ANO XXIII — N.º 86-87 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO — 1962

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Sur le normalisateur d'un sous-groupe cyclique

par José Morgado

Faculdade de Filosofia de Pernambuco e Instituto de Física e Matemática
da Universidade do Recife, Brasil

1 — Introduction.

Si a est un élément d'un groupe G et r est un entier quelconque, l'équation $a\,x = x\,a^r$ n'est pas généralement soluble dans G. Par exemple, si a appartient au centre de G, on a $a\,x = x\,a$, pour tout $x \in G$. Il en résulte que, si a est un élément d'ordre infini, alors l'équation $a\,x = x\,a^r$ est soluble, si et seulement si $r = 1$; et, si l'ordre de l'élément a est n, alors cette équation est soluble, si et seulement si la congruence arithmétique $r \equiv 1$ (modulo n) est satisfaite.

Cependant l'ensemble A, formé par les solutions de toutes les équations $a\,x = x\,a^r$, où r parcourt l'ensemble Z des nombres entiers, n'est pas vide, puisqu'il contient le normalisateur de a (1).

Dans cette note, on étudie quelques propriétés de l'ensemble A et on en déduit quelques propositions concernant les relations entre le normalisateur $N_{(a)}$, du sous-groupe cyclique (a) engendré par a, et le normalisateur N_a, de l'élément a.

2 — Propositions préliminaires.

Soit G un groupe et supposons que les éléments a et x, de G, vérifient l'égalité

(2. 1) $$a\,x = x\,a^r,$$

r étant un entier quelconque.

Alors, on a évidemment

$$a^2\,x = a\,x\,a^r = x\,a^{2r},$$

et de

$$a^m\,x = x\,a^{m\,r},$$

il résulte

$$a^{m+1}\,x = a\,x\,a^{m\,r} = x\,a^r \cdot a^{m\,r} = x\,a^{(m+1)\,r},$$

c'est-à-dire, l'égalité

$$a^m\,x = x\,a^{m\,r},$$

est satisfaite, quel que soit l'entier positif m.

De (2. 1), il résulte

$$a^{-1}\,x = (x\,a^r\,x^{-1})^{-1} \cdot x = x\,a^{-r}\,x^{-1} \cdot x = \\ = x\,a^{-r} = x\,(a^{-1})^r$$

(1) Rappelons que le normalisateur de a est formé par les éléments du groupe G qui sont permutables avec a. Le normalisateur de a est un sous-groupe de G.

Rappelons, en outre, que le normalisateur d'un sous-groupe H, de G, est l'ensemble des élements $x \in G$, tels que $x\,H = H\,x$. Le normalisateur de H est le plus grand sous-groupe de G qui contient H comme sous-groupe invariant.

et, moyennant (2. 2), on obtient

$$a^{-m}x=(a^{-1})^m\cdot x=x(a^{-1})^{mr}=x\,a^{-mr},$$

quel que soit l'entier positif m.

Nous pouvons, donc, énoncer la proposition suivante:

Lemme 1. *Si* a *et* x *appartiennent à un groupe et* $\mathrm{a\,x=x\,a^r}$, *alors on a* $\mathrm{a^s x=x\,a^{sr}}$, *pour tout entier* s.

La relation (2. 1) entraîne

$$a\,x^2=x^2a^r x$$

et, d'après le lémme 1, on a

$$a\,x^2=x\,a^{r^2}$$

et, par récurrence sur m, on établit

Lemme 2. *Si* a *et* x *appartiennent à un groupe et* $\mathrm{a\,x=x\,a^r}$, *alors on a* $\mathrm{a\,x^m=x^m a^{r^m}}$, *pour tout entier positif* m.

Remarquons que l'égalité (2. 1) *n'entraîne pas* l'égalité $a\,x^m=x^m a^{r^m}$, pour *tout* entier m; il peut même arriver qu'on ait $a\,x^{-1}\neq x^{-1}a^s$, quel que soit l'entier s, comme on voit dans l'exemple suivant:

Exemple: Soit G le groupe multiplicatif formé par les matrices régulières, du type 2×2, sur le corps des nombres réels. Si l'on prend

$$a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\;x=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

on voit que

$$a\,x=x\,a^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}.$$

D'autre part, on montre aisément que

$$a^s=\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix},$$

pour *tout entier* s, et, par conséquent, on a

$$\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}=a\,x^{-1}\neq x^{-1}a^s=\begin{pmatrix}0&1/2\\1&s\end{pmatrix},$$

quel que soit l'entier s.

Lemme 3. *Si* a *et* x *sont deux éléments d'un groupe* G, *tels que* $\mathrm{a\,x=x\,a^r}$ *et* $\mathrm{a\,x^{-1}=x^{-1}a^s}$, *avec* $\mathrm{r\,s\neq 1}$, *alors le sous-groupe cyclique engendré par* a *est fini.*

Dém.: En effet, d'après le lemme 1, nous pouvons écrire

$$a=x^{-1}a^s x=x^{-1}\cdot x\,a^{sr}=a^{sr}.$$

Or, par hypothèse, on a $r\,s\neq 1$, et, par conséquent, le sous-groupe cyclique engendré par a est fini.

Si n désigne l'ordre de ce sous-groupe, l'égalité $a=a^{sr}$ montre que $s\,r\equiv 1$ (modulo n); il en résulte que $|r|$ et $|s|$ sont premiers à n.

Plus généralement, on peut énoncer la proposition suivante:

Lemme 4. *Si l'ordre du sous-groupe engendré par* a *est* $\mathrm{n}\,(>1)$ *et si l'équation* $\mathrm{a\,x=x\,a^r}$ *est soluble, alors* $|\mathrm{r}|$ *est premier à* n.

Dém.: Nous pouvons évidemment supposer $0<r<n$. Alors, soit d le plus grand commum diviseur des nombres r et n. On a $n=d\,q_1$ et $r=d\,q_2$, q_1 et q_2 étant premiers entre eux.

D'après le lemme 1, on peut écrire

$$a^{q_1}x=x\,a^{q_1\cdot r}=x\,a^{q_2\cdot n}=x,$$

donc,

$$a^{q_1}=u,$$

u étant l'élément neutre pour l'opération du groupe.

Cela veut dire que q_1 est un multiple de n; mais, d'autre part, q_1 est un diviseur de

n, c'est-à-dire, $q_1 = n$, donc $d = 1$ et, par conséquent, r est premier à n.

Il est bien connu que, si $r (> 1)$ est premier à n, alors il y a un entier s, $0 < s < n$, tel que

$$r s \equiv 1 \text{ (modulo } n).$$

Il en résulte, d'après le lemme 1,

$$a^s x = x a^{rs} = x a,$$

donc,

$$a x^{-1} = x^{-1} a^s,$$

ce qui prouve

LEMME 5. *Si le groupe cyclique engendré par* a *est fini et si, en outre, il existe un élément* x *tel que* $\mathrm{a\,x = x\,a^r}$, *alors il y a un entier* s *tel que* $\mathrm{a\,x^{-1} = x^{-1}\,a^s}$.

Nous pouvons préciser que, sous les hypothèses du lemme 5, il n'y a qu'un entier s tel que $a x^{-1} = x^{-1} a^s$ et $0 < s < n$ [1] et que l'égalité $a x^{-1} = x^{-1} a^{s'}$ est satisfaite, si et seulement si s' et s sont liés par la relation $s' \equiv s$ (modulo n).

3 — L'ensemble des solutions des équations $a x = x a^r$.

Désignons par A_r l'ensemble (éventuellement vide) des solutions de l'équation $a x = x a^r$ et soit A l'union des ensembles A_r, où r parcourt l'ensemble Z des nombres entiers :

$$A = \bigcup_{r \in Z} A_r .$$

L'ensemble A contient le normalisateur $N_{(a)}$ du sous-groupe cyclique (a) engendré par a. En effet, si $x \in N_{(a)}$, alors, pour tout entier h, il existe au moins un entier k, tel que

$$a^h x = x a^k ;$$

en particulier, pour $h = 1$, il y a au moins un entier r, pour lequel on a $a x = x a^r$, c'est-à-dire, $x \in A_r$, donc $x \in A$.

L'exemple donné ci-dessus montre que A *n'est pas généralement un sous-groupe du groupe* G.

Cependant,

si $\mathrm{x \in A}$ *et* $\mathrm{y \in A}$, *alors* $\mathrm{x y \in A}$.

En effet, si l'on a

$$a x = x a^r \text{ et } a y = y a^s,$$

alors, d'après le lemme 1, on a

$$a x y = x a^r y = x y a^{rs}$$

c'est-à-dire, $x y \in A_{rs}$, donc $x y \in A$.

THÉORÈME 1. *Si* A *est un sous-groupe de* G, *alors* A *est le normalisateur du sous-groupe cyclique engendré par* a.

Dém.: Il suffit de montrer que, sous l'hypothèse du théorème, on a $A \subseteq N_{(a)}$, puisqu'on a toujours $N_{(a)} \subseteq A$.

Soit $x \in A$; alors, il y a des entiers r et s, tels que

$$a x = x a^r \text{ et } a x^{-1} = x^{-1} a^s .$$

D'après le lemme 1, on a $a^t x = x a^{tr}$, pour tout entier t, donc $a^t x^{-1} = x^{-1} a^{ts}$. Cela veut dire que

$$(a)\, x \subseteq x\,(a) \text{ et } (a)\, x^{-1} \subseteq x^{-1}(a),$$

où, comme d'habitude, (a) désigne le sous-groupe cyclique engendré par a.

Mais, de cette dernière inclusion, il résulte

$$x\,(a) \subseteq (a)\, x ,$$

donc

$$x\,(a) = (a)\, x ,$$

c'est-à-dire, $x \in N_{(a)}$, ce qui prouve le théorème.

[1] Nous excluons naturellement le cas $n = 1$.

Une condition suffisante, pour que l'ensemble A soit un groupe, est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Si le sous-groupe cyclique engendré par* a *est fini, alors* A *est un sous-groupe de* G.

Dém.: En effet, nous avons déjà remarqué que l'ensemble A est non vide et contient, avec deux éléments, leur produit; de plus, d'après le lemme 5, $x \in A$ entraîne $x^{-1} \in A$.

De ce théorème et du lemme 3, il résulte immédiatement

COROLLAIRE 1. *Si, dans* G, *il y a un élément* x *tel que* $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{x}^{-1} \in \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{a}\,\mathrm{x} = \mathrm{x}\,\mathrm{a}^{\mathrm{r}}$, *avec* $|\mathrm{r}| \neq 1$, *alors* A *est un sous-groupe de* G.

Moyennant le lemme 2, on peut conclure

COROLLAIRE 2. *Si* $\mathrm{x} \in \mathrm{A}_{\mathrm{r}}$, *avec* $|\mathrm{r}| \neq 1$, *et si l'ordre de* x *est fini, alors* A *est un sous-groupe de* G.

En effet, si l'ordre de x est m, on a

$$a = a\,x^m = x^m\,a^{r^m} = a^{r^m}, \text{ avec } r^m \neq 1,$$

donc l'ordre de a est fini.

Sous les hypothèses du corollaire 1, supposons que

$$a\,y = y\,a^t$$

et proposons-nous de déterminer une équation de ce même type qui soit satisfaite par y^{-1}.

Une telle équation existe, puisque A est un groupe.

Les équations

$$a\,x = x\,a^r \text{ et } a\,x^{-1} = x^{-1}\,a^s$$

entraînent

$$a^{rs} = a$$

et, de même, les équations

$$a\,y = y\,a^t \text{ et } a\,y^{-1} = y^{-1}\,a^{t'}$$

entraînent

$$a^{t\,t'} = a\,.$$

Mais l'ordre de a est fini, soit n, (puisque $rs \neq 1$); donc

$$(3.\,1) \qquad r\,s - t\,t' \equiv 0 \pmod{n}.$$

Or cette congruence a au moins une solution t', puisque t est premier à n [1], d'après le lemme 4.

Inversement, si t' satisfait la congruence (3. 1), on a

$$a^{t'}\,y = y\,a^{t\,t'} = y\,a^{rs} = y\,a$$

et il en résulte

$$a\,y^{-1} = y^{-1}\,a^{t'}\,.$$

THÉORÈME 3. *Si* $\mathrm{x}^{\mathrm{h}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{r}}$ *et* $\mathrm{x}^{\mathrm{k}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{s}}$ *et* $\mathrm{r}^{|\mathrm{k}|} \neq \mathrm{s}^{|\mathrm{h}|}$, *alors* A *est un sous-groupe de* G.

Dém.: Supposons $h > 0$ et $k > 0$; d'après le lemme 2, on a

$$a\,x^{h\,k} = x^{h\,k} \cdot a^{r^k} = x^{h\,k} \cdot a^{s^h},$$

d'où

$$a^{r^k} = a^{s^h}$$

et, puisque $r^k \neq s^h$, l'ordre de a est fini et on a

$$r^k - s^h \equiv 0 \pmod{n},$$

n étant l'ordre de a.

Si $h < 0$ et $k < 0$, en posant $y = x^{-1}$, $h' = -h$ et $k' = -k$, on a de même

$$r^{k'} - s^{h'} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Si $h < 0$ et $k > 0$, soit $h' = -h$; alors, des équations

$$a\,x^{-h'} = x^{-h'} \cdot a^r \text{ et } a\,x^k = x^k \cdot a^s,$$

---

[1] Puisque l'ordre de a est fini, nous pouvons supposer t positif.

il résulte, d'après le lemme 2,

$$a x^{-h'k} = x^{-h'k} \cdot a^{rk} \quad \text{et} \quad a x^{h'k} = x^{h'k} \cdot a^{sh'},$$

et, puisque $r^k \cdot s^{h'} \neq 1$, il en résulte, d'après le lemme 3, que l'ordre de a est fini[1].

On arrive à la même conclusion, si l'on a $h > 0$ et $k < 0$.

Ainsi, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, l'ordre de a est fini et, par conséquent, A est un sous-groupe de G (théorème 2).

4 — Décomposition de A par rapport à N_a.

Nous savons que $N_a \subseteq A$; le théorème suivant permet de voir plus clairement les relations qui existent entre N_a et A.

THÉORÈME 4. *Si* $x \in A_r$, *on a* $y \in A_r$, *si et seulement si* $x y^{-1} \in N_a$.

DÉM.: En effet, des équations

$$a x = x a^r \quad \text{et} \quad a y = y a^r$$

il résulte

$$a x y^{-1} = x a^r y^{-1} = x y^{-1} a,$$

d'où $x y^{-1} \in N_a$.

Inversement. si $x \in A_r$ et $x y^{-1} \in N_a$, c'est-à-dire,

$$a x = x a^r \quad \text{et} \quad a x y^{-1} = x y^{-1} a,$$

alors

$$x y^{-1} a = a x y^{-1} = x a^r y^{-1};$$

il en résulte

$$y^{-1} a = a^r y^{-1}$$

et, par conséquent,

$$a y = y a^r,$$

d'où $y \in A_r$, ce qui prouve le théorème.

[1] Si n désigne l'ordre de a, alors on a $r^k \cdot s^{h'} \equiv 1$ (modulo n).

De ce théorème il résulte que, si $x \in A_r$, alors, $A^r = N_a x$; donc, si $A_r \neq A_s$, l'intersection $A_r \cap A_s$ est l'ensemble vide.

Ainsi, *il y a une partition de l'ensemble* A, *formée par des ensembles de la forme* $N_a x$.

5 — Le groupe-quocient $N_{(a)} / N_a$.

On voit aisément que N_a est un sous-groupe invariant dans $N_{(a)}$.

En effet, soient $x \in N_{(a)}$ et $y \in N_a$; les équations

$$a x = x a^r \quad \text{et} \quad a y = y a$$

entraînent

$$a \cdot x y x^{-1} = x a^r y x^{-1} = x y a^r x^{-1} = x y x^{-1} \cdot a,$$

donc $x y x^{-1} \in N_a$.

THÉORÈME 5. *Le groupe-quocient* $N_{(a)}/N_a$ *est un groupe abélien fini, quel que soit* $a \in G$.

Dém.: En effet, soit

$$N_{(a)} / N_a = \{N_a, N_a b, N_a c, \cdots\}$$

où $b \notin N_a$, $c \notin N_a$ et $c \notin N_a b$.

Alors, on a

$$(5.1) \qquad a b = b a^r \quad \text{et} \quad a c = c a^s,$$

avec $r \neq 1 \neq s$; on a, de plus, $r \neq s$, en conséquence du théorème 4.

Soit $r \neq -1$; alors, si t est un entier tel que

$$a b^{-1} = b^{-1} a^t \text{ [1]},$$

on a $r t \neq 1$ et, d'après le lemme 3, on déduit que l'ordre de a est fini. Donc, il y a seulement un nombre fini d'équations du type $a x = x a^r$, qui soient distinctes[2]. Or chaque élément de $N_{(a)} / N_a$ est une classe

[1] Un tel entier existe, puisque $b^{-1} \in N_{(a)}$.

[2] Plus précisement. si n désigne l'ordre de a et m est un entier, l'équation $a x = x a^m$ est équivalente à une équation $a x = x a^r$, où r est un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.

formée par toutes les solutions d'une telle équation et, par conséquent, le groupe $N_{(a)}/N_a$ est fini.

A fin d'établir que le groupe $N_{(a)}/N_a$ est abélien, observons que, des relations (5. 1) il résulte

$$abc = ba^r c = bca^{rs} \quad \text{et} \quad acb = ca^s b = cba^{rs},$$

c'est-à-dire, bc et cb sont solutions d'une même équation du type $ax = xa^t$, donc $bc \in N_a cb$ et, par conséquent,

$$N_a bc = N_a cb,$$

c'est-à-dire,

$$N_a b \cdot N_a c = N_a c \cdot N_a b,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous venons de prouver que, si l'ordre du groupe-quocient $N_{(a)}/N_a$ est plus grand que 2, alors a est un élément d'ordre fini. D'autre part, si l'ordre de a est n et l'équation $ax = xa^r$ est soluble, alors, d'après le lemme 4, r est premier à n (1). Donc

$$ord\ (N_{(a)}/N_a) > 2 \ \textit{entraîne}$$
$$ord\ (N_{(a)}/N_a) \leq \varphi(n),$$

où φ est l'*indicateur d'Euler*.

Maintenant nous allons préciser ce résultat:

Soit $ab = ba^r$ et proposons-nous de déterminer tous les éléments du groupe cyclique (b) qui appartiennent à N_a.

Si $r = 1$, on a évidemment $(b) \subseteq N_a$.

Supposons $r \neq 1$.

D'après le lemme 2, on a, pour tout entier positif m,

$$ab^m = b^m a^{r^m}$$

et, par conséquent, $b^m \in N_a$, si et seulement si

$$(5.\ 2) \qquad r^m \equiv 1 \ (\text{modulo } n).$$

Soit e *l'exposant de* r *par rapport à* n, c'est-à-dire, e est l'infimum des entiers positifs m satisfaisant la condition (5. 2).

Il est immédiat que l'entier e est un diviseur de tout entier positif m satisfaisant (5. 2) et, inversement, de

$$r^e \equiv 1 \ (\text{modulo } n)$$

il résulte, pour tout entier k,

$$r^{ke} \equiv 1 \ (\text{modulo } n);$$

et, par conséquent,

$$(b) \cap N_a = (b^e).$$

En particulier, e est un diviseur de $\varphi(n)$, une fois que, d'après un bien connu théorème d'Euler, on a

$$r^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (\text{modulo } n).$$

Il en résulte que l'ordre de tout sous-groupe cyclique de $N_{(a)}/N_a$ est un diviseur de $\varphi(n)$.

D'autre part, on sait que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit direct de sous-groupes cycliques (dont les ordres sont puissances de nombres premiers).

De tout cela, il résulte le théorème suivant:

Théorème 6: *Si l'on a ord* $(N_{(a)}/N_a) > 2$, *alors l'ordre de* a *est fini et ord* $(N_{(a)}/N_a)$ *est un diviseur de* $\varphi(n)$, *où* n *désigne l'ordre de* a *et* φ *est l'indicateur d'Euler.*

Supposons ord $(N_{(a)}/N_a) = 2$, c'est-à-dire,

$$N_{(a)}/N_a = \{N_a, N_a b\},$$

où $ab \neq ba$, $ab = ba^r$ (avec $r \neq 1$), $b^2 \in N_a$.

Si $r > 0$, alors

$$ab^2 = b^2 a^{r^2} = b^2 a$$

et, par conséquent,

$$a^{r^2} = a.$$

(1) Nous pouvons supposer r positif, une fois que l'ordre de a est fini.

Si $r<0$, en posant $r'=-r$, on a

$$b^{-1}a^{-1}=a^{r'}b^{-1}$$

et on peut écrire

$$a^{-1}b=b\,a^{r'},$$

d'où

$$a^{-1}b^2=b^2a^{-r'^2}=b^2a^{-1},$$

donc

$$a^{r'^2}=a=a^{r^2}.$$

Cela veut dire que, si l'ordre de a est n, alors

$$r^2\equiv 1 \pmod{n};$$

si l'ordre de a est infini, alors on a $r=-1$.

Par conséquent,

THÉORÈME 7. *Si ord* $(\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a)=2$ *et le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, les seuls entiers* r *pour lesquels l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^r}$ *est soluble sont* 1 *et* -1.

Il en résulte immédiatement le suivant

COROLLAIRE. *Si le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, alors on a* $\mathrm{N}_{(a)}=\mathrm{N}_a$, *si et seulement si l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^{-1}}$ *n'est pas soluble.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALMEIDA COSTA, *Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Linear*, Lisboa, 1958.

[2] C. C. MAC DUFFEE, *An Introduction to Abstract, Algebra*, John Wiley & Sons New York, 1940.

[3] NATHAN JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, vol. I, D. Van Nostrand Company, New York, 1951.

[4] PAUL DUBREIL, *Algèbre*, tome I, Gauthier-Villars Paris, 1946.

[5] PAUL DUBREIL et M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne*, Dunod, Paris, 1961.

Sobre alguns teoremas da teoria das matrizes

por Graciano Neves de Oliveira

§ 1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, I a matriz identidade da mesma ordem e x uma variável.

É sabido que em várias questões tem interesse considerar a função

$$S(x)=|A-x\,I|$$

que é evidentemente um polinómio de grau n em x e se denomina *polinómio característico* de A.

Podemos escrever

$$|A-x\,I|=(-x)^n+(-x)^{n-1}S_1+\cdots+(-x)\,S_{n-1}+S_n \tag{1. 1}$$

e demontrou JACOBI que o coeficiente S_{n-k} de $(-x)^k$ é igual à soma dos menores principais de ordem $n-k$ do determinante da matriz A (1).

Ocupar-nos-emos agora da dedução duma fórmula que nos permitirá dar uma demonstração muito simples deste teorema de JACOBI.

§ 2. Consideremos a função de x

$$D(x)=|A-x\,\mathrm{I}|$$

e procuremos a expressão da sua derivada de ordem k.

Designemos por $D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$ o menor principal de $D(x)$ que se obtém, suprimindo as

(1) VICENTE GONÇALVES, Curso de Álgebra Superior, 2.º volume (1950), pág. 153.