pelo que (8. 3) passa a escrever-se

$$A^{k+1} B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^i$$

e se A é regular

$$B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^{i-(k+1)}$$

ou, pondo $i-(k+1)=j$

$$B_{n-k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j \tag{8. 4}$$

que nos dá as matrizes coeficientes do desenvolvimento (6. 2). Em particular, fazendo $k=0$ obtém-se a matriz adjunta de A:

$$\hat{A} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j S_{n-1-j} A^j .$$

§ 9. Deduzimos a fórmula (8. 4) só para o caso de A ser regular, mas ela é válida ainda para o caso de A ser singular. Efectivamente, sendo A singular $|A-\eta I|$ anula-se para $\eta=0$, mas existe uma vizinhança ε da origem, com esta excluida, onde $|A-\eta I| \neq 0$. Designemos por $B_{n-k}(\eta)$ os coeficientes do desenvolvimento (6. 2) aplicado à matriz $A(\eta)=A-\eta I$ e por $S_i(\eta)$ os coeficientes do polinómio característico da mesma matriz que serão polinómios em η.

Para a matriz $A(\eta)$ com $\eta \in I(0,\varepsilon)$, $\eta \neq 0$ teremos

$$B_{n-k}(\eta) = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j(\eta)$$

tomando limites para $\eta=0$ e por razões de continuidade obtém-se novamente a fórmula (8. 4).

Enquadramento sinóptico do pensamento matemático

por *J. M. Gil*

No que se expõe a seguir procurámos uma sistematização dos aspectos diferentes assumidos pelo pensamento matemático, com carácter provisório de ponto de partida para estudos aprofundados. Não há a contribuição de interpretação valiosa de algum dos aspectos apontados, nem esclarecimento pertinente de algum ponto do tema, tão sòmente deficiência de exposição por falta de domínio dos assuntos encarados. Mesmo assim pareceu-nos a apresentação de interesse, quanto ao nexo articular que nos esforçámos por manter, para quem desejar um esquema inicial de trabalho, sujeito a futuras correcções, à medida que se progride.

A inspiração veio profundamente de «Consistency and Completeness» – FRANK DE SUA – A. M. M. pág. 295 — 1956, e ainda dos trabalhos «Kurt Goedel e os Problemas do Fundamentos da Matemática e a Teoria do Conjuntos» — L. NEVES REAL – G. M. n.º 4 — 1951, e «O que é uma Axiomática — J. SEBASTIÃO E SILVA — G. M. n.º 5 — 1953, e «Sobre a não contradição d Matemática» — GOTTFRIED KOETH — G. M n.º 58 — 1954, e «Aspectos da Actualidad Matemática» — A. PEREIRA GOMES — G. M n.º 68-69-70-71 — 1957-1958.

Utilizámos também de perto «Men Matematics» — PARADISE LOST? (CANTO E. T. BELL — 1937, «Les Fondements Log ques des Mathématiques» — E. W. BET — 1950, e os artigos de HANS HAHN — «In nity», de CARL G. HEMPEL — «On the natu of mathematical truth», de RAYMOND L. WI DER — «The axiomatic method», de ERNE

NAGEL + JAMES R. NEWMAN — «Goedel's proof», de OSWALD VEBLEN + J. WESLEY YOUNG — «A Mathematical Science», de RICHARD VON MISES — «Mathematical Postulates and human understanding», de J. VON NEWMAN — «The mathematician» – em «The Wold of Mathematics» — New York, 1956, e também «The Basic Concepts of Algebraic Logic» – P. R. HALMOS – A. M. M. pág. 363 — 1956, por vezes, de tão perto que foram feitas transcrições completas, quando o todo se integrava sem dificuldade na exposição, enriquecendo-a, embora o facto não esteja na altura apontado.

1 — A matemática foi tida durante muito tempo, por razões de confiança na construção e de sucesso imediato nas descrições, como *isenta de contradição*. Ainda por vezes o é, gratuitamente. A cada uma das suas teorias atribui-se um rigor tal que afasta a possibilidade de alguma contradição.

2 — A formulação da «Teoria dos Conjuntos», incluindo os conjuntos infinitos, como foi apresentada por CANTOR, conduziu a contradições — as antinomias.

No entanto, a noção de conjunto tinha sido utilizada largamente na construção da Análise Clássica — estudo dos números e das funções de números. Não só conjuntos finitos, mas também conjuntos infinitos, por oposição aos conjuntos finitos, e a muitos destes tinham-se estendido as propriedades daqueles.

3 — Propôs-se como aceitável — FREGE, 1879, e RUSSELL, 1901 — a definição de número cardinal n: — a classe, definida pela propriedade comum a todos os conjuntos equivalentes a um dado conjunto. Sustenta-se que a propriedade comum aos conjuntos considerados define um conjunto — classe — com um único elemento, a que se dá o nome de número cardinal. A «propriedade» é assim suficiente para definir alguma coisa, para garantir a *existência* dum conjunto, vazio ou não.

Claramente a existência dum conjunto fica assegurada com a indicação de todos os seus elementos, mas no caso de conjuntos infinitos, por oposição aos finitos, a determinação não é exequível por este processo.

Está indicado definir um destes conjuntos compreensivamente por uma propriedade comum e exclusiva dos seus elementos.

Para definir um conjunto infinito precisamos dum universo sem restrições.

Uma propriedade seguramente define um conjunto num universo restrito de referência, isto é, tem nele uma *extensão,* quando é possível reconhecer em cada elemento do universo a participação ou não participação dessa propriedade. Este reconhecimento é o processo construtivo do conjunto.

O processo pode falhar na construção dos conjuntos infinitos.

Admitamos um universo de referência sem restrições. A extensão da propriedade p obter-se-ia marcando os objectos que a manifestassem. O processo não exige a marcação da própria extensão, como objecto do universo de referência, porque pretende simplesmente individualizá-la; quer tenha a propriedade quer não, colho-a sempre, sempre a individualizo. A extensão da propriedade p pode ter, ou não, a propriedade p. O processo indicado para a sua determinação não exige que me pronuncie sobre o facto. Supondo uma marcação por tiragem, tiraria sempre o conjunto extensão de p, sem, possivelmente, me ter pronunciado sobre esse elemento do universo de referência.

A possibilidade de pronunciação a respeito da propriedade p depende mesmo da atitude tomada em relação ao universo de referência.

Como há possívelmente falta de pronunciação a respeito dum objecto do universo de referência, não ficará concluida a construção do conjunto extensão da propriedade

p. O processo usado, em geral, não garante o acabamento da construção, nem a existência de conjuntos infinitos.

A definição compreensiva dum conjunto infinito exigiria ainda uma escolha das propriedades definidoras em relação à Lógica usada na construção do conjunto.

Há conjuntos que têm a propriedade de não serem elementos deles próprios; por exemplo, qualquer conjunto de objectos materiais da mesma natureza, ou um conjunto de rectas dum plano. Esta propriedade não define um conjunto, quando se utiliza a Lógica de Aristóteles — B. RUSSEL.

Claramente, supondo que existe o conjunto S dos conjuntos com a propriedade de não serem elementos de eles prórios, é S subconjunto de S, isto é, os elementos de S são elementos dele próprio — propriedade geral dos conjuntos; mas, se S é elemento de S, tem a propriedade de não ser elemento de ele próprio, contra a propriedade geral indicada. A hipótese da existência de S é absurda. Segundo a Lógica de Aristóteles o conjunto S não existe.

Há números que satisfazem a definição de número ordinal, mas, no sentido apontado, não existe o conjunto dos números ordinais. A propriedade de ser «número ordinal» não é definidora de conjunto — BURALI-FORTI.

Existem conjuntos finitos mas a propriedade de «ser conjunto» não é definidora de conjunto. No sentido considerado, não existe o conjunto de todos os conjuntos — CANTOR.

A possibilidade de definição por compreensão é limitada pela Lógica usada, sob a forma de regras de dedução.

SKOLEM demonstrou a existência de conjuntos de números sem propriedade definidora na Lógica de Aristóteles.

BERRY e RICHARD isolaram números finitos, constituindo um conjunto numerável, que não formariam um conjunto. Aceitando a existência de conjuntos numeráveis, a Lógica de Aristóteles — a usada — não permite decidir se os números gozam da propriedade de ser conjunto ou não. Por serem conjunto numerável seriam conjunto, por outro lado não satisfazem a definição de conjunto.

A propriedade definidora pode ser tal que a lógica usada não seja suficientemente informadora a respeito da participação dela por um dado objecto. Esta decisão pode exceder a capacidade da lógica usada.

A definição de conjunto por compreensão só é aceitável, em geral, como axioma — o Axioma da Compréensão.

A extensão duma propriedade e conjunto terão de ser noções diferentes, podendo convir ao mesmo objectivo em casos particulares.

4 — O problema fundamental de encontrar processo de definição dum conjunto, que não seja finito, ficou ligado ao problema da existência das entidades matemáticas.

A construção dum conjunto infinito por marcação dos elementos dum universo de referência, sem restrições, pode considerar-se legítima, se entendo que as entidades matemáticas têm existência independentemente de nós, independentemente de as construirmos ou não. O universo de referência do pensamento, na sua maior latitude, conterá todas as entidades matemáticas, incluindo o próprio conjunto. Assim sou obrigado a pronunciar-me sobre se tem ou não a propriedade definidora. O problema de fundo é o da legitimidade da concepção de tal universo, que terá de ser postulado — Princípio da Abstracção, sem restrições.

Se sustento que as entidades matemáticas existem só porque as construo, o conjunto que procuro construir ainda não existe, não é elemento do universo em referência, e não terei de pronunciar-me sobre ele. Preciso apenas de encontrar processo — uma construção — de colher todos os objectos com a propriedade definidora. Se tal construção existe, o conjunto procurado existe. O conjunto será a extensão da propriedade p, se se provar por outra construção que os objectos, não colhidos, não tem a propriedade p.

O problema fundamental é agora definir as construções legítimas, as regras que produzem os elementos do conjunto.

Uma construção que conduza a um objecto do universo de referência não é definidora de novo conceito. Não poderei construir conjuntos com a propriedade de serem elementos de eles próprios.

Todas as propriedades são definidoras de conjunto por construção, incluindo o conjunto vazio.

Também se negou a existência de conjuntos como extensão de algumas propriedades, porque conduzia a contradições; o que equivale a afirmar que existem os conceitos que não conduzem a contradições, segundo as regras de inferência usadas.

5 — O pensamento matemático triparte-se assim, quanto à natureza e existência dos seus objectos, em: atitude realista ou platónica — a de CANTOR e outros — os objectos do pensamento matemático existem independentemente da construção matemática; atitude intuicionista — a de KANT, KRONECKER, BROUWER, WEIL e outros — os objectos do pensamento matemático são construções de pura intuição, existem quando são construídos com um número finito de operações elementares legítimas; e a atitude nominalista ou logística — a de PEANO, RUSSELL e outros — os objectos do pensamento matemático são simples sinais desligados da realidade ou de puras intuições, e combinações destes segundo regras básicas; existem quando não conduzem a contradição.

6 — Qualquer das atitudes procura desembaraçar-se das contradições, procura justificar as suas teorias pela garantia da não-contradição.

No realismo, acredita-se na existência dos conjuntos e esclarece-se o conceito de «propriedade» ou de «condição», para evitar paradoxos; no intuicionismo, legitimam-se as construções que não conduzem a contradição; no logicismo, admitem-se as combinações de sinais que não são contraditórias.

Ora a contradição entende-se dentro da lógica usada, das regras de inferência admitidas válidas. Estas regras de inferência precisam de ser convenientemente escolhidas, para garantir que a contradição observada provem da teoria formulada, e não das regras de inferência usadas. A Lógica precisa de ser convenientemente formulada para evitar que crie contradições.

Se chamarmos «proposição» a toda a frase declarativa a respeito de algum facto, parece daí decorrer naturalmente que a cada proposição se poderá atribuir ou o valor 1, quando a declaração feita é verdadeira, ou o valor 0, quando a referida declaração é falsa. Qualquer proposição terá um, e um só, destes valores.

Se não impuser restrições na formação das proposições, poderei formar proposições a respeito de proposições, frases a respeito de proposições de valor lógico bem definido. E isto sucede frequentemente.

É possível encontrar, então, frases que seriam proposições, quanto à construção, e que não têm valor determinado. Assim a declaração a respeito da própria proposição — «Esta proposição é falsa». Se é realmente falsa, a declaração é de valor 1; se é verdadeira, a declaração seria de valor 0.

As regras de construção das proposições devem ser restringidas de modo a evitar construções que conduzam a estas dificuldades.

A lógica precisa de ser estudada convenientemente de modo a determinar as restrições próprias. A Lógica de Aristóteles foi edificada para conjuntos finitos e baseada na experiência com conjuntos finitos, nada garante a sua aplicabilidade aos conjuntos infinitos. Reconheceu-se que nenhum sistema de inferência, convenientemente restringido, podia criar por si contradições. São estas restrições que é preciso procurar e estudar.

É preciso pensar correctamente — inferir devidamente — e sobre o que não é contraditório, o que não conduz a contradição.

7 — As demonstrações construtivas do intuicionismo abandonaram o Princípio do 3.º Excluido da Lógica de Aristóteles. O intuicionismo supõe que esta restrição aos princípios intuitivos do raciocínio é suficiente para a eliminação das contradições numa teoria.

A afirmação $\forall n[p(n)]$ significa que existe um processo construtivo — uma construção — que permite verificar a propriedade p em cada inteiro positivo n; a afirmação $\exists n[\text{não} p(n)]$ é a da existência duma construção de n, sem a propriedade p. Se n é construível de modo a ter a propriedade p, também pode acontecer ser construível sem ter a propriedade p. O facto de ter a propriedade p nada adianta à informação de não ter a propriedade p. Este segundo facto não se pode inferir, tem de ser verificado construtivamente.

Por assim dizer são as propriedades que são definidas construtivamente e não se nega a possibilidade de duas construções serem satisfeitas pelo mesmo elemento, convirem ao mesmo inteiro positivo.

São admissíveis proposições a respeito das quais não faz sentido ser verdadeiro ou falso.

8 — Esta ideia da imposição de restrições ao raciocínio intuitivo foi bastante explorada.

Procurou-se descobrir as restricões suficientemente fortes a impôr ao raciocínio intuitivo para impedir a contradição, mas suficientemente fracas para permitir o desenvolvimento da matemática, pelo menos legitimar a construção já feita.

São exemplos dessas restrições: a teoria dos tipos lógicos de Russell, a teoria dos tipos lógicos simplificada de Ramsey, a teoria da estratificação de Quine, as axiomáticas da teoria dos conjuntos, de Zermelo e outros.

A adequação dos sistemas lógicos para construir com eles a matemática clássica tem sido apresentada ou integrando a matemática clássica, quanto à derivação, no próprio sistema considerado — Whitehead + Russell em «Principia»; ou provando que todo o teorema que se pode derivar com um dos sistemas lógicos — «Principia», por exemplo — também pode ser derivado com o sistema em causa.

A primeira apresentação exige a formalização da própria matemática e a segunda suspende a resolução da existência de contradição no desenvolvimento da matemática, transferindo-a para a decisão na construção com outro sistema lógico diferente, eventualmente mais esclarecedor.

9 — Escolhido um sistema de derivação adequado, haverá que provar por métodos «inatacáveis» que as restrições determinantes, impostas ao raciocínio, são suficientemente fortes, isto é, a matemática construida de acordo com elas é isenta de contradições. Isto exige provar a compatibilidade dum sistema formal, quer dizer, duma teoria, cujos termos foram analisados de modo a reduzir a axiomas todas as suas propriedades com importância na dedução de teoremas. Os termos ficam assim reduzidos a mera forma, que permite reconhecê-los, mas despidos de qualquer significado concreto. São como «palavras» sem significado, puras colecções de sinais.

A lógica do sistema é também explicitamente incorporada sob a forma de axiomas e de regras de inferências, expressas por símbolos de preferência à forma verbal. Todo o estudo do sistema se reduz a questões de forma ou estrutura — questões de sintaxe. O desenvolvimento do estudo do sistema constitui a «sintaxe da teoria», de que o sistema resultou.

A atribuição de significado concreto aos termos dum sistema formal, e forma verbal às regras de inferência admitidas, constitui uma semantização do sistema.

As teorias axiomatizadas — sistemas intuitivos vulgares, com termos primitivos recheados de significação nas deduções — e as axiomáticas — sistemas de termos primitivos indefinidos e regras de dedução em forma verbal — são sistemas semânticos.

A axiomatização duma teoria e a criação duma axiomática, de que a teoria seja sistema semântico, são passos sucessivos para a formalização da teoria, sua transformação em sistema formal.

As axiomáticas são sistemas semiformalizados.

10 — Vejamos como se opera uma axiomatização.

Isolam-se as propriedades dos termos da teoria que têm importância na dedução das propriedades apresentadas pelos termos. Reduzem-se os termos da teoria a sinais e enunciam-se como axiomas as propriedades isoladas. As regras de inferência, que permitem passar dos axiomas para os teoremas, são reduzidas a axiomas explícita ou implìcitamente e verbal ou simbòlicamente. No último caso a formalização fica completa.

A teoria concreta em estudo é agora uma solução ou um modelo da axiomática criada.

É conveniente que os axiomas sejam no número mínimo que permite todo o desenvolvimento da teoria e além disso independentes e compatíveis.

11 — A compatibilidade só pode ser estabelecida com a completa formalização da teoria e passa a constituir objecto fora dela. Teremos assim teorias da compatibilidade das teorias, designadas por metateorias.

A existência dum modelo da axiomática é uma relativa garantia de compatibilidade. A axiomática é compatível, se soubermos sê-lo o sistema concreto solução. Os axiomas transformam-se agora em propriedades dos termos, dos objectos do modelo. Se no modelo não se encontram simultâneamente duas propriedades contraditórias, na axiomática não será possível deduzir dois enunciados válidos e contraditórios.

12 — A possibilidade duma demonstração da compatibilidade por aproximações conduziu à redução do estudo da não-contradição da Análise Clássica ao da não-contradição da Aritmética, a uma aritmetização da Análise.

A compatibilidade de grandes partes da Análise Clássica foi, por processo conveniente, reduzida à compatibilidade da aritmética dos números inteiros naturais. Como as propriedades usuais dos números naturais — a Aritmética — podem deduzir-se da Axiomática de PEANO por meio das regras da Lógica Clássica — a de ARISTÓTELES —, aquela compatibilidade ficou dependente da compatibilidade duma teoria dos conjuntos, suficientemente restringida, para permitir a sua derivação daquela axiomática.

As definições dos números reais e dos números imaginários e a dedução das suas propriedades exige a junção do axioma lógico da escolha — ZERMELO — ao sistema constituido pela Axiomática de PEANO e Lógica Clássica.

Podemos agora definir nestes conjuntos numéricos as noções de função, limite, derivada e integral. Toda a Análise Clássica é deduzível da Axiomática de PEANO pelas regras da Lógica Clássica e o Axioma de ZERMELO. Todo o conceito da Análise Clássica pode ser definido pelos três termos primitivos de PEANO e toda a propriedade matemática da Análise Clássica se pode deduzir dos cinco axiomas de PEANO.

Não se pode afirmar a dedutibilidade a partir da Axiomática de PEANO de qualquer propriedade dos números naturais. Reconheceu-se a possibilidade de formular propriedades dos números naturais estranhas a qualquer axiomática da Aritmética, o que dá o carácter de incompletude às axiomatizações da Aritmética como axiomáticas completas da teoria dos números naturais.

Demonstrada a compatibilidade da Axiomática de PEANO fica garantida a não-contradição do seu modelo Aritmética, construída com a Lógica Clássica, e do seu modelo Análise Clássica, construída com a Lógica Clássica e com o Axioma de ZERMELO.

13 — HILBERT formulou uma teoria geral da demonstração da compatibilidade dum sistema de axiomas, sem recorrer a modelos da axiomática, portanto capaz de dar «provas absolutas» da compatibilidade.

O método partia da formalização completa da axiomática e a demonstração consistiria na análise de factos estruturais das expressões produzidas por um cálculo, legitimado pelas regras de inferência, aplicado aos sinais representativos dos termos da teoria em questão. O rigor era mantido com a produção de expressões do cálculo — fórmulas — por processo finitista: à custa de noções finitas e construções completamente exequíveis. A análise dos processos de construção das fórmulas e das suas propriedades isolaria um critério para reconhecer se dada fórmula seria ou não possível resultado dum cálculo operacional legitimado na metateoria.

Há aqui duas operações essenciais: a formalização da axiomática e a elaboração duma metateoria.

14 — Vejamos como se faz a formalização, se cria um sistema formal.

Considera-se um conjunto de símbolos, que poderão ser em número infinito. Qualquer disposição linear, finita, destes símbolos, com ou sem repetição, constitui uma fórmula. As fórmulas repartem-se por dois conjuntos disjuntos: o das fórmulas bem construídas (f. b. c.) e o das fórmulas vãs, ou ilegítimas.

Numa interpretação semântica do sistema formal, em construção, só as f. b. c. adquirirão significado.

As f. b. c. serão definidas por recorrência e sintàcticamente, portanto, ùnicamente pela sua estrutura. Além disso indicar-se-á um processo finito de reconhecer se uma fórmula é, ou não, f. b. c.

Vejamos agora o desenvolvimento do sistema.

Escolhe-se um subconjunto de fórmulas bem construídas para axiomas do sistema — não é possível falar de evidência destes axiomas, uma vez que as fórmulas foram despidas de todo o significado. Novas fórmulas bem construídas são derivadas dos axiomas por aplicação de regras de inferência, definidas por recorrência, sintàcticamente e por processos finitos.

Por «demonstração» entende-se uma sequência finita de f. b. c., cada uma das quais é um axioma ou se obteve das anteriores fórmulas da sequência por aplicação das regras de inferência.

A última fórmula duma demonstração é por definição um «teorema».

Escreve-se $\vdash A$ para indicar que A é um teorema ou que A é deduzível no sistema.

Dada uma sequência de fórmulas, há processo efectivo de saber se constitui, ou não, uma demonstração; geralmente, dada uma fórmula, não há processo geral de determinar se é, ou não, um teorema.

15 — Exemplifiquemos com uma das possíveis formalizações do Cálculo Proposicional, subteoria da Lógica Elementar.

Símbolos — as letras minúsculas do alfabeto, com e sem linhas: $a, b, c, \cdots$; $a', b', c', \cdots$; $a'', b'', c'', \cdots$; $\cdots$; os parêntesis: (, e também); o símbolo de negação $\sim$; e o símbolo de disjunção $\vee$.

Fórmulas – qualquer disposição seguida destes símbolos, por exemplo: $\vee\ ))\, a' \sim$. É f. b. c. qualquer letra, com linha ou sem linha. Se A e B são fórmulas bem construídas, então $\sim A$ e $(A \vee B)$ também são f. b. c.

Axiomas — uma infinidade de sistemas de axiomas dados pelo esquema seguinte: 1) $(A \vee \sim (A \vee A))$; 2) $((\sim B \vee C) \vee B)$; 3) $(\sim (D \vee \sim E) \vee (\sim E \vee F) \vee (F \vee D))$ em que A, B, C, D, E e F representam f. b. c. Cada escolha particular dos f. b. c. dá origem a um sistema de axiomas.

Regra de Inferência — das duas fórmulas G e $(\sim G \vee H)$ infere-se que H é f. b. c.

Exemplo duma demonstração:

TEOREMA. $\vdash (\mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r})$.

1 — $(\sim \mathrm{r} \vee \sim (\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}))$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (1) *substituindo* A *por* $\sim \mathrm{r}$.

2 — $(\sim (\sim \mathrm{r} \vee \sim (\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}))) \vee (\sim ((\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}) \vee \mathrm{r}) \vee (\mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r})))$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (3), *substituindo* D *por* $\sim \mathrm{r}$, E *por* $(\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r})$ *e* F *por* r.

3 — $\vdash (\sim ((\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}) \vee \mathrm{r}) \vee (\mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}))$ *é f. b. c., por inferência.*

Partindo agora de

1 — $(\sim ((\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}) \vee \mathrm{r}) \vee (\mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r})$ *é f. b. c., por ser um teorema.*

2 — $((\sim \mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r}) \vee \mathrm{r})$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (2) *substituindo* B *por* r *e* C *por* $\sim \mathrm{r}$.

3 — $\vdash (\mathrm{r} \vee \sim \mathrm{r})$ *é f. b. c., por inferência.*

16 — A definição dos símbolos $\rightarrow$, $\wedge$ e $\supset$ na axiomática permite fazer simplificações nas fórmulas e dar expressão simbólica à regra de inferência.

Usaremos $(A \rightarrow B)$ como abreviatura de $(\sim A \vee B)$ e $(A \wedge B)$ como abreviatura de $(\sim (\sim A \vee \sim B))$. Consequentemente $(A \rightarrow B)$ e $(A \wedge B)$ são f. b. c. O sinal $\supset$ é simples indicação de inferência ou de substituição duma fórmula pela abreviatura correspondente. Com $A \supset B$ indicaremos que B foi inferida de A, ou que se substituiu A por B, para efeito de simplificação. Assim

$$(\sim A \vee B) \supset (A \rightarrow B)$$

e

$$(\sim (\sim A \vee \sim B)) \supset (A \wedge B).$$

A regra de inferência traduz-se agora pela Regra do Corte ou da Simplificação:

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \supset B$$

que pode ler-se: concluiu-se B por corte do A

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \supset B.$$

Apliquemos estas simplificações à demonstração de que, se E e F são f. b. c., então $\vdash (E \vee F) \rightarrow (F \vee E)$.

Substituindo D por E no axioma (3), vem

$$((\sim (E \vee \sim E) \vee (\sim (E \vee F) \vee (F \vee E)))$$

ou

$$((E \vee \sim E) \rightarrow ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E))).$$

Como é $\vdash (E \vee \sim E)$, temos

$$(E \vee \sim E) \wedge ((E \vee \sim E) \rightarrow ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E))) \supset ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E)).$$

17 — Vejamos porque é que o sistema formal construido é uma sintaxe do Cálculo Proposicional. É equivalente a mostrar que o Cálculo Proposicional é uma semantização do sistema formal.

As letras podem ser substituidas por proposições (ou enunciados) — frases declarativas com um dos valores lógicos zero ou 1.

O símbolo $\sim$ pode ser substituido pelo conectivo lógico «não»; o símbolo $\vee$ pode ser substituido pelo conectivo lógico «ou ... ou» e as fórmulas transformam-se em composições de proposições.

Os termos assim considerados satisfazem os axiomas apontados. A cada f. b. c. corresponde biunìvocamente uma composição de proposições válida — um teorema do Cálculo Proposicional.

18 — Encaremos o problema da compatibilidade.

Um sistema formal diz-se compatível (às vezes consistente) se nele não há alguma f. b. c., A, para qual sejam $\vdash A$ e $\vdash \sim A$, isto é, A e $\sim A$ teoremas.

Desenvolvamos uma metateoria que nos assegure a não construtibilidade de A.

Se no sistema fossem deduzíveis $\vdash A$ e $\vdash \sim A$, então o axioma (2) permitia escrever, com $\sim A$ em vez de B, $((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A)$ para qualquer C f. b. c. Como $(\sim(\sim A) \vee C)$ e $\sim A$ são f. b. c. é

$$\vdash ((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \rightarrow (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C))$$

e

$$((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \wedge (((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \rightarrow \rightarrow (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C))) \supset \supset (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C)) \supset A \rightarrow (\sim A \rightarrow C).$$

Assim de $\vdash A$ vem

$$A \wedge (A \rightarrow (\sim A \rightarrow C)) \supset (\sim A \rightarrow C).$$

De $\vdash \sim A$ vem $\sim A \wedge (\sim A \rightarrow C) \supset C$.

Qualquer f. b. c. C é no sistema $\vdash C$, é deduzível no sistema.

Suponhamos que possuimos regra de valorizar as fórmulas do sistema, isto é, de atribuir a cada f. b. c. um e só um dos valores «u» ou «v», de modo que, se A tem o valor «u», $\sim A$ terá o valor «v», e recìprocamente; se A ou B tem o valor «u», então $A \vee B$ terá o valor «u»; se A e B têm o valor «v», então $A \vee B$ terá o valor «v».

Cada valorização determina para cada fórmula um dos valores possíveis e pode acontecer que alguma fórmula A seja sempre de valor «u», qualquer que seja a valorização considerada. Diz-se que A é uma identidade lógica ou uma tautologia. Se A, qualquer que seja a valorização, é sempre de valor «v», diz-se uma contradição lógica. Quando A toma umas vezes o valor «u» e outras o valor «v», conforme a valorização do sistema, diz-se fórmula anfótera.

Cada semantização do sistema determina uma valorização por meio da verdade ou falsidade da expressão traduzida pela fórmula.

A fórmula $(\sim(\sim A \vee A))$ qualquer que seja o valor de A, é semânticamente um enunciado falso, e consequentemente $(\sim A \vee A)$ é semânticamente um enunciado verdadeiro.

As tautologias são fórmulas semânticamente verdadeiras, quaisquer que sejam os valores dos componentes.

Verifica-se que os axiomas (1), (2) e (3) são tautologias, e que, se A e $(\sim A \vee G)$ são tautologias, também G é tautologia.

A regra de inferência conserva a tautologia. Consequentemente todos os teoremas do sistema são tautológicos.

Ora $p \vee q$ é uma f. b. c., e, portanto, um teorema, na hipótese de qualquer f. b. c. o ser; mas não é tautológica, o seu valor semântico depende dos valores de p e de q.

O absurdo resultou da suposição da existência de algum A, tal que $\vdash A$ e $\vdash \sim A$. Concluiremos que no sistema não há alguma f. b. c., A, com $\vdash A$ e $\vdash \sim A$.

19 — O Cálculo Proposicional fica assim devidamente fundamentado, à HILBERT: não há nele contradição possível, a prova fornecida é absoluta.

Demonstra-se também que o sistema formal, que o fundamenta, é completo, no sentido de que para qualquer f. b. c. A, ou $\vdash A$ ou o sistema torna se incompatível considerando A como um axioma adicional.

20 — Vejamos disto o que é possível fazer, para a fundamentação da Matemática.

Segundo a orientação apontada, havia que construir um sistema formal, adequado para a derivação da matemática, e além disso compatível e completo (qualquer proposição matemática seria decidível, no sentido de ser afirmável ou negável).

Frege, Whitehead e Russell construíram sistemas formais adequados à derivação da Matemática então existente. Não pensaram em garantir a adequação à derivação de quaisquer desenvolvimentos futuros.

Alguns destes sistemas foram apresentados como compatíveis. Por exemplo: «Principia Mathematica» de Russell e Whitehead, «Lógica Matemática» de Quine, sistemas de Bernays, de Fraenkel, de Gödel, de Von Neumann, e de Zermelo.

Não foi possível demonstrar, à Hilbert, a compatibilidade suposta, mas tem-se como muito provável.

A compatibilidade de alguns outros sistemas formais foi sucessivamente estabelecida, mas estes sistemas não são adequados à derivação de toda a aritmética dos números naturais. São assim formalizações parciais da Aritmética. Por exemplo, Post, em 1921, demonstrou a não-contradição do Cálculo Proposicional, e a sua completude, entendida em certo sentido; Hilbert e Ackermann, em 1928, demonstraram a não-contradição do Cálculo Funcional de primeira ordem, e, em 1930, Goedel provou, de certa maneira, a sua completude; Tarski demonstrou a não-contradição e completude da aritmética dos números reais e da geometria elementar.

Em 1931, Goedel, com os seus trabalhos, esclareceu as limitações dos métodos usados na metamatemática, tal qual foram criados por Hilbert. Goedel, trabalhando com sistemas formais construídos a partir dos axiomas de Peano, ou com sintaxe suficientemente rica para permitir a derivação daqueles axiomas — como acontece com sistemas relacionados com Principia Mathematica, adequados à derivação, não só da Análise Clássica, mas também de outra matemática presumìvelmente a ser desenvolvida — provou a impossibilidade de demonstrar a não contradição de tais sistemas por métodos finitistas, isto é, processos construtivos formalizáveis dentro do sistema.

Isto equivalia à impossibilidade de fazer a fundamentação da matemática (Aritmética), à Hilbert.

Este resultado é uma consequência da incompletude dos sistemas formais com que Hilbert trabalhou. Goedel revelou a existência de proposições indecidíveis — correspondentes a fórmulas, A, para as quais nem $\vdash A$ nem $\vdash \sim A$ — e a afirmação da «não-contradição do sistema» é uma dessas proposições.

Uma ideia do raciocínio de Goedel na demonstração apontada.

Suponhamos que «CONSIS» representa uma fórmula sintáctica, cuja interpretação semântica implica a não-contradição do sistema em estudo.

O problema da compatibilidade do sistema fica agora reduzido ao da demonstração de que $\vdash$ CONSIS.

Um dos caminhos, para fazer esta demonstração, seria procurar uma condição A suficiente, tal que $\vdash(A \rightarrow \text{CONSIS})$ e demonstrar que $\vdash A$. Pela regra da simplificação resultaria $\vdash$ CONSIS. Gödel suspeitou que, se o sistema de CONSIS é realmente compatível, não é no sistema nem $\vdash$ CONSIS nem $\vdash \sim$ CONSIS, quer dizer, não é demonstrável no sistema formal que ele seja compatível, nem que seja contraditório. Em vez de procurar A nas condições indicadas, Gödel procurou uma condição necessária B para a derivação de CONSIS, isto é, $\vdash(\text{CONSIS} \rightarrow B)$.

Se B, além disso, é f. b. c. — verdadeira —, mas indecidível no sistema, então nem $\vdash$ CONSIS, nem $\vdash \sim$ CONSIS. É CONSIS indecidível também. Porque, se fosse $\vdash \mathrm{CONSIS}$, de $\vdash \mathrm{CONSIS} \wedge (\vdash (\mathrm{CONSIS} \rightarrow B)) \supset B$ era $\vdash B$, contra a hipótese de não ser teorema; se fosse $\vdash \sim \mathrm{CONSIS}$, por ser $\vdash (\sim B \rightarrow \sim \mathrm{CONSIS})$, era $\vdash \sim B$, contra a hipótese de não ser teorema.

Se for possível construir a fórmula B, admitindo a compatibidade do sistema, e nas condições indicadas, ficará demonstrado que os processos usados para provar a adequação dum sistema formal à derivação da matemática existente, são impotentes para demonstrar a compatibilidade do sistema e até para decidir, ainda que teòricamente, de todas as proposicões matemáticas.

Goedel construíu uma fórmula B indecidível, construindo a fórmula, cujo conteúdo semântico é que B é indecidível. Para isso atribuíu coordenadas numéricas às fórmulas deduzíveis no sistema formal com que trabalhava e, enumerando-as, construíu B pelo processo da diagonal de Cantor. O próprio sistema formal foi traduzido por correspondência no sistema numérico que analisava.

A construção de B estabelecia a incompletude do sistema, pois a sua construção é puramente metamatemática. e B não é deduzível no sistema, e ainda a impossibilidade de demonstrar dentro do sistema a compatibilidade do mesmo.

21 — Esta incompletude refere-se apenas a sistemas formais, cuja sintaxe é adequada à formalização de muitas propriedades dos números naturais, usadas na construção da proposição indecidível B.

Poderá pensar-se que a dificuldade desapareceria, juntando aos axiomas outros que permitissem a dedução das proposições encontradas indecidíveis.

Goedel mostrou que os sistemas, que se iam assim obtendo por extensão do primeiro, eram ainda incompletos, isto é, sempre é possível construir fórmulas indecidíveis. Será a explicação da dificuldade de demonstrar certas propriedades dos números inteiros naturais, fàcilmente aceites como muito prováveis, mas ainda não demonstradas.

22 — Goedel estabeleceu assim que os sistemas formais, adequados à derivação da matemática clássica, não permitem demonstrar a sua compatibilidade, à Hilbert, por métodos finitistas, formalizáveis no próprio sistema, pois que são traduzíveis eles mesmos em números naturais, por correspondência; e que os sistemas conhecidos, não-contraditórios, são inadequados à derivação da matemática. Suspeita-se que a matemática (clássica) é compatível, mas não se pode incorporar esta informação — esta propriedade da matemática — no sistema formal que a fundamentaria.

23 — Depois de apresentadas as limitações, formuladas por Goedel, do método proposto por Hilbert para a fundamentação da matemática, é conveniente uma revisão deste problema Cantor levantou o problema de haver contradições na matemática, desenvolvida pelos processos tradicionais. B. Russell e Whitehead apresentaram soluções para as evitar, propondo lógica adequada para a derivação. Brouwer melhorou as soluções apresentadas para evitar a contradição, propondo processos construtivos e finitistas. Hilbert procurou, à custa dos melhores processos conhecidos, os de Brouwer, fazer a demonstração da não-contradição, da impossibilidade de topar no desenvolvimento da matemática com alguma contradição. Goedel provou a impossibilidade de tal demonstração pelos processos hilbertianos.

O esquema apresentado mostra que o problema está apenas esclarecido em alguns aspectos e não solucionado. A solução continua a ser procurada com as três orientações apontadas, características do pensamento matemático.

24 — Para o intucionismo, a não-contradição estabelece-se reconstruindo a matemática por processos, que não conduzam a contradição. É preciso edificar a matemática sem fazer apelo a ideias preconcebidas a respeito da actividade matemática e dos objectos da matemática. A matemática é independente da Lógica; os princípios usuais da lógica não merecem, em matemática, confiança sem limites.

O intucionismo justifica o que está construído como matemática na medida em que coincide com o obtido pelos processos construtivos e finitistas. A matemática será não-contraditória, quando for possível obter todos os seus resultados por aqueles processos. Os processos usuais na matemática seriam aceites, quando se estabelecesse que não conduziam a algum resultado, que não pudesse ser obtido por uma construção finitista.

O intucionismo não crê possível a construção definitiva dum sistema de axiomas, que permita a derivação da matemática.

A Escola Intuicionista Holandesa — BROUWER e WEIL — tem desenvolvido assim uma matemática intuicionista, isto é, uma fundamentação da matemática à BROUWER.

Os significados de frases como «todos os números que ...» e «há um número que ...» são estabelecidos por construção para evitar que conduzam a contradição. Nos assuntos relacionados com os conjuntos infinitos, pela mesma razão, não é usado o Princípio do Terceiro Excluido da Lógica de ARISTÓTELES. São rejeitadas as demonstrações de existência baseadas no Axioma da Escolha e na Hipótese do Contínuo.

HEYTING e KOLMOGOROFF formalizaram a lógica adequada à derivação da matemática intuicionista, começando por uma lógica elementar, o chamado Cálculo dos Problemas, análogo ao Cálculo Proposicional, e que pode usar os mesmos símbolos, mas com significado diferente: $A, B, \cdots$ representam problemas a resolver; $\sim A \cdots$ a solução do problema A é impossível, ou conduz a contradição; $A \wedge B$ — os problemas A e B são solúveis; $A \vee B$ — um, pelo menos, dos dois problemas é solúvel; $A \rightarrow B$ — a solução do problema B reduz-se à solução do problema A.

São dadas regras para construir as f. b. c. com os sinais «$\sim$», «$\wedge$», «$\vee$» e «$\rightarrow$» de acordo com as situações que ocorrem na resolução de problemas e só estas.

As regras de inferência afastam a afirmação do Princípio do 3.º Excluido e assim $\sim A \vee A$ não é um teorema. A respeito do problema A não há, em geral, razão para afirmar que A é solúvel ou A é reconhecível como contraditório. «A» pode não ser solúvel nem contraditório.

Os axiomas são escolhidos convenientemente de acordo com estas propriedades dos símbolos.

A partir deste Cálculo pode desenvolver-se uma Lógica de ordem superior e paralelamente à formalização da Lógica Clássica, apenas em alguns casos bastante mais complicada.

A matemática deduzida por este processo lógico rejeita todas as demonstrações tradicionais, em que se usou o Princípio do 3.º Excluido, isto é, os teoremas demonstrados pelo método analítico indirecto — ou de redução ao absurdo.

Se se procura x, e se demonstrou que não existir x é contraditório, este facto não prova a existência de x; BROUWER exige uma construção de x, uma demonstração construtiva da existência de x.

Existir é diferente de não contraditório.

Pelos métodos intuicionistas reencontra-se — fundamenta-se à BROUWER — muita da matemática clássica, muitas vezes por caminhos mais árduos, mas não foi possível ainda reencontrá-la toda, nem demonstrar a possibilidade de tal encontro. Tem-se sim construido uma matemática diferente da Matemática Clássica, devidamente fundamentada.

25 — O logicismo, como fundamentação da matemática, consiste numa redução da matemática à Lógica. A matemática pode ser incorporada em sistemas lógicos convenientes por definição das suas noções fundamentais em termos puramente lógicos e conversão dos seus teoremas em fórmulas duma formalização da Lógica.

Frege pretendeu neste sentido reduzir a Aritmética à Lógica, começando por uma formalização conveniente dela.

Frege, Russell e Whitehead reconheceram que a Axiomática de Peano podia ser interpretada em termos da Lógica.

A definição de número cardinal 2 pode ser dada em termos de «classe», conceito lógico, e sem apelo à aritmética. Por exemplo, número cardinal 2, ou é 2 o número de elementos da classe C, isto é, $n(C)=2$, se, e só se, (1) $\exists x \in C$ e $\exists y \in C$; (2) $x \neq y$; (3) se ainda $z \in C$, então $z=x$ ou $z=y$.

O número 2 é assim a extensão (classe) duma propriedade, a de todas as classes com o número 2. Por recorrência definem-se os outros números. Os axiomas podem traduzir-se completamente em expressões da Lógica por meio dos conceitos de variável de elemento, «x», e de variável de classe, «C», e as expressões «não», «e», «se, então» «todos os x x», «há um x», «x é da classe C» e «C é a classe dos elementos tais que». Estas expressões podem representar-se por fórmulas contendo apenas os símbolos «$\sim$», «$\cdot$», «$\forall$», «$\exists$» respectivamente de «não», «e», «todos» e «existe».

Todos os conceitos da matemática — Aritmética e Análise Clássica — podem definir-se a partir destes quatro termos da Lógica. Todas as proposições da matemática podem deduzir-se destes termos por meio de regras de inferência da Lógica — Lógica Clássica ampliada com os Axioma da Escolha e da Infinidade. Os números reais exigem uma lógica de ordem superior à da Lógica Elementar.

Os axiomas da Aritmética são, assim entendidos, simples transcrições de teoremas da Lógica.

A matemática ficaria fundamentada à Russell, com a demonstração da compatibilidade da Lógica.

Este critério levanta objecções. A Lógica fica cheia de limitações para permitir a derivação da matemática. Alguns raciocínios considerados legítimos conduziram a contradições, quando aplicados aos conjuntos infinitos, e é de supor que criem contradição noutros domínios. Russell teve de criar a teoria dos tipos lógicos que é o desenvolvimento da aplicação do princípio do círculo vicioso: tudo o que contém uma variável ligada deve ser excluído dos valores dessa variável, para evitar que o sistema lógico, com que derivava a matemática, criasse, por si mesmo, contradições. Esta teoria é só meia solução do problema, constitui um processo de reconhecer as fórmulas contraditórias, e não evita os raciocínios que a elas conduzem, sem pôr de lado partes usuais da matemática.

Nos «Principia», Russell e Whitehead apresentaram uma fundamentação da matemática, que inclui a Aritmética e a Teoria dos Conjuntos, consequentemente a Análise Clássica, derivando esta do sistema lógico de Russell — axiomas da Lógica Elementar, teoria dos tipos lógicos e Axioma da Redutibilidade e Axioma do Infinito. Mais tarde pôs-se de lado o Axioma da Redutibilidade, exigido apenas por dificuldades técnicas da teoria dos tipos, tal qual fora formulada por Russell, e que então foi possível remover.

Ramsey mostrou que o Axioma do Infinito, que postula a existência duma infinidade de objectos, não tinha carácter puramente lógico, pois não é uma identidade lógica, como acontece serem os outros. Este axioma não é indiscutìvelmente aceite e fica assim comprometida a fundamentação da matemática pela Lógica, no sentido do logicismo de Frege, Couturat e Russell: dedução da matemática de axiomas puramente lógicos, sem apelo a axiomas especìficamente matemáticos.

26 — Segundo o que foi exposto, as pesquisas na fundamentação da matemática têm sido dominadas pela atribuição aos símbolos matemáticos dum conteúdo intuitivo — Brouwer; dum conteúdo lógico — Russell; de ausência de conteúdo — Hilbert. Mais ainda, o intuicionismo acaba por ser pròpriamente uma reconstrução da matemática, um rigorismo da matemática; e o formalismo hilbertiano é uma tentativa de demonstração intuicionista da não-contradição da matemática pré-intuicionista, demonstração que legitimaria os processos da matemática clássica.

27 — Revisto por Goedel, o formalismo ganha novos aspectos nas pesquisas que prossegue. Utiliza agora processos construtivos e finitistas não formalizáveis no sistema formal derivado da Axiomática de Peano. Gentzen, em 1936, demonstrou a compatibilidade da teoria dos números naturais, usando uma indução transfinita com números ordinais até ao número $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. Esta indução transfinita tem justificação intuicionista. O tipo de ordem ε_0 pode materializar-se numa disposição apropriada dos números naturais e com uma definição de recorrência.

A demonstração consiste numa disposição das demonstrações da teoria dos números naturais, de modo que, usando os ordinais do tipo indicado, se consegue fazer uma espécie de enumeração delas todas, e pela qual se reconhece a impossibilidade duma fórmula representativa duma contradição. Assim com base no Axioma de Zermelo o processo deriva fórmulas bem construídas dum número infinito de premissas e não é formalizável no sistema formal da Aritmética.

A demonstração é aceite quase universalmente, mas a utilização da boa ordenação dos conjuntos, ligada estrictamente ao Axioma de Zermelo, levanta algumas objecções.

Em 1951, Lorentzen apresentou uma demonstração que utiliza uma espécie de indução ramificada, seguindo a ordem natural de formação das demonstrações, em vez de as dispôr num conjunto bem ordenado. É uma demonstração com aceitação mais extensa. O processo usado por Lorentzen é algébrico e teríamos a não-contradição da Aritmética consequência dum teorema da Álgebra.

Lorentzen propôs ainda outra demonstração da não-contradição da Aritmética, em que utiliza uma formalização da matemática intuicionista.

28 — O exposto permite-nos caracterizar, do ponto de vista da fundamentação, os três aspectos seguintes coexistentes da matemática actual. Análise Clássica: — conceito de número e de função de números — desenvolvida, com excessiva liberdade, pelo realismo, do ponto de vista platónico a respeito dos objectos da matemática. A demonstração de Lorentzen legitima a construção platónica dos números naturais. No caso dos números reais é impossível uma teoria construtiva, que abranja todos. Não é possível a construção dum sistema formal definitivo, que permita a derivação de todas as propriedades dos números reais. É possível a construção de sistemas formais, que permitem a derivação de algumas propiedades dos números reais, e a partir destes construir outros sistemas que englobem os primeiros; mas não há definitivamente um que englobe todos e daí insuficiência de fundamentação. Matemática Intuicionista — reconstrução, por processos de rigor inatacável, da matemática já desenvolvida por outros processos — Rigorismo de fundamentação desenvolvido deselegante e, por vezes, complexamente.

Matemática Axiomátizada — Análise Geral — redução de cada teoria matemática a uma axiomática, não contraditória, e quando possível, completa. Fundamentação discutível devido a dificuldades de demonstração de não-contradição — em geral, por modelos — e da completude.

29 — Do ponto de vista do rigor matemático, apontamos os resultados importantes seguintes nos aspectos demarcados na matemática actual: necessidade de fundamentação da Análise Clássica; condenação de alguns dos seus processos de construção; complexidade e deselegância da matemática intuicionista; demonstração construtiva do Axioma de ZERMELO; existência de propriedades da aritmética — matemática portanto — que escapam a qualquer axiomática; se há algnm sistema de axiomas, não-contraditório, para a teoria dos conjuntos, é possível juntar o Axioma de ZERMELO ou a Hipótese do Contínuo, sem que impliquem contradição no sistema.

30 — Claramente os pontos de vista tomados nos quadros apresentados anteriormente contribuiram para o esclarec mento do pensamento matemático e estão-se esclarecendo mutuamente.

Sôbre alguns problemas de ocupações

por R. M. Barbosa

Pretendemos com êste trabalho divulgar alguns estudos que fizemos sôbre Ocupações, especialmente quatro problemas, aplicámos a estas questões as probabilidades como algorítmo demonstrativo.

No final do trabalho procurámos mostrar com novas interpretações a possibilidade de obter-se como consequência quatro fórmulas da análise combinatória usual.

Acrescentou-se para elucidação um exemplo numérico para cada um dos problemas com os respectivos diagramas.

A — Quatro problemas de ocupações--Enunciados

A. 1 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *com exclusão de celas* ocupadas, por n *elementos distinguíveis*.

A. 2 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos distinguíveis*.

A. 3 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *com exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos indistinguíveis*.

A. 4 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos indistinguíveis*.

B — Denominações

Aos números fornecidos pelos problemas A. 2, A. 3 e A. 4 denominam-se respectivamente número de MAXWELL-BOLTZMAN, nú-