rismo de fundamentação desenvolvido deselegante e, por vezes, complexamente.

Matemática Axiomátizada — Análise Geral — redução de cada teoria matemática a uma axiomática, não contraditória, e quando possível, completa. Fundamentação discutível devido a dificuldades de demonstração de não-contradição — em geral, por modelos — e da completude.

**29** — Do ponto de vista do rigor matemático, apontamos os resultados importantes seguintes nos aspectos demarcados na matemática actual: necessidade de fundamentação da Análise Clássica; condenação de alguns dos seus processos de construção; complexidade e deselegância da matemática intuicionista; demonstração construtiva do Axioma de ZERMELO; existência de propriedades da aritmética — matemática portanto — que escapam a qualquer axiomática; se há algnm sistema de axiomas, não-contraditório, para a teoria dos conjuntos, é possível juntar o Axioma de ZERMELO ou a Hipótese do Contínuo, sem que impliquem contradição no sistema.

**30** — Claramente os pontos de vista tomados nos quadros apresentados anteriormente contribuiram para o esclarec mento do pensamento matemático e estão-se esclarecendo mutuamente.

# *Sôbre alguns problemas de ocupações*

*por R. M. Barbosa*

Pretendemos com êste trabalho divulgar alguns estudos que fizemos sôbre Ocupações, especialmente quatro problemas, aplicámos a estas questões as probabilidades como algorítmo demonstrativo.

No final do trabalho procurámos mostrar com novas interpretações a possibilidade de obter-se como consequência quatro fórmulas da análise combinatória usual.

Acrescentou-se para elucidação um exemplo numérico para cada um dos problemas com os respectivos diagramas.

## A — Quatro problemas de ocupações--Enunciados

A. 1 — Determinação do número de ocupações possíveis de $K$ celas distinguíveis, *com exclusão de celas* ocupadas, por $n$ *elementos distinguíveis*.

A. 2 — Determinação do número de ocupações possíveis de $K$ celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por $n$ *elementos distinguíveis*.

A. 3 — Determinação do número de ocupações possíveis de $K$ celas distinguíveis, *com exclusão das celas* ocupadas, por $n$ *elementos indistinguíveis*.

A. 4 — Determinação do número de ocupações possíveis de $K$ celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por $n$ *elementos indistinguíveis*.

## B — Denominações

Aos números fornecidos pelos problemas A. 2, A. 3 e A. 4 denominam-se respectivamente número de MAXWELL-BOLTZMAN, número de FERMI-DIRAC ou FERMIONS ou ainda FERMIÕES, e número de BOSÉ-EINSTEIN ou BOSONS ou ainda BOSÕES.

Alguns autores preferem denominar *fermions* ou *bosons* aos elementos, assim em A. 3 os elementos seriam chamados fermions, em A. 4 seriam bosons; e nessa interpretação o número de fermions, ou de bosons, é o número $n$ de elementos indistinguíveis, e não o número de ocupações.

## C — Notações

Indicaremos os números dos problemas anteriores por $N(K^+;n^+)$, $N(K;n^+)$ ou $N$(FERMI), e $N(K;n)$ ou $N$(BOSÉ).

## D — Deduções

D. 1 — Procuraremos a probabilidade de $n$ celas determinadas (das $K$ celas dadas) serem ocupadas pelos $n$ elementos distinguíveis, com exclusão das celas ocupadas.

Admitindo que $i$ celas determinadas já foram ocupadas, portanto excluídas, a probabilidade de ocupação de outra cela determinada é dada por $(n-i)/(K-i)$.

Fazendo variar $i$ de $0$ a $n-1$ teremos a probabilidade pedida:

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{K-i} = \frac{n!}{K^{(n)}} .$$

Atendendo à A. 1 e C o número de elementos do universo é dado por $N(K^+,n^+)$, e o número de elementos do evento é dado por $n!$, pois os elementos são distinguíveis. Segue que a probabilidade é dada também por:

$$\frac{n!}{N(K^+;n^+)} .$$

Comparando os dois valores da probabilidade teremos:

D. 1. 1 $\qquad N(K^+;n^+) = K^{(n)}$ .

*Nota* — Obrigatòriamente tem-se $n \leq K$ .

D. 2 — Procuremos a probabilidade de uma cela determinada ser ocupada por $n$ elementos distinguíveis.

Admitindo que a cela determinada já foi ocupada por $i$ elementos, a probabilidade de ocupação por outro elemento será dada por: $1/K$ .

Fazendo $i$ variar de $0$ a $n-1$ a possibilidade pedida é dada por: $1/K^n$ .

Atendendo à A. 2 e C o número de elementos do universo é $N(K;n^+)$ e o número de elementos do evento é $1$, logo a probabilidade também é dada por:

$$\frac{1}{N(K;n^+)} .$$

Comparando as probabilidades anteriores obtemos:

D 2. 1 $\qquad N(\text{MAXWELL}) = N(K;n^+) = K^n$

D. 3 — No problema A. 3 os elementos são indistinguíveis, portanto no raciocínio aplicado em D. 1 os elementos não podem ser pensados permutados, ou que o número de elementos do evento é 1 e o número de elementos do universo é $N$(FERMI).

$$N(\text{FERMI}) = \frac{K^{(n)}}{n!} = \frac{K!}{n!(K-n)!}$$

ou

D 3. 1 $\qquad N(\text{FERMI}) = \binom{K}{n}$

*Nota* — Obrigatòriamente tem-se $n \leq K$ .

D. 4 — Procuremos a probabilidade de uma cela determinada (sem exclusão da cela ocupada) ser ocupada pelos $n$ elementos indistinguíveis.

Substituamos inicialmente a cela escolhida por $n$ sub-celas em idênticas condições que as celas anteriores, de tal modo que sejam ainda distinguíveis mas com a mesma probabilidade de ocupação.

A substituição anterior coincide em pensar o acréscimo de $n-1$ celas.

Consideremos a condição, agora, que ocupada uma cela, ela será excluída.

As condições estabelecidas transformam o problema A. 4 no problema A. 3, com modificação no número de celas, isto é:

$$N(K;n) = N(K+n-1^{+};n)$$

ou

$$N(K;n) = \binom{K+n-1}{n}$$

ou

$$\text{D. 4. 1} \quad N(\text{Bosé}) = \binom{K+n-1}{n}$$

## E — Interpretação dos quatro problemas em têrmos de agrupamentos

Invertamos todos os problemas, com a inclusão de duas regras, considerando ocupação de $K$ celas distinguíveis por $n$ elementos, como agrupamentos distintos de $K$ celas distinguíveis em $n$ lugares.

Regra E. 1 — *Celas sem exclusão* ou *com exclusão*, quando ocupadas, são interpretadas por celas podendo *ser repetidas ou não*, respectivamente, nos agrupamentos.

Regra E. 2 — *Elementos distinguíveis* ou *indistinguíveis* serão interpretados como *lugares distinguíveis* ou *indistinguíveis* (isto é, em têrmos de Arranjos ou de Combinações).

## F — Identificações

Teremos com as interpretações anteriores as seguintes identificações:

$N(K^{+};n^{+}) = A_{K,n}$
(número de arranjos simples)

$N(K;n^{+}) = (A\,C)_{K,n}$
(número de arranjos completos)

$N(K^{+};n) = C_{K,n}$
(número de combinações simples)

$N(K;n) = (C\,C)_{K,n}$
(número de combinações completas)

## G — Fórmulas

Utilizando as identificações dadas em F teremos as quatro fórmulas seguintes, da análise combinatória usual:

$$\text{G. 1:} \quad A_{K,n} = K^{(n)} = K(K-1)(K-2)\cdots(K-n+1)$$

$$\text{G. 2:} \quad (A\,C)_{K,n} = K^{n}$$

$$\text{G. 3:} \quad C_{K,n} = \binom{K}{n}$$

$$\text{G. 4:} \quad (C\,C)_{K,n} = \binom{K+n-1}{n} = C_{K+n-1,n}$$

## H — Observações

É interessante observar que apenas G. 1 não pode ser considerada como deduzida dos problemas de ocupação, desde que em D. 1 utilizou-se implìcitamente o conceito e fórmula de arranjos ($n!$).

## I — Exemplos numéricos

I. 1 — Número de ocupações de 3 celas por 2 elementos distinguíveis, com exclusão das celas ocupadas:

$$N(K^{+},n^{+}) = 3^{(2)} = 6\,.$$

Diagramas — (*)

$$\begin{array}{cc} (\,a \mid b \mid -) & (\,b \mid a \mid -) \\ (\,a \mid - \mid b\,) & (\,b \mid - \mid a\,) \\ (- \mid a \mid b\,) & (- \mid b \mid a\,) \end{array}$$

(*) Usámos as representações de Feller.

I. 2 — Número de ocupações de 2 celas por 3 elementos distinguíveis, sem exclusão de celas ocupadas:

$$N(\text{Maxwell}) = 2^3 = 8\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{ll} (\;ab \mid c\;) & (\;c \mid ab) \\ (\;ac \mid b\;) & (\;b \mid ac) \\ (\;bc \mid a\;) & (\;a \mid bc) \\ (abc \mid -) & (- \mid abc) \end{array}$$

I. 3 — Número de ocupações de 4 celas por 3 elementos indistinguíveis, com exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Fermi}) = \binom{4}{3} = 4\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{c} (1 \mid 1 \mid 1 \mid 0) \\ (1 \mid 1 \mid 0 \mid 1) \\ (1 \mid 0 \mid 1 \mid 1) \\ (0 \mid 1 \mid 1 \mid 1) \end{array}$$

I. 4 — Número de ocupações de 3 celas por 4 elementos indistinguíveis, sem exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Bosé}) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{lll} (4 \mid 0 \mid 0) & (0 \mid 4 \mid 0) & (0 \mid 0 \mid 4) \\ (3 \mid 1 \mid 0) & (3 \mid 0 \mid 1) & (0 \mid 3 \mid 1) \\ (0 \mid 1 \mid 3) & (1 \mid 0 \mid 3) & (1 \mid 3 \mid 0) \\ (2 \mid 2 \mid 0) & (2 \mid 0 \mid 2) & (0 \mid 2 \mid 2) \\ (2 \mid 1 \mid 1) & (1 \mid 2 \mid 1) & (1 \mid 1 \mid 2) \end{array}$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] Feller, William — *An introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1950], N. Y.

[2] Gil, J. M. — *Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações*, in. Gazeta de Matemática, N.º 79-80, N.º 81 e N.º 82-83, Lisboa.

[3] Parzen, Emanuel — *Modern Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1960], N. Y.

[4] Riordan, John — *An introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, [1958], N. Y.

[5] Springer, G. — *Notas de aula de um curso sôbre Estruturas Finitas da Matemática*, 1961, S. Paulo.

[6] Barbosa, R. Madsen — *Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória*, publicação da F. F. C. L. de Araraquara (a ser publicado).

# *Duas observações sobre Estática do Ponto Material*

por *José Manuel dos Santos Simões Pereira*

As duas observações que a seguir se apresentam surgiram-nos quando estudámos a Estática do Ponto Material segundo as «Lições de Mecânica Racional» do Ex.mo Sr. Prof. Doutor Diogo Pacheco de Amorim.

Na primeira referimo-nos a um facto que parece estar em desacordo com a nossa experiência corrente: o de serem instáveis as posições de equilíbrio indiferente. Trata-se é claro duma propriedade que admite uma excepção quando entre as forças aplicadas ao ponto se encontram algumas que dependem da sua velocidade. É o caso, por exemplo, do atrito ou de resistências do meio ambiente que estão presentes na maioria das questões a que diz respeito a nossa experiência corrente.

Na segunda constrói-se um exemplo de posição de equilíbrio estável à qual não corresponde nenhum extremo da função de for-