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — **(Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 2.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 15-5-1962.**

Ponto n.º 1

5551 — 1) Seja $f \in F(R - \{0\}, R)$ assim caracterizada: $f(x) = 1$.

a) Verifique que f é contínua (use a definição).
b) Verifique que f é derivável (use a definição).

c) Seja $a \in R$ e seja $\bar{a}$ o prolongamento de f a R assim caracterizado: $\bar{a}(0) = a$. A função $\bar{a}$ é contínua no ponto 0? Justifique a resposta.

2) Seja $f \in F(R, R)$.

a) Dê o significado do que segue: «f é estritamente monótona no ponto 0».

b) Na hipótese: existe Df e $0 \notin (Df)(R)$, verifique que f é estritamente monótona no ponto 0.

3) Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in m_{3,3}(R)$.

a) Notando f a aplicação linear de R^3 em R^3 cuja matriz é A, diga qual a imagem de

$(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ por f.

b) Na hipótese: $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $c \neq 0$, diga qual o contradomínio de f e caracterize a aplicação $g \in L(R^3, R^3)$, através da sua matriz, tal que a matriz de $f \circ g$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Seja $f \in F(R, R)$ nas hipóteses seguintes: existem Df, D^2f e D^3f; $Df(0) = D^2f(0) = D^3f(0) = 0$; D^3f é derivável no ponto 0 e $(D^3f)'(0) \in R^+ \cup \{+\infty\}$. Mostre que f tem mínimo estrito no ponto 0.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — 2.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 15-5-1962.

Ponto n.º 2

5552 — Seja $f \in F(R, R)$ assim caracterizada: $f(x) = -2x$.

a) Verifique que f é contínua (use a definição).

b) Verifique f é derivável (use a definição).

2) Seja $a \in R$ e seja $\bar{a} \in F(]0,2], R)$ assim caracterizada:

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1 - ax & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 - 2a + ax & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

a) Verifique que $\bar{a}$ é contínua no ponto 1.

b) Verifique que $\bar{a}$ tem extremo relativo no ponto 1; qualifique-o.

c) Notando $\dot{a}$ o prolongamento contínuo de $\bar{a}$ a $[0, 2]$, diga qual o valor de $\dot{a}$ no ponto 0 e diga, justificando, se $\dot{a}$ está nas hipóteses do teorema de Rolle.

3) Seja $f \in F(R^2, R^2)$ assim caracterizada: $f(x, y) = (x, x + y)$.

a) Verifique que f é linear e diga qual a matriz de f.

b) Caracterize $g \in L(R^2, R^2)$ tal que $g \circ f = I$, $I(x, y) = (x, y)$.

4) Seja $f \in F(R, R)$ tal que é verdadeira a proposição:

$$\text{«} \underset{k \in R_0^+}{\exists} \; \underset{x \in R}{\forall} \; \underset{y \in R}{\forall} \; (|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^2) \text{»}$$

Mostre que f é constante.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 1.ª Chamada — 19-6-1962.

5553 — Enuncie o critério de Cauchy; seguidamente aplique-o à série gerada pela sucessão $(a_n)_{n \in N}$, com $a_{2n} = 0$ e $a_{2n-1} = 1/(2n)^{2n-1}$, $n \in N$.

2) Seja $R - \{0\} \xrightarrow{f} R$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a) Com $\alpha \in R^+$, diga qual o conjunto $f(\overline{U}(0, \alpha))$.

b) Escreva duas proposições, de preferência simbòlicamente, cuja conjunção seja a proposição «f tem limite 0 no ponto 0» e verifique que são verdadeiras.

3) Seja $R \xrightarrow{f} R$ nas condições seguintes: existem Df e D^2f; $0 \notin D^2f(R)$.

a) Mostre que Df é estritamente monótona.

b) Mostre que o conjunto dos pontos nos mais f tem extremo relativo é $\overset{-1}{D}f(\{0\})$.

4) Sejam f e g funções reais definidas em $X \subset R$ e contínuas. Mostre que $X \xrightarrow{h} R$, $h(x)$ notando o ínfimo do conjunto $\{f(x)\} \cup \{g(x)\}$, é contínua.

5) Sejam A, B, C pontos não colineares.

a) Fórmulas de passagem do referencial

$$(A; B - A = \vec{i}, C - A = \vec{j})$$

para o referencial $(C; B - C = \vec{i}', A - C = \vec{j}')$.

b) Equação cartesiana e equações paramétricas, no referencial $(A; \vec{i}, \vec{j})$, da recta [do plano ABC] que passa por C e é perpendicular à recta BC.

6) Sejam O, U, V, W pontos não-coplanares e considere o referencial

$$(O; U - O = \vec{i},\ V - O = \vec{j},\ W - O = \vec{k}).$$

a) São dadas as rectas $\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e $x = y = z$ e os planos $x = 0$ e $y = 0$; equações cartesianas e equações paramétricas de recta que é coplana àquelas rectas e é paralela àqueles planos.

b) Fórmulas de passagem do referencial dado para o referencial $(O'; A - O' = \vec{i}', B - O' = \vec{j}', C - O = \vec{k}')$, com $O' - O = \vec{i} + \vec{j}$, $A - O' = -\vec{i} + \vec{j}$, $B - O' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $C - O' = \vec{k}$.

Nota: Dos exercícios V e VI, resolver apenas um.

R: 1) *Seja* $\sum_{n \in N} a_n$ *uma série de termos não-negativos; se existir* $r \in [0, 1[$ *tal que* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant r$, $n \in N$, *a série* $\sum_{n \in N} a_n$ *é convergente.*

Aplicação. *Com* $a_{2n} = 0$ *e* $a_{2n-1} = 1/(2n)^{2n-1}$, $n \in N$, *virá* $\sqrt[2n]{a_{2n}} = 0$ *e* $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = 1/2n$, $n \in N$; *logo* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1/2$, $n \in N$.

R: 2) *a*) $\overline{U}(0, \alpha) = U(0, \alpha) - \{0\}$; $U(0, \alpha) =]-\alpha, \alpha[$; $f(\overline{U}(0, \alpha)) = [0, 3\alpha[$.

b) $P_1 = \underset{\alpha \in R^+}{\forall} R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha) \neq \emptyset$;

$P_2 = \underset{\beta \in R^+}{\forall} \underset{\alpha \in R^+}{\exists} f(R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha)) \subset U(0,\beta)$.

P_1 *é verdadeira:* $R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\alpha) = \overline{U}(0,\alpha) \neq \emptyset$!
P_2 *é verdadeira: para cada* $\beta \in R^+$, *tome-se* $\alpha = \beta/3$.

R: 3) *a) Das hipóteses resulta que* $R \xrightarrow{Df} R$ *é contínua e biunívoca; é pois estritamente monótona* [*observe-se que o domínio de* Df *é um intervalo!*].

b) Como f *é finitamente derivável e o seu domínio é igual ao seu interior, o conjunto dos pontos nos quais* f *tem extremo relativo está contido em* $\overset{-1}{Df}(\{0\})$.

1.ª hipótese: $\overset{-1}{Df}(\{0\}) = \emptyset$. *Nada há a demonstrar!*

2.ª hipótese: $\overset{-1}{Df}(\{0\}) \neq \emptyset$. *Este conjunto será então constituido por um só elemento, que notamos* a; *supondo* Df *estritamente crescente, é* $Df(]a, \to[) \subset R^+$ *e* $Df(]\leftarrow, a[) \subset R^-$; *logo* f *tem mínimo relativo estrito no ponto* a, *como mostra o teorema da média de* Lagrange *aplicado às restrições* $f|[a,x]$, $a < x < a+1$, *e* $f|[x,a]$, $a - 1 < x < a$.

R: 4) *Bastará mostrar que é verdadeira a proposição:*

$$«\underset{a \in X}{\forall} \underset{\varepsilon \in R^+}{\forall} \underset{\delta \in R^+}{\exists} h(U(a,\delta) \cap X) \subset U(h(a),\varepsilon)».$$

1.ª hipótese: $f(a) = g(a)$; *então* $h(a) = g(a)$; *imediato!*

2.ª hipótese: $f(a) \neq g(a)$; *seja* $f(a) > g(a)$; *então* $h(a) = g(a)$. *Pela continuidade de* f *e* g *no ponto* a, *existe* $\alpha \in R^+$ *tal que* $f(x) > g(x)$, *para qualquer* $x \in U(a,\alpha) \cap X$; *logo* $h(x) = g(x)$, *para qualquer* $x \in U(a,\alpha) \cap X$. *A conclusão é agora imediata!*

R: 5) *a) Coordenadas de* C: $(0,1)$ — *no referencial* $(A; \vec{i}, \vec{j})$;

Componentes de $\vec{i'}$: $(1,-1)$ — *na base* $(\vec{i}, \vec{j})$;
Componentes de $\vec{j'}$: $(0,-1)$ — *na base* $(\vec{i}, \vec{j})$.

Fórmulas de passagem: $\begin{cases} x = x' \\ y = 1 - x' - y' \end{cases}$

b) equação cartesiana: $(\vec{i} - \vec{j}) \mid (x\vec{i} + (y-1)\vec{j}) = 0$
ou $(\vec{i} \mid \vec{i} - \vec{i} \mid \vec{j})x + (\vec{i} \mid \vec{j} - \vec{j} \mid \vec{j})y = \vec{i} \mid \vec{j} - \vec{j} \mid \vec{j}$

equações paramétricas: $\begin{cases} x = (\vec{j} \mid \vec{j} - \vec{i} \mid \vec{j})\lambda \\ y = 1 + (\vec{i} \mid \vec{i} - \vec{i} \mid \vec{j})\lambda \end{cases}$

R: 5) *a) Parâmetros directores da recta* $x = y = 0$: $0, 0, 1$.

$$\alpha(x + y - 2) + \beta z = 0;\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0;$$
$$\alpha = 1 \ e \ \beta = 0$$
$$\alpha'(x - y) + \beta'(x - z) = 0;$$
$$(\alpha' + \beta') \cdot 0 + (-\alpha') \cdot 0 + (-\beta') \cdot 1 = 0;\ \alpha' = 1 \ e \ \beta' = 0$$

equações cartesianas $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Nota: *Imediatamente se poderiam escrever as equações* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$, *atendendo aos dados do problema!*

b) Fórmulas de passagem $\begin{cases} x = 1 - x' + y' \\ y = 1 + x' + y' \\ z = y' + z' \end{cases}$

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 2.ª Chamada — 22-6 1962.

5554 — Seja $(a_n)_{n \in N}$ uma sucessão real e seja $(b_n)_{n \in N}$ a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n \in N} a_n$. Como sabe, as expressões «a série $\sum_{n \in N} a_n$ é convergente», «a sucessão $(b_n)_{n \in N}$ é convergente» e «a sucessão $(b_n)_{n \in N}$ é regular» são sinónimas. Indique o significado das duas últimas e através disso conclua o seguinte: a serie $\sum_{n \in N} \operatorname{sen}(\pi n)$ é convergente; a série $\sum_{n \in N} (-1)^n$ não é convergente.

2) Seja $R - \{0\} \xrightarrow{f} R$ assim condicionada: $f(x) = 2x + 2$ se $x > 0$; $f(x) \leqslant 1$ se $x < 0$. Diga qual o conjunto $\overset{-1}{f}(]1,3[)$ e diga, para cada $\alpha \in R^+$, qual o conjunto $f(]0,\alpha[)$. Seguidamente verifique que são verdadeiras as proposições:

$$\underset{\alpha \in R^+}{\exists} \underset{\beta \in R^+}{\forall} f(R - \{0\} \cap \overline{U}(0,\beta)) \not\subset U(2,\alpha)$$

$$\underset{\alpha \in R^+}{\forall} \underset{\beta \in R^+}{\exists} f(R - \{0\} \cap]0, \to[\cap \overline{U}(0,\beta)) \subset U(2,\alpha).$$

3) Seja $[0, \to[\xrightarrow{f} R$ assim condicionada: é indefinidamente derivável; $D^n f(0) = 1$, qualquer que seja $n \in N$; $O \notin D^n f([0, \to[)$, qualquer que seja $n \in N$.

a) Verifique que, para qualquer $n \in N$ e qualquer $x \in]0, \rightarrow[$, é:

$$f(x) > f(0) + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

b) Para cada $n \in N$, diga quais os pontos nos quais $D^n f$ tem extremo relativo.

4) Sejam $a \in R$ e $b \in R$ com $a < b$ e seja $[a, b] \xrightarrow{f} R$ nas condições seguintes: é contínua; tem limite $-\infty$ no ponto b; é estritamente crescente no ponto a. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que f tem máximo relativo no ponto c.

5) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *não mètricamente fixado.*

a) Componentes de um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ normal ao plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

b) Equações cartesianas e equações paramétricas da normal comum às rectas $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, na hipótese: $\|\vec{i}\| = 2$; $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$; $\sphericalangle(\vec{i}, \vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j}, \vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i}, \vec{k}) = \pi/2$.

6) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e as famílias de rectas: $r_\lambda\ (\lambda \in R)$ $\begin{cases} y + z = \lambda \\ x = \lambda(y - z) \end{cases}$;

$$s_\mu\ (\mu \in R) \begin{cases} y - z = \mu \\ x = \mu(y + z) \end{cases}.$$

a) Equações cartesianas das rectas r'_λ e s'_μ que passam pela origem e são paralelas, respectivamente, a r_λ e s_μ. Seguidamente indique as coordenadas dos pontos de r'_λ e de s'_μ que têm ordenada 1 e aproveite-as para concluir que r_λ e s_μ não são paralelas.

b) Fórmulas de passagem do referencial dado para um qualquer referencial cujos novos eixos sejam:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (eixo das abcissas)};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ (eixo das ordenadas)};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ (eixo das cotas)}.$$

Nota: Dos exercícios V e VI, resolver apenas um.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 1.ª chamada — 1-10-1962.

5555 — 1) Considere um referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e os pontos $A = (0, 2, 1)$ e $B = (2, 4, 3)$.

a) Suponha $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ mètricamente fixado como se indica: $(\alpha, \beta, \gamma) \mid (\alpha', \beta', \gamma') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$. Escreva fórmulas de passagem de $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ para um qualquer dos referenciais orto-normados nas condições seguintes: o eixo das abcissas é a recta AB e o eixo das ordenadas passa por O.

b) Suponha $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ mètricamente fixado como se indica: $(\alpha, \beta, \gamma) \mid (\alpha', \beta', \gamma') = \alpha(2\alpha' + \beta') + \beta(\alpha' + 2\beta') + \gamma\gamma'$; resolva o mesmo problema da alínea *a*).

2) Seja u a aplicação linear de R^2 em R^2 assim caracterizada: $u(1, 0) = (1, 5)$; $u(0, 1) = (2, 4)$. Determine os elementos do conjunto:
$S(u) = \{\lambda \in R \mid \text{existe } x \in R^2 - \{(0,0)\} \text{ tal que } u(x) = \lambda x\}$.

3) Seja $(u_n)_{n \in N}$ uma sucessão real nas condições seguintes: existe $r \in [0, 1[$ tal que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant r\,|u_{n+1} - u_n|$, $n = 1, 2, \cdots$. A série $\sum_{n \in N} |u_{n+1} - n_n|$ é convergente? A sucessão $(u_n)_{n \in N}$ é convergente?

4) Seja $[0, 1] \xrightarrow{u} R$ nas condições seguintes: tem contradomínio contido em $[0, 1]$ e é contínua. Conclua que existe $x \in [0, 1]$ tal que $u(x) = x$.

5) Seja $[0, 1] \xrightarrow{u} R$ nas condições seguintes: é continuamente derivável e $Du(Q \cap [0, 1]) = \{0\}$. Conclua que $u([0, 1]) = \{u(0)\}$.

R: 1) *Seja* $(O'; \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ *um dos oito referenciais nas condições impostas; então, genèricamente, eles serão representados do modo seguinte:* $(O'; \rho\vec{i'}, \sigma\vec{j'}, \tau\vec{k'})$, $|\rho| = |\sigma| = |\tau| = 1$.

1.º *Equações paramétricas da recta* AB:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

2.º *Determinação de* O':

$$(\lambda, 2 + \lambda, 1 + \lambda) \mid (1, 1, 1) = 0 \begin{cases} a)\ \lambda \cdot 1 + (2 + \lambda) \cdot 1 + (1 + \lambda) \cdot 1 = 0; \\ \quad \lambda = -1;\ O' = (-1, 1, 0) \\ b)\ \lambda \cdot 3 + (2 + \lambda) \cdot 3 + (1 + \lambda) \cdot 1 = 0; \\ \quad \lambda = -1;\ O' = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

3.º *Determinação de* $\vec{i}'$:

a) $\vec{i}' = \dfrac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

b) $\vec{i}' = \dfrac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1)$

4.º *Determinação de* $\vec{j}'$:

a) $\vec{j}' = \dfrac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$

b) $\vec{j}' = \dfrac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$

5.º *Determinação de* $\vec{k}'$:

a) $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta \quad =0 \end{cases}$; $(1,1,-2)$;

$$\frac{(1,1,-2)}{\|(1,1,-2)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

b) $\begin{cases} 3\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta \quad =0 \end{cases}$; $(1,1,-6)$;

$$\frac{(1,1,-6)}{\|(1,1,-6)\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1,1,-6)$$

6.º *Fórmulas de passagem de* $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *para* $(O';\rho\vec{i}',\sigma\vec{j}',\tau\vec{k}')$ $(|\rho|=|\sigma|=|\tau|=1)$:

a) $$\begin{cases} x = -1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{3}}x' - \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{\tau}{\sqrt{6}}z' \\ y = 1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{\tau}{\sqrt{6}}z' \\ z = \dfrac{\rho}{\sqrt{3}}x' - \dfrac{2\tau}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x = -1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{7}}x' - \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{\tau}{\sqrt{42}}z' \\ y = 1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{7}}x' + \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{\tau}{\sqrt{42}}z' \\ z = \dfrac{\rho}{\sqrt{7}}x' - \dfrac{6\tau}{\sqrt{42}}z' \end{cases}$$

2) *Deverá procurar-se* $\lambda \in R$ *pela condição do sistema linear sobre* R *e nas incógnitas* x_1 *e* x_2:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases},$$

ter solução além da trivial. Virá

$$D\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0;$$

logo $S(u) = \{-1, 6\}$.

3) *Das hipóteses resulta que*

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant r^{n-1}|u_2 - u_1|, n \in N;$$

logo

$$\sum_{p=1,\dots,n} |u_{p+1} - u_p| \leqslant |u_2 - u_1| \sum_{p=1,\dots,n} r^{p-1}.$$

A série $\sum_{n\in N} |u_{n+1} - u_n|$ *é pois convergente; a série* $\sum_{n\in N} (u_{n+1} - u_n)$ *é também convergente e assim a sucessão* $(u_n)_{n\in N}$ *é convergente.*

4) *1.ª hipótese:* $u(0) = 0$ *ou* $u(1) = 1$. *Nada há a provar!*

2.ª hipótese: $u(0) \neq 0$ *e* $u(1) \neq 1$. *A função* $[0,1] \xrightarrow{v} R$, $v(x) = u(x) - x$, *é contínua e* $v(0)\,v(1) < 0$; *logo existe* $x \in]0,1[$ *tal que* $v(x) = 0$, *ou seja,* $u(x) = x$.

5) *Seja* $[0,1] \xrightarrow{v} R$, $v(x) = 0$. *Como* v *e* Du *são contínuas e têm a mesma restrição a* $Q \cap [0,1]$, $v = Du$. *É portanto* $Du([0,1]) = \{0\}$ *e assim* $u([0,1]) = \{u(0)\}$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — 2.ª Chamada — 4-10-1962.

5556 — 1) Considere um referencial $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e os pontos $A=(1,2,3)$, $B=(2,4,6)$, $C=(1,-2,1)$ e $D=(5,2,-5)$.

a) Suponha $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ e $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i},\vec{k}) = \pi/2$. Equações paramétricas e equação cartesiana do plano que passa pela recta AB e é perpendicular ao plano OCD.

b) Suponha $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \pi/3$ e $\sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{i},\vec{k}) = \pi/2$. Ângulo da recta AB com o plano OCD.

2) Sejam (a,b,c) e (l,m,n) pontos de R^3. Use o teorema de Rouché a fim de estudar a compatibilidade do sistema linear sobre R e nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} \quad -cy + bz = l \\ cx \quad -az = m \\ -bx + ay \quad = n \end{cases}$$

3) Considere a série real $\sum_{n\in N} a_n$, com $a_n = 1/n \log(2n)$. Enuncie o critérério da condensação de Cauchy e aplique-o à série dada.

4) Seja $[0,1] \overset{u}{\to} R$ nas condições seguintes: tem contradomíno contido em $[0,1]$ e, para quaisquer números *distintos* x e y de $[0,1]$, é $|u(x)-u(y)| < |x-y|$.

a) Verifique que u é contínua.

b) Por aplicação do teorema de Weierstrass à função $[0,1] \overset{v}{\to} R$, $v(x)=|u(x)-x|$, conclua que existe $x \in [0,1]$ tal que $u(x)=x$.

5) Seja $[0,1] \overset{u}{\to} R$ nas condições seguintes: é simétrica no ponto $\frac{1}{2}$, isto é, $u\left(\frac{1}{2}+x\right) = u\left(\frac{1}{2}-x\right)$, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; é derivável no ponto $\frac{1}{2}$. Calcule $u'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Enunciados e soluções dos n.^{os} 5548 a 5556 de Anibal Coimbra Aires de Matos

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de Frequência Ordinário — 23-6-1962.

I

5557 — 1) Estude a função $y=\log(x^2-3x+2)$.

2) Diga como separa os zeros de $f(x)$ por meio da sucessão de Rolle.

Discuta, consoante os valores do parâmetro k, a localização dos zeros de $f(x)=x^3-3x+k$.

3) Enuncie e demonstre o teorema sobre a diferenciabilidade de uma função composta.

Dada a função $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^4+y^4}$, $f(0,0)=0$, calcule $\lim\limits_{x=0}\lim\limits_{y=0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y=0}\lim\limits_{x=0} f(x,y)$ e $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} f(x,y)$.

A função é contínua em $(0,0)$? Porquê?

R: 1) a) *Domínio:* $]-\infty,1[$ *e* $]2,+\infty[$.
Pontos de descontinuidade: $1, 2$ e ∞.
Pontos de intersecção com os eixos:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\log 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

b) *Crescimento. Extremos*

$$y'=\frac{2x-3}{x^2-3x+2} \qquad \begin{array}{l} y'>0 \Rightarrow x>\dfrac{3}{2} \\ y'<0 \Rightarrow x<\dfrac{3}{2} \end{array}$$

A função é crescente em $]2,+\infty[$ *e decrescente em* $]-\infty,1[$. *Não tem extremos.*

c) *Convexidade. Pontos de inflexão.*

$$y''=\frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2}<0$$

e portanto a função é concava. Não há pontos de inflexão.

d) *Assíntotas:*

$$X=1 \ \ e \ \ X=2$$

2) $f'(x)=3x^2-3$ *e os zeros da primeira derivada são* $x_1=-1$ *e* $x_2=1$. *A sucessão de Rolle é*

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f(x)	$-$	$k+2$	$k-2$	$+$

e, em princípio, poderá ter-se

$k+2$	$k-2$	*Localização dos zeros*
$+$	$+$	$k>2$: *uma raiz em* $]-\infty,-1[$
$+$	$-$	$-2<k<2$: *uma raiz em* $]-\infty,1[$, *outra em* $]-1,1[$ *e outra em* $]1,+\infty[$
$-$	$-$	$k<-2$: *uma raiz em* $]1,+\infty[$
$-$	$+$	*Impossível*
0	$+$	*Impossível*
0	$-$	$k=-2$: *uma raiz igual a* -1 *e outra em* $]1,+\infty[$
0	0	*Impossível*
$+$	0	$k=2$: *uma raiz em* $]-\infty,-1[$ *e outra igual a* 1
$-$	0	*Impossível*

3) $\lim\limits_{x=0}\lim\limits_{y=0} f(x,y)=\infty$, $\lim\limits_{y=0}\lim\limits_{x=0} f(x,y)=0$. *Não existe pois* $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} f(x,y)$ *e assim* $f(x,y)$ *não é contínua em* $(0,0)$ *nem pode tornar-se contínua.*

II

5558 — 1) Sendo a e b dois números inteiros quaisquer e supondo que o polinómio real $g(x)$ tem raízes inteiras, prove que pelo menos um dos números $g(a), g(a+1), g(a+2), \cdots g(a+b-1)$ deve ser divisível por b.

2) Deduza a fórmula interpoladora de Lagrange $I(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}y_i$. Fazendo $x=hu+a$, $x_i=hu_i+a$ (a e h constantes) mostre que $I(x)=I(u)$.

3) Seja $AX=B$ um sistema de m equações lineares a n incógnitas e r a característica de A. Se fôr $r<m$, em que condições o sistema é possível determinado e possível indeterminado?

No caso em que $B=O_{m\times 1}$ e o sistema é indeterminado, o que entende por um sistema fundamental de soluções?

R: 1) *Se* $g(x)$ *admite a raíz inteira* $x = p$ *então*

$$g(a) = \overset{\bullet}{\overline{a-p}}$$
$$g(a+1) = \overset{\bullet}{\overline{a-p+1}}$$
$$g(a+2) = \overset{\bullet}{\overline{a-p+2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g(a+b-1) = \overset{\bullet}{\overline{a-p+b-1}}$$

e como os números $a-p, a-p+1, \cdots a-p+b-1$ *são* b *inteiros consecutivos um deles é divisível por* b *e, portanto, um dos números* $g(a), g(a+1), \cdots \cdots g(a+b-1)$ *é múltiplo de* b.

2) $$\varphi_i(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)_{j\neq i} = h^n \prod_{j=1}^{n}(u-u_j)_{j\neq i} = h^n \varphi_i(u)$$

$$\varphi_i(x_i) = h^n \prod_{j=1}^{n}(u_i-u_j)_{j\neq i} = h^n \varphi_i(u_i)$$

$$L_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} = \frac{h^n \varphi_i(u)}{h^n \varphi_i(u_i)} = \frac{\varphi_i(u)}{\varphi_i(u_i)} = L_i(u)$$

e portanto $I(x) = I(u)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de Frequência Extraordinário — 26-6-1962.

I

5559 — 1) Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente para que a recta $Y = mX + p$ seja assíntota da curva $y = f(x)$.

Mostre que a função $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ se pode escrever na forma $f(x) = 2x + 2 + \varphi(x)$ com $\lim\limits_{x=+\infty} \varphi(x) = 0$.

2) O polinómio $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5$ tem o zero $a = -1$. Mostre que o zero é duplo e demonstre a proposição em que basear a resposta.

Qual é o polinómio do segundo grau $h(x)$ que deve adicionar a $g(x)$ para que $a = -1$ seja raíz tripla de $g(x) + h(x)$?

3) Considere a função $F(x,y)$ com derivadas finitas $F'_x(a,b)$ e $F'_y(a,b)$. Que pode afirmar acerca da continuidade das funções $F(x,b)$ $F(a,y)$? Porquê?

Se uma das derivadas fôr contínua em $P(a,b)$, prove que $F(x,y)$ é contínua e diferenciável em $P(a,b)$. Se quisesse apenas garantir a continuidade de $F(x,y)$ em $P(a,b)$ seria preciso exigir a continuidade de uma das derivadas? Porquê?

R: 1) *A função* $f(x)$ *tem a assíntota obliqua* $Y = 2X + 2$ *e portanto pode escrever-se na forma* $f(x) = 2x + 2 + \varphi(x)$, *com* $\lim\limits_{x=+\infty} \varphi(x) = 0$.

2) $a = -1$ *anula* $g(x)$, $g'(x)$ *e não nula* $g''(x)$. *Trata-se pois de um zero duplo.*

$$g(x) + h(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 5 + ax^2 + bx + c =$$
$$= 2x^3 + (9+a)x^2 + (12+b)x + (5+c)$$

e, como terá de ser $g(x) + h(x) = 2(x+1)^3$, *resultam, as condições*

$$\begin{cases} 9 + a = 6 \\ 12 + b = 6 \\ 5 + c = 2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = -3 \end{cases}$$

isto é, $h(x) = -3x^2 - 6x - 3$.

II

5560 — 1) Deduza as fórmulas de Girard e utilize-as para achar a relação que deve existir entre a, b, c, e d por forma que uma das raízes do polinómio $az^3 + bz^2 + cz + d$ seja igual à soma das outras duas.

2) Dada a tabela de valores $\dfrac{x \mid x_0\ x_1\ x_2}{y \mid y_0\ y_1\ y_2}$, escreva a expressão geral do polinómio interpolador e utilize a teoria dos sistemas lineares para mostrar que o polinómio interpolador pode apresentar-se na forma

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

3) Defina complemento algébrico de um menor e prove que é nula a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos dos elementos homólogos de outra fila paralela.

R: 1) $$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 = z_2 + z_3 \end{cases} \quad \textit{e daqui se tira } z_1 = -\frac{b}{2a}.$$

A relação é pois

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{2a}\right) + d = 0$$

ou $$b^3 - 4abc + 8a^2 d = 0.$$

2) *A expressão geral do polinómio interpolador é*

$y = a + bx + cx^2$ *e deverá ter-se, evidentemente:*

$$\begin{cases} y = a + bx + cx^2 \\ y_0 = a + bx_0 + cx_0^2 \\ y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 \end{cases}$$

e para que este sistema de quatro equações a três incógnitas seja possível é preciso que (teorema de Rouché):

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final. Época de Julho (1.ª chamada) — Prova Prática — 12/7/62.**

5561 — 1) Define-se *divisão* de conjuntos por meio da fórmula $A:B = A \cup \widetilde{B}$. Prove que:

a) $A:(B \cap C) = (A:B):C$

b) $A:(B \cup C) = (A:B) \cap (A:C)$.

R: a) $A:(B\cap C) = A \cup (\widetilde{B\cap C}) = A \cup (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}) = (A \cup \widetilde{B}) \cup \widetilde{C} = (A:B) \cup \widetilde{C} = (A:B):C$

b) $A:(B \cup C) = A \cup (\widetilde{B \cup C}) = A \cup (\widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = (A \cup \widetilde{B}) \cap (A \cup \widetilde{C}) = (A:B) \cap (A:C)$.

2) Calcule $\lim\limits_{n=\infty} n^2 \left[\log(n+3) - \log n - \dfrac{1}{n}\right]$.

R: $\lim\limits_{n=\infty} n^2 \left[\log(n+3) - \log n - \dfrac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n=\infty} n^2 \left[\log\left(1+\dfrac{3}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n=\infty} n^2 \left(\eta \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n=\infty} n(3\eta - 1) = +\infty \; (\eta \to 1)$.

3) Calcule $P\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

R: *Fazendo* $\dfrac{1+x}{1-x} = t^2$ *vem* $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

Portanto

$$P\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 4P\frac{t^2}{(t^2+1)^2} = 4P\frac{1}{t^2+1} - 4P\frac{1}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 4\, arctg\, t - 4\left(\frac{1}{2} arctg\, t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2\, arctg\, t - \frac{2t}{1+t^2} =$$

$$= 2\, arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

4) Dada a função $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + b}{cx^2 + 4}$

a) Determine as constantes a, b e c de modo que o gráfico de $f(x)$ seja tal que a recta $x + y = 0$ seja uma assíntota e o ponto $(0, f(0))$ seja de inflexão.

b) Esboce o gráfico de $f(x)$.

R: a) *Dividindo* $x^3 + ax^2 + b$ *por* $cx^2 + 4$ *obtem-se o cociente* $\dfrac{1}{c}x + \dfrac{a}{c}$ *e um resto do primeiro grau, isto é,* $f(x) = \dfrac{1}{c}x + \dfrac{a}{c} + \varphi(x)$ *com* $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. *A assíntota é pois* $y = \dfrac{1}{c}x + \dfrac{a}{c}$ *donde se conclui que* $c = -1$ *e* $a = 0$. *Ora para* $f(x) = \dfrac{x^3+b}{-x^2+4}$ *tem-se*

$$f''(x) = \frac{(-4x^3+24x+2b)(-x^2+4) + 4x(-x^4+12x^2+2bx)}{(-x^2+4)^3}$$

e $f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$.

b) *O domínio de* $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ *é*

$$]-\infty, -2[\,,\,]-2, 2[\,,\,]2, +\infty[$$

e a curva é simétrica em relação à origem.

$f'(x) = \dfrac{x^2}{(4-x^2)^2}(12-x^2)$ *e a função é crescente em* $[-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$ *e decrescente em* $]-\infty, -\sqrt{12}]$ *e* $[\sqrt{12}, +\infty[$; $x = -\sqrt{12}$ *é minimizante e* $x = \sqrt{12}$ *é maximizante.*

Como $f''(x) = \dfrac{8x}{(4-x^2)^3}(12+x^2)$ *a função é convexa em* $]-\infty, -2[$ *e* $[0, 2[$ *e concava em* $]-2, 0]$ *e* $]2, +\infty[$.

As assíntotas são $y = -x$, $x = -2$ *e* $x = 2$.

5) Dada a função

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [(x,y) \neq (0,0)] \\ 0 & [(x,y) = (0,0)] \end{cases}$$

calcule $g'_x(0,0)$, $g'_y(0,0)$, $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$.

R. $g'_x(0,0) = \lim\limits_{x=0} \dfrac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = 0$,

$g'_y(0,0) = \lim\limits_{y=0} \dfrac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$

$$g'_x(0,y) = \lim_{x=0} \frac{g(x,y)-g(0,y)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0} y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y$$

$$g'_y(x,0) = \lim_{y=0} \frac{g(x,y)-g(x,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x$$

$$g''_{xy}(0,0) = \lim_{y=0} \frac{g'_x(0,y)-g'_x(0,0)}{y} = -1$$

$$g''_{yx}(0,0) = \lim_{x=0} \frac{g'_y(x,0)-g'_y(0,0)}{x} = 1$$

6) Considere o determinante de ordem $n+1$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Prove que $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$ e utilize esta fórmula para calcular D_n.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de* Laplace, *segundo os elementos da primeira coluna, vem:*

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = a_n x^n + D_{n-1}$$

De $D_n = a_n x^n + D_{n-1}$ *obtem-se o conjunto de igualdades*

$$\begin{aligned} D_n &= a_n x^n + D_{n-1} \\ D_{n-1} &= a_{n-1} x^{n-1} + D_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_2 &= a_2 x^2 + D_1 \end{aligned}$$

que somadas membro a membro dão $D_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + D_1$.

Ora $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$ *e por conseguinte*

$$D_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final: Época de Julho (2.ª chamada) — Prova prática — 16/7/62.

5562 — 1) Prove que:

a) $A \cup B = A \cup (\tilde{A} \cap B)$

b) $B = (A \cap B) \cup (\tilde{A} \cap B)$

R: a) $x \in A \cup (\tilde{A} \cap B) = x \in A \vee x \in (\tilde{A} \cap B) =$
$= x \in A \vee (x \in \tilde{A} \wedge x \in B) =$
$= [x \in A \vee \sim (x \in A)] \wedge (x \in A \vee x \in B) =$
$= x \in A \vee x \in B = x \in A \cup B$.

b) $x \in (A \cap B) \cup (\tilde{A} \cap B) = (x \in A \wedge x \in B) \vee$
$\vee [\sim (x \in A) \wedge x \in B] =$
$= x \in B \wedge [x \in A \vee \sim (x \in A)] = x \in B$.

Nota: Em qualquer das alíneas a proposição $x \in A \vee \sim (x \in A)$ *é uma tautologia.*

2) Calcule $P\,\dfrac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

R: $$\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{S_0}{x^2+1} + \frac{T_0}{x^2+2}.$$

Cálculo de S_0:

Fazendo $\Delta = x^2+1$, *vem* $R_\Delta(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2} = \dfrac{x-1}{1+\Delta}$ *e* $S_0 = x-1$.

Cálculo de T_0:

Fazendo $\Omega = x^2+2$, *vem* $R_\Omega(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1} = \dfrac{x-1}{-1+\Omega}$

e $T_0 = 1-x$

Então:

$$P\,\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)} = P\,\frac{x-1}{x^2+1} + P\,\frac{1-x}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2} P\,\frac{2x}{x^2+1} - P\,\frac{1}{x^2+1} + P\,\frac{1}{x^2+2} -$$

$$- \frac{1}{2} P\,\frac{2x}{x^2+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \log(x^2+2) = \log \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} -$$

$$- \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

3) Aplique a fórmula dos acréscimos finitos à função $y = \log(1+x)$ no intervalo $[0, x]$ e resolva os seguintes problemas:

a) Calcule θ em função de x e prove que $\lim\limits_{x=0} \theta = \frac{1}{2}$.

b) Ache $\frac{d\theta}{dx}$ e mostre que $x^2 y^2 \frac{d\theta}{dx}$ pode exprimir-se unicamente como função de y. Deduza daí que $\frac{d\theta}{dx} < 0$.

R: a) $log\,(1+x) = x \frac{1}{1+\theta x} \Rightarrow \theta = \frac{1}{log\,(1+x)} - \frac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x=0} \theta = \lim\limits_{x=0} \left[\frac{1}{log\,(1+x)} - \frac{1}{x}\right] =$

$$= \lim_{x=0} \frac{x - log\,(1+x)}{x\, log\,(1+x)} = \lim_{x=0} \frac{1 - 1/1+x}{log\,(1+x) + x/1+x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{1/(1+x)^2}{1/1+x + 1/(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

b) *De* $y = log\,(1+x)$ *vem* $x = e^y - 1$ *e portanto* $\theta = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{e^y} + \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 y^2 \frac{d\theta}{dx} = y^2 - x^2 e^{-y} = y^2 - (e^y - 1)^2 e^{-y}$$

Ora $\quad x^2 y^2 \frac{d\theta}{dx} = y^2 - (e^y - 2 + e^{-y}) = y^2 -$

$$-\left[\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\cdots\right)+\left(1-y+\frac{y^2}{2!}-\cdots\right)-2\right]=$$

$$y^2 - 2\left(\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\right) = -2\left(\frac{y^4}{4!}+\frac{y^6}{6!}+\cdots\right) < 0$$

donde se conclui que $\frac{d\theta}{dx} < 0$

4) Dada a função $w = F(u)$, com $u = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$, mostre que $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

R:
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)\, f'\, g\, h$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = F'(u)\, f\, g'\, h$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F''(u)\, f f' g g' h^2 + F'(u)\, f' g' h = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

5) Determine a, b e c de modo que o polinómio $x^3 - a x^2 + b x + c$ tenha as raízes a, b e c.

R:
$$\begin{cases} a+b+c = a \\ ab+ac+bc = -b \\ abc = -c \end{cases} \qquad \begin{cases} b+c = 0 \\ bc = -b \\ abc = -c \end{cases}$$

e, supondo que $b \neq 0$,

$$vem \begin{cases} b+c = 0 \\ c = -1 \\ ab = -1 \end{cases} \quad donde \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$b = 0 \Rightarrow c = 0 \wedge a$ *qualquer*

6) Estude o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= k \end{aligned}$$

R:
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -k \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -k \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -k \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A característica da matriz do sistema é $r = 3$. *O sistema será impossível se* $k \neq 3$ *e possível se* $k = 3$.

Neste último caso a solução é $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — Prova escrita — 4-10-1962.

5563 — 1) Calcule a soma da série

$$\sum_0^\infty \frac{4n}{(n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3)}.$$

R: *Notando que* $\frac{4n}{(n^2-2n+3)(n^2+2n+3)} = \frac{1}{n^2-2n+3} - \frac{1}{n^2+2n+3}$, *a série dada é da forma* $\sum\limits_0^\infty (a_n - a_{n+2})$ *com* $a_n = \frac{1}{n^2-2n+3}$.

Como $a_n \rightarrow 0$, *tem-se* $S = a_0 + a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

2) Calcule $P\dfrac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}$.

R: *Fazendo* $tg\dfrac{x}{2}=t$, *vem* $sen\, x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ *e* $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$. *Então:*

$$P\frac{1}{sen\,x+cos\,x+1}=P\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{1+t^2}=P\frac{1}{1+t}=log\,|1+t|+C=$$

$$=log\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

3) Dada a função $f(x)=\begin{cases}1/x\ (x<-1)\\ x\ (-1\leq x<1)\\ x^2+1\ (1\leq x)\end{cases}$ estude a sua continuidade e derivabilidade.

Represente geomètricamente $f(x)$.

R: *A função é contínua em todos os pontos próprios, excepto* $x=1$. *Em* $x=-\infty$ *é contínua e em* $x=+\infty$ *é descontínua.*

Para $x<-1$ *tem-se* $f'(x)=-1/x^2$; *em* $x=-1$ *é* $f'_e(-1)=-1$ *e* $f'_d(-1)=1$ *e portanto não existe* $f'(-1)$; *para* $-1<x<1$ *vem* $f'(x)=1$; *em* $x=1$ *é* $f'_e(1)=+\infty$ *e* $f'_d(1)=2$ *e portanto também não existe* $f'(1)$; *finalmente, para* $x>1$ *é* $f'(x)=2x$.

4) Sendo $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-2xy^2)\operatorname{sen}y}{x^2+y^2}\ [(x,y)\neq(0,0)]\\ 0\ [(x,y)=(0,0)]\end{cases}$

calcule $g''_{xy}(0,0)$ e $g''_{yx}(0,0)$.

R: $$g'_x(0,0)=\lim_{x=0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=0$$

$$g'_x(0,y)=\lim_{x=0}\frac{g(x,y)-g(0,y)}{x}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{(x^3-2y^2)}{x^2+y^2}\,sen\,y=-2\,sen\,y$$

$$g'_y(0,0)=\lim_{y=0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}=0$$

$$g'_y(x,0)=\lim_{y=0}\frac{g(x,y)-g(x,0)}{y}=$$

$$=\lim_{y=0}\frac{x^3-2xy^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{sen\,y}{y}=x$$

$$g''_{xy}(0,0)=\lim_{y=0}\frac{g'_x(0,y)-g'_x(0,0)}{y}=$$

$$=\lim_{y=0}-\frac{2\,sen\,y}{y}=-2$$

$$g''_{yx}(0,0)=\lim_{x=0}\frac{g'_y(x,0)-g'_y(0,0)}{x}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{x}{x}=1.$$

5) Considere a tabela $\begin{array}{c|cccc}x&-1&1&3&5\\ \hline y&0&1&a&b\end{array}$. Determine a relação que deve existir entre a e b por forma que o polinómio interpolador seja do segundo grau. Escreva o polinómio.

R: *Achando a tabela de diferenças finitas, vem*

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	0	1	$a-2$	$b-3a+3$
1	1	$a-1$	$b-2a+1$	
3	a	$b-a$		
5	b			

e para que o polinómio interpolador seja do segundo grau é preciso que $\Delta^3 y=b-3a+3=0$ *que é a relação pedida. É claro que terá de ser* $a\neq2$.

O polinómio interpolador será

$$f(x)=\frac{x+1}{2}+\frac{(x^2-1)}{2!\,4}(a-2)=$$

$$=\frac{a-2}{8}x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{a-2}{8}.$$

6) Demonstre a igualdade

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1+x_1&1&\cdots&1\\1&1&1+x_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+x_n\end{vmatrix}=x_1\,x_2\cdots x_n.$$

R: $$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1+x_1&1&\cdots&1\\1&1&1+x_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+x_n\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_1&0&\cdots&0\\0&0&x_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}=x_1\,x_2\cdots x_n.$$

Enunciados e soluções dos N.os 5557 a 5563 de Fernando de Jesus

Nota: Por falta de espaço não foi possível incluir neste número críticas e referências bibliográficas de várias obras de matemática enviadas à Redacção.