Si $r<0$, en posant $r'=-r$, on a

$$b^{-1}a^{-1}=a^{r'}b^{-1}$$

et on peut écrire

$$a^{-1}b=b\,a^{r'},$$

d'où

$$a^{-1}b^2=b^2a^{-r'^2}=b^2a^{-1},$$

donc

$$a^{r'^2}=a=a^{r^2}.$$

Cela veut dire que, si l'ordre de a est n, alors

$$r^2\equiv 1 \ (\text{modulo } n);$$

si l'ordre de a est infini, alors on a $r=-1$.

Par conséquent,

THÉORÈME 7. *Si ord* $(\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a)=2$ *et le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, les seuls entiers* r *pour lesquels l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^r}$ *est soluble sont* 1 *et* -1.

Il en résulte immédiatement le suivant

COROLLAIRE. *Si le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, alors on a* $\mathrm{N}_{(a)}=\mathrm{N}_a$, *si et seulement si l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^{-1}}$ *n'est pas soluble.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALMEIDA COSTA, *Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Linear*, Lisboa, 1958.

[2] C. C. MAC DUFFEE, *An Introduction to Abstract, Algebra*, John Wiley & Sons New York, 1940.

[3] NATHAN JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, vol. I, D. Van Nostrand Company, New York, 1951.

[4] PAUL DUBREIL, *Algèbre*, tome I, Gauthier-Villars Paris, 1946.

[5] PAUL DUBREIL et M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne*, Dunod, Paris, 1961.

Sobre alguns teoremas da teoria das matrizes

por **Graciano Neves de Oliveira**

§ 1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, I a matriz identidade da mesma ordem e x uma variável.

É sabido que em várias questões tem interesse considerar a função

$$S(x)=|A-x\,I|$$

que é evidentemente um polinómio de grau n em x e se denomina *polinómio característico* de A.

Podemos escrever

$$|A-x\,I|=(-x)^n+(-x)^{n-1}S_1+\cdots+(-x)\,S_{n-1}+S_n \qquad (1.\ 1)$$

e demontrou JACOBI que o coeficiente S_{n-k} de $(-x)^k$ é igual à soma dos menores principais de ordem $n-k$ do determinante da matriz A (1).

Ocupar-nos-emos agora da dedução duma fórmula que nos permitirá dar uma demonstração muito simples deste teorema de JACOBI.

§ 2. Consideremos a função de x

$$D(x)=|A-x\,\mathrm{I}|$$

e procuremos a expressão da sua derivada de ordem k.

Designemos por $D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$ o menor principal de $D(x)$ que se obtém, suprimindo as

(1) VICENTE GONÇALVES, Curso de Álgebra Superior, 2.º volume (1950), pág. 153.

linhas de ordem $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ e as colunas das mesmas ordens.

Sendo a_{ik} o elemento da linha i e coluna k de A temos pela conhecida regra de derivação de determinantes

$$\frac{d\,D(x)}{d\,x} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \cdots$$

e atendendo ao teorema de LAPLACE

$$\frac{d\,D}{d\,x} = -\sum_{\alpha_1=1}^{n} D^{(\alpha_1)}.$$

Como $D^{(\alpha_1)}$ é um determinante da forma de D conclui-se sem mais que

$$\frac{d\,D^{(\alpha_1)}}{d\,x} = -\sum_{\alpha_2 \neq \alpha_1} D^{(\alpha_1,\alpha_2)}$$

e ainda por $D^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ ser da forma de D tem-se

$$\frac{d\,D^{(\alpha_1,\alpha_2)}}{d\,x} = -\sum_{\alpha_3 \neq \alpha_1,\alpha_2} D^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$$

ou dum modo geral

$$(2.\ 2) \qquad \frac{d\,D^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)}}{d\,x} = \\ = \sum_{\alpha_{i+1} \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_i} D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1})}.$$

Podemos agora demonstrar por indução a fórmula

$$(2.\ 3) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = (-1)^k \sum_{\alpha_1=1}^{n} \sum_{\alpha_2 \neq \alpha_1} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}} D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$$

Em primeiro lugar ela verifica-se para $k=1$ como mostra (2. 1). Suponhamo-la válida para $k=i$

$$(2.\ 4) \qquad \frac{d^i\,D}{d\,x^i} = (-1)^i \sum_{\alpha_1=}^{n} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)}$$

e provemos que então também vale para $k=i+1$.

Derivando (2. 4) e por (2. 2) temos

$$\frac{d^{i+1}\,D}{d\,x^{i+1}} = (-1)^{i+1} \sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \sum_{\alpha_{i+1} \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_i} D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1})}$$

que mostra que (2. 3) é válida para a ordem $k=i+1$.

Fica pois estabelecida a fórmula (2. 3) que duma maneira mais simples se pode escrever

$$(2.\ 5) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = (-1)^k \sum D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$$

subentendendo-se que o somatório é estendido a todas as permutações $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ de k números tomados de 1 a n.

É claro que dois determinantes $D^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ que só difiram pela ordem dos α_i são iguais. Fixados k números $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ entrarão pois no somatório do segundo membro de (2. 5) $k!$ determinantes iguais a $D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$. A soma deles pode portanto substituir-se por $k!\,D^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ e supor-se $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$. Logo (2. 5) pode escrever-se

$$(2.\ 6) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = \\ = (-1)^k\,k! \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k} D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$$

§ 3. Podemos agora fazer a demonstração do teorema atrás referido.

Designemos por $A^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}$ o valor de $D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$ para $x=0$, que é precisamente o valor do menor principal de A obtido por supressão das linhas $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ e colunas das mesmas ordens.

Tomemos em (1. 1) as derivadas de ordem k para $x=0$. O primeiro membro reduz-se por (2. 6) a

$$(3.\ 1) \qquad (-1)^k k! \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} A^{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$$

e o segundo membro reduzir-se-á ao termo independente da derivada de ordem k do polinómio que representa e que é

$$(3.\ 2) \qquad (-1)^k k! S_{n-k}.$$

As expressões (3. 1) e (3. 2) deverão ser iguais donde se tira

$$S_{n-k} = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} A^{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$$

que nos diz precisamente que S_{n-k} é a soma dos menores principais de ordem $n-k$ do determinante da matriz A, como pretendíamos.

§ **4.** Por um processo análogo ao acabado de seguir se pode demonstrar o teorema de Laplace sobre determinantes. Para fazermos esta demonstração é porém necessário basearmo-nos em que a derivada dum determinante em ordem a um seu elemento é o complemento algébrico desse elemento. A demonstração deste facto pode fazer-se muito simplesmente com o auxílio do teorema de Laplace, mas também se pode fazer independentemente deste, como aqui convém evitar um círculo vicioso.

De facto seja

$$(4.\ 1) \qquad y = |a_{ik}|$$

e designemos o elemento da linha r e coluna s por x. A regra que aplicámos no § 1 para derivar determinantes pode demonstrar-se independentemente do teorema de Laplace[1]. Aplicando-a a (4. 1) e depois por trocas convenientes de filas paralelas chega-se a

$$(4.\ 2) \qquad \frac{dy}{dx} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X & A \end{vmatrix}$$

em que 0 representa a matriz nula do tipo $1 \cdot (n-1)$, X a matriz coluna de elementos $a_{is} (i = 1, \cdots n;\ i \neq r)$ e A o menor complementar de x. Atendendo agora à definição de determinante fàcilmente se prova regra.

Posto isto consideremos o determinante D de elemento genérico a_{ik}. Por definição ele é igual à soma dos termos pares da sua matriz menos os termos ímpares da mesma. Nalguns dos termos o representante da linha i é a_{i1}, noutros $a_{i2}, \cdots$ noutros é a_{in}. A soma dos termos pares e ímpares depois de multiplicados por -1 que contêm a_{i1} pode pois representar-se por $a_{i1} k_1$ em que k_1 é independente de todos os elementos da linha i. Anàlogamente para a soma dos termos que contêm a_{i2}, etc. Por outro lado como todos os termos têm de conter algum elemento da linha i podemos escrever

$$D = a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \cdots + a_{in} k_n.$$

Vamos procurar determinar as constantes k_j. Derivando a igualdade acima em ordem a a_{ij} temos

$$\frac{dD}{d a_{ij}} = k_j$$

mas $\dfrac{dD}{d a_{ij}}$ é o complemento algébrico de a_{ij}. Ficam pois determinadas as constantes e demonstrado o teorema de Laplace.

§ **5.** Vamos agora introduzir o conceito de *derivada duma matriz* o que nos permitirá chegar a conclusões interessantes.

---

[1] Vicente Gonçalves, C. de Álg. Sup., 2.° vol. (1950), pág. 149.

Seja A uma matriz cujos elementos são funções deriváveis da variável x que toma valores em certo conjunto X. Chamaremos derivada de A em ordem a x, num ponto interior de X, à matriz que de A se obtém substituindo cada elemento pela sua derivada nesse ponto. Representaremos a derivada de A em ordem a x por $\frac{dA}{dx}$.

Demonstramos agora algumas propriedades da derivação de matrizes que mais tarde utilizaremos.

Sendo

$$A(x) = B(x)\,C(x)$$

tem-se

$$(5.1) \qquad \frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dx}C + B\frac{dC}{dx}.$$

De facto o elemento da matriz A será

$$a_{ik} = \sum_{\alpha} b_{i\alpha}\, c_{\alpha k}$$

e de $a'_{ik} = \sum b'_{i\alpha}\, c_{\alpha k} + \sum b_{i\alpha}\, c'_{\alpha k}$ logo se conclui (5. 1). É fácil fazer a generalização para mais de dois factores.

Em particular pondo $B(x) = f(x)\,I$ temos

$$\frac{dA(x)}{dx} = f'(x)\,C(x) + f(x)\frac{dC(x)}{dx}.$$

Como a regra de derivação do produto duma função por uma matriz é idêntica à regra de derivação do produto de duas funções, e ainda porque o produto duma função por uma matriz é igual ao produto da matriz pela função, fàcilmente se conclui que se mantém a fórmula de Leibniz

$$\frac{d^k f(x)\,C(x)}{dx^k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x)\,C^{(k-i)}(x).$$

É evidente que $\frac{d(A+B)}{dx} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$.

§ **6.** É sabido que se chama matriz *adjunta* da matriz $A - xI$ à matriz cujo elemento da linha i e coluna k é o complemento algébrico do elemento da linha k e coluna i de $A - xI$. E sendo $B(x)$ a adjunta de $A - xI$ tem lugar a igualdade

$$(6.1) \qquad (A - xI)\,B(x) = |A - xI|\,I.$$

Atendendo à definição de $B(x)$ é fácil concluir que cada elemento desta matriz é um polinómio de grau quando muito $n-1$. Portanto pode escrever-se

$$(6.2) \qquad B(x) = B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \\ + \cdots + B_{n-1} x + B_n$$

com B_i matrizes cujos elementos são números.

Em $B(x)$ só os elementos principais são de grau $n-1$, os restantes são de grau inferior. E o coeficiente de x^{n-1} nos elementos principais é precisamente $(-1)^{n-1}$. Logo

$$(6.3) \qquad B_1 = (-1)^{n-1} I.$$

§ **7.** Seja A uma matriz qualquer. Se A é regular $S(x) = |A - xI|$ é diferente de zero para $x = 0$ e como é uma função contínua de x manter-se-á diferente de zero em alguma vizinhança deste ponto. Se porém A é singular teremos $S(0) = 0$. Como um polinómio só tem zeros isolados existirá ainda neste caso uma vizinhança de zero (com o zero excluido) onde $S(x) \neq 0$. Qualquer que seja A podemos pois sempre determinar uma vizinhança de zero (excluindo este se necessário) em que $S(x) \neq 0$. Suponhamos pois que x varia nessa região.

Teremos

$$(A - xI)\,(A - xI)^{-1} = I.$$

Derivando e pelas propriedades atrás estabelecidas temos

$$-(A - xI)^{-1} + (A - xI)\frac{d(A - xI)^{-1}}{dx} = 0$$

donde

$$(7.1) \qquad \frac{d(A - xI)^{-1}}{dx} = (A - xI)^{-2}.$$

Vamos demonstrar por indução a fórmula

$$(7.2)\qquad \frac{d^n (A - xI)^{-1}}{dx^n} = n!\,(A - xI)^{-n-1}.$$

Ela é válida para $n = 1$ como mostra (7. 1). Suponhamo-la válida para $n = k$:

$$\frac{d^k (A - xI)^{-1}}{dx^k} = k!\,(A - xI)^{-1} \cdots (A - xI)^{-1}$$
($k+1$ factores matriciais).

Derivando tem-se

$$\frac{d^{k+1}(A - xI)^{-1}}{dx^{k+1}} = k!\left[\frac{d(A - xI)^{-1}}{dx}(A - xI)^{-1}\cdots + \right.$$
$$\left. + (A - xI)^{-1}\frac{d(A - xI)^{-1}}{dx}\cdots + \cdots\right].$$

Por (7. 1)

$$\frac{d^{k+1}(A - xI)^{-1}}{dx^{k+1}} = k!\,[(A - xI)^{-2}(A - xI)^{-1}\cdots +$$
$$+ (A - xI)^{-1}(A - xI)^{-2}(A - xI)^{-1}\cdots + \cdots] =$$
$$= k!\,[(A - xI)^{-k-2} + (A - xI)^{-k-2} + \cdots].$$

Como no colchete há $k + 1$ parcelas vem

$$\frac{d^{k+1}(A - xI)^{-1}}{dx^{k+1}} = (k+1)!\,(A - xI)^{-k-2}$$

que mostra que (7. 2) é válida para a ordem $k + 1$. Fica pois a fórmula (7. 2) completamente demonstrada.

§ 8. Escrevendo $T(x)$ em vez de $(A - xI)^{-1}$ e $S(x)$ em vez de $|A - xI|$ da igualdade (6. 1) tira-se

$$B(x) = S(x)\,T(x)$$

e pela fórmula de Leibniz

$$\frac{d^k B(x)}{dx^k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} S^{(i)}(x)\,T^{(k-i)}(x).$$

Atendendo a (7. 2) podemos ainda escrever

$$\frac{d^k B(x)}{dx^k} = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}S^{(i)}(x)(A - xI)^{i-k-1}$$

donde

$$(8.1)\qquad (A - xI)^{k+1}\frac{d^k B(x)}{dx^k} =$$
$$= k!\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}S^{(i)}(x)(A - xI)^{i}.$$

Se A é regular podemos fazer $x = 0$ e vem

$$(8.2)\qquad A^{k+1}\left(\frac{d^k B(x)}{dx^k}\right)_{x=0} =$$
$$= k!\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}S^{(i)}(x)\,A^{i}.$$

Se A é singular vem de (8. 1)

$$\lim_{x\to 0}(A - xI)^{k+1}\left(\frac{d^k B(x)}{dx^k}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} k!\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}S^{(i)}(x)(A - xI)^{i}$$

e por evidentes razões de continuidade tira-se novamente (8. 2).

Entrando em (8. 2) com o valor de $S^{(i)}(0)$ indicado no § 3 e tirando $\left(\frac{d^k B(x)}{dx^k}\right)_{x=0}$ de (6. 2) vem

$$(8.3)\qquad A^{k+1}B_{n-k} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_{n-i}A^i,$$

igualdade que pretendíamos demonstrar e de que o teorema de Hamilton-Cayley, se pode considerar caso particular. Com efeito, fazendo $k = n - 1$ e por (6. 3) vem

$$(-1)^{n-1} I A^n = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i S_{n-i}A^i$$

ou

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1}S_1 A^{n-1} +$$
$$+ \cdots - S_{n-1}A + S_n I = 0,$$

isto é, *a matriz* A *anula o seu polinómio característico*. Desta igualdade tira-se

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_{n-i}A^i = \sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{i+1}S_{n-i}A^i\;(S_0 = 1)$$

pelo que (8. 3) passa a escrever-se

$$A^{k+1} B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^i$$

e se A é regular

$$B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^{i-(k+1)}$$

ou, pondo $i-(k+1)=j$

$$(8.\,4) \quad B_{n-k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j$$

que nos dá as matrizes coeficientes do desenvolvimento (6. 2). Em particular, fazendo $k=0$ obtém-se a matriz adjunta de A:

$$\hat{A} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j S_{n-1-j} A^j .$$

§ 9. Deduzimos a fórmula (8. 4) só para o caso de A ser regular, mas ela é válida ainda para o caso de A ser singular. Efectivamente, sendo A singular $|A-\eta I|$ anula-se para $\eta=0$, mas existe uma vizinhança ε da origem, com esta excluida, onde $|A-\eta I| \neq 0$. Designemos por $B_{n-k}(\eta)$ os coeficientes do desenvolvimento (6. 2) aplicado à matriz $A(\eta)=A-\eta I$ e por $S_i(\eta)$ os coeficientes do polinómio característico da mesma matriz que serão polinómios em η.

Para a matriz $A(\eta)$ com $\eta \in I(0,\varepsilon)$, $\eta \neq 0$ teremos

$$B_{n-k}(\eta) = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j(\eta)$$

tomando limites para $\eta=0$ e por razões de continuidade obtém-se novamente a fórmula (8. 4).

Enquadramento sinóptico do pensamento matemático

por J. M. Gil

No que se expõe a seguir procurámos uma sistematização dos aspectos diferentes assumidos pelo pensamento matemático, com carácter provisório de ponto de partida para estudos aprofundados. Não há a contribuição de interpretação valiosa de algum dos aspectos apontados, nem esclarecimento pertinente de algum ponto do tema, tão sòmente deficiência de exposição por falta de domínio dos assuntos encarados. Mesmo assim pareceu-nos a apresentação de interesse, quanto ao nexo articular que nos esforçámos por manter, para quem desejar um esquema inicial de trabalho, sujeito a futuras correcções, à medida que se progride.

A inspiração veio profundamente de «Consistency and Completeness» – FRANK DE SUA – A. M. M. pág. 295 – 1956, e ainda dos trabalhos «Kurt Goedel e os Problemas do Fundamentos da Matemática e a Teoria do Conjuntos» – L. NEVES REAL – G. M. n.º 4 – 1951, e «O que é uma Axiomática – J. SEBASTIÃO E SILVA – G. M. n.º 5 – 1953, e «Sobre a não contradição d Matemática» – GOTTFRIED KOETH – G. M n.º 58 – 1954, e «Aspectos da Actualidad Matemática» – A. PEREIRA GOMES – G. M n.º 68-69-70-71 – 1957-1958.

Utilizámos também de perto «Men (Matematics» – PARADISE LOST? (CANTO E. T. BELL – 1937, «Les Fondements Log ques des Mathématiques» – E. W. BET – 1950, e os artigos de HANS HAHN – «Inf nity», de CARL G. HEMPEL – «On the natu of mathematical truth», de RAYMOND L. WI DER – «The axiomatic method», de ERNE